ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт гражданской защиты
Кафедра общеинженерных дисциплин

Е.К.Торхова, А.С.Мурыгин

многогранники.

Учебно - методическое пособие

ИЖЕВСК 2012

Рецензенты:
 Кафедра «Теории и методики технологического и профессионального образования» Удмуртского государственного университета (зав. кафедрой – кандидат педагогических наук доцент А.Е.Причинин)

Составители:
Е.К.Торхова, старший преподаватель кафедры ОИД УдГу;
А.С.Мурыгин, студент группы 140400 физико-энергетического факультета УдГУ.

Многогранники / сост. Е.К.Торхова, А.С.Мурыгин; под ред. Е.К.Торховой. Ижевск, 2012. – 34 с.: ил. – (Учебно - методическое пособие)

В учебно - методическом пособии дан краткий исторический обзор появления основных форм многогранников как области научного математического исследования. Представлена классификация многогранников с подробным описанием конструкций различных многогранных форм и их основных характеристик. Подробно рассматриваются пересечения многогранных поверхностей при проектировании сложных форм. Составлены алгоритмы построения линий взаимного пересечения многогранных тел.

Рекомендуется студентам дневной, заочной и дистанционной форм обучения бакалавров инженерного профиля.

Оглавление

1. Введение

Многогранники это один из видов простейших пространственных форм, используемых с древнейших времен и до наших дней при проектировании технически сложных конструкций. Они нашли исключительно широкое применение в архитектуре и технике.

Многие инженерные сооружения древности, дошедшие до наших дней как замечательные памятники архитектуры, представляют собой форму многогранников. Например, хорошо известные египетские пирамиды, многие башни, храмы и замки.

Многогранные формы часто применяются в конструкциях современных зданий и различных инженерных сооружений. Например, крыши жилых, общественных и промышленных зданий часто представляют собой пересекающиеся призмы и пирамиды.

Кроме того, многогранные формы имеют детали машин и механизмов, станков и инструмента. В технической оптике многогранники используются в виде оптических призм.

В природе очень многие вещества имеют многогранное кристаллическое строение. Это большинство веществ, слагающих горные породы и почву; все металлы и металлические сплавы; огромное большинство твердых химических реактивов, аспирин, пенициллин; кости и зубы; волосы и перья, шелк и хлопок, нейлон и даже растянутая резина.

Наибольший практический интерес представляют призмы, пирамиды, призматоиды и правильные выпуклые многогранники.

2. Исторические сведения

История правильных многогранников уходит в глубокую древность. Начиная с 7 века до нашей эры, в Древней Греции создаются философские школы. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства.

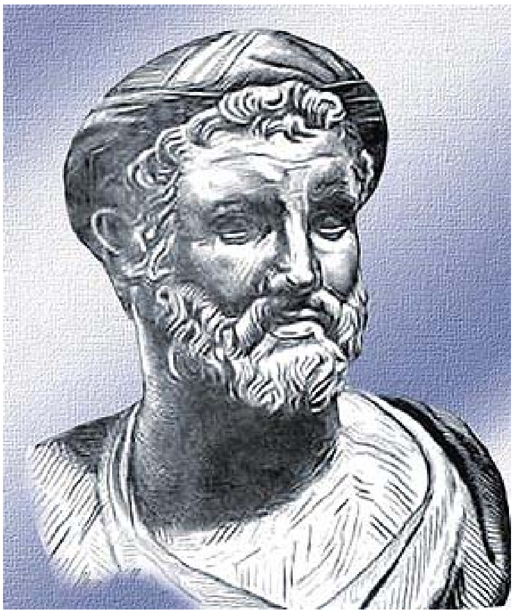


Рис. 1. Пифагор (древнегреческий философ, математик).

Одной из первых и самых известных школ *была Пифагорейская*, названная в честь своего основателя Пифагора (Рисунок 1). Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых духов.

Пифагорейцы полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: *огня, земли, воздуха и воды*. Существование пяти *правильных многогранников* они относили к строению материи и Вселенной.

Согласно этому мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных тел:

- *Вселенная - додекаэдр*
- *Земля - куб*
- *Огонь - тетраэдр*
- *Вода - икосаэдр*
- *Воздух - октаэдр*

Позже учение *пифагорейцев* о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий *ученый, философ - идеалист Платон* (Рисунок 2) . С тех пор правильные многогранники стали называться Платоновыми телами.

Открытие тринадцати полуправильных выпуклых многогранников приписывается *Архимеду* (Рисунок 3), который впервые перечислил их в недошедшей до нас работе.

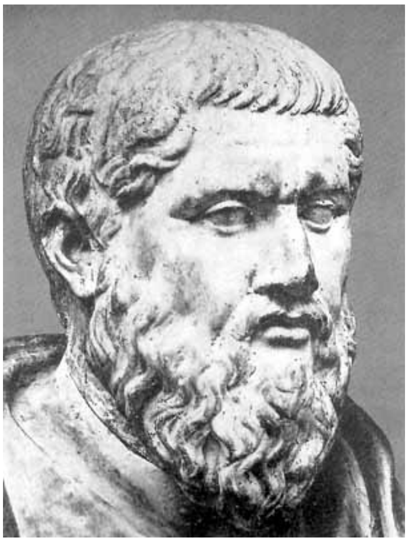


Рис. 2. Платон (древнегреческий философ).

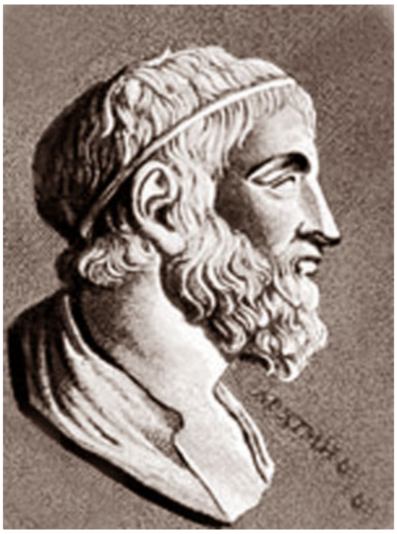


Рис. 3. Архимед (древнегреческий математик, физик, механик и инженер)

Рис. 4. Евклид (древнегреческий математик).

В настоящее время теория многогранников является современным разделом математики. Она тесно связана с топологией, теорией графов, имеет большое значение как для теоретических исследований по геометрии, так и для практических приложений в других разделах математики, например, в алгебре, теории чисел, прикладной математики - линейном программировании, теории оптимального управления.

Многогранники имеют красивые формы, например, *правильные*, *полуправильные и звездчатые многогранники*. Они обладают богатой историей, которая связана с именами таких ученых, как *Пифагор, Евклид* (Рисунок 4)*, Архимед*.

Многогранники выделяются необычными свойствами, самое яркое из которых формулируется в *теореме Эйлера* (Рисунок 5) о числе граней, вершин и ребер выпуклого многогранника: для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение *Г+В-Р=2, где Г-число граней, В-число вершин, Р-число ребер данного многогранника. Теорему Эйлера* историки математики называют первой теоремой топологии - крупного раздела современной математики.

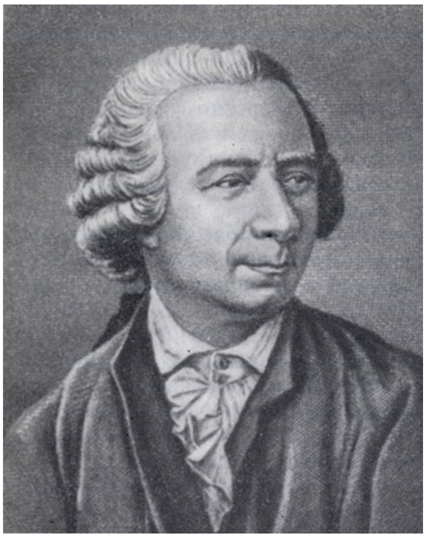


Рис. 5. Леона́рд Э́йлер (математик).

С древнейших времен наши представления о красоте связаны с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к *многогранникам* - удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание выдающихся мыслителей.

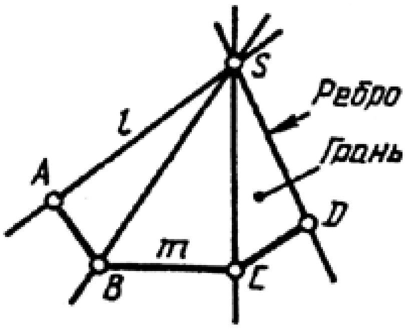
3. Классификация многогранников

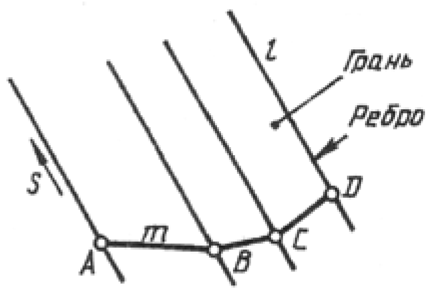
В математике принято считать ***многогранники*** - геометрическими телами, ограниченными плоскими n- угольниками, которые называются гранями. Линии пересечения граней называются рёбрами. Точки пересечения рёбер – вершинами. (Л.А. Голдобина, А.Л. Бочков.)

В инженерной графике многогранниками называют замкнутые *гранные поверхности*, образованные некоторым числом (не менее четырех) граней. (А.И. Лагерь)

К *гранным* относятся *поверхности*, образованные перемещением прямолинейной образующей *l* по ломаной направляющей *m*. Если при этом одна точка S образующей неподвижна, создается пирамидальная поверхность, если образующая при перемещении параллельна заданному направлению *S*, то создается призматическая поверхность

Элементами *гранных поверхностей* являются: вершина *S* (у призматической поверхности она находится в бесконечности), грань (часть плоскости, ограниченная одним участком направляющей *m* и крайними относительно него положениями образующей *l*) и ребро (линия пересечения смежных граней).





Пирамидальная поверхность. Призматическая поверхность.

Рис. 6.

Замкнутая гранная поверхность образует многогранник.

Различают две группы многогранников, *выпуклые* и *вогнутые*.

Выпуклыми многогранниками называются многогранники, располагаемые по одну сторону каждой грани. Если это условие не соблюдаются, то многогранники называются *вогнутыми*.

3.1 Выпуклые многогранники.

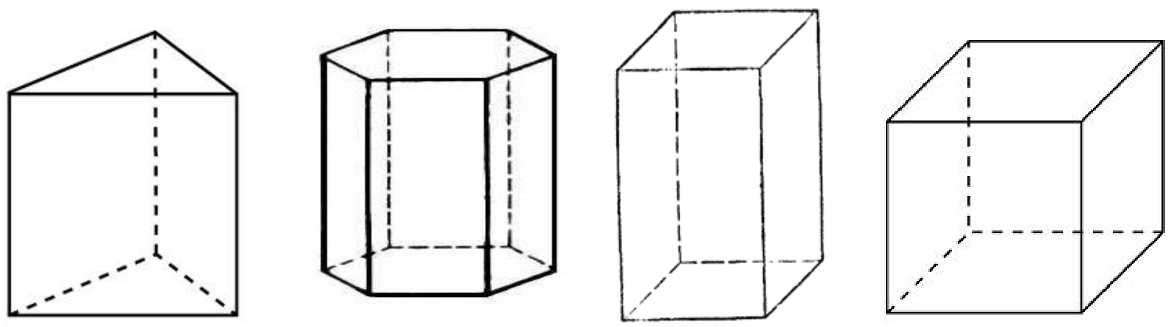
3.1.1 Призма и пирамида.

Призма - многогранник, у которого основание — два одинаковых и взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани — параллелограммы.

Призма имеет название по количеству углов в ее основании. Например: треугольная (рисунок 7А), пятиугольная, шестиугольная (рисунок 7Б) и т. д. Четырёхугольные призмы имеют индивидуальные названия. Призма, у которой в основании параллелограмм, называется *параллелепипед.* У параллелепипеда все грани параллелограммы (рисунок 7С). Призма, у которой основание и боковые грани квадратной формы называется *куб* (рисунок 7Д).

Призмы бывают *прямые и наклонные.*

Прямая призма — призма, у которой все боковые ребра перпендикулярны основанию (рисунок 7).



А Б С Д

Рис. 7. Прямые призмы.

Наклонная призма - призма, боковые рёбра которой не перпендикулярны основанию (рисунок 8).

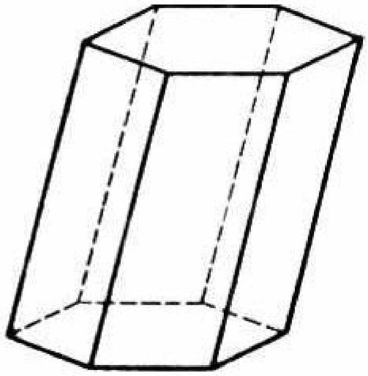


Рис 8. Наклонная призма.

Пирамида — многогранник, у которого одна грань (основание) представляет собой многоугольник, а остальные грани (боковые) - треугольники с общей точкой, называемой вершиной. Если в основании пирамиды треугольник, пирамида называется трёхгранной, если в основании пирамиды четырёхугольник - четырёхгранной и т.д. Пирамида имеет название по количеству ее боковых граней.

Пирамида называется *прямой*, если перпендикуляр, опущенный из ее вершины, попадает в центр основания. Этот перпендикуляр называется высотой пирамиды (рисунок 9).

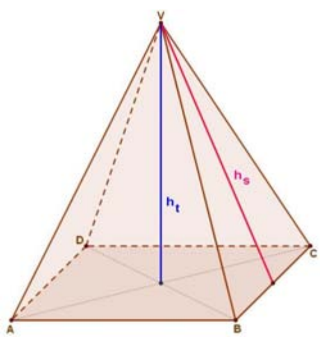


Рис. 9. Прямая пирамида.

Пирамида называется *наклонной*, если перпендикуляр, опущенный из вершины, не попадает в центр основания (рисунок 10).

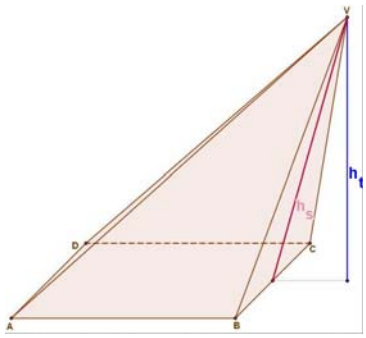
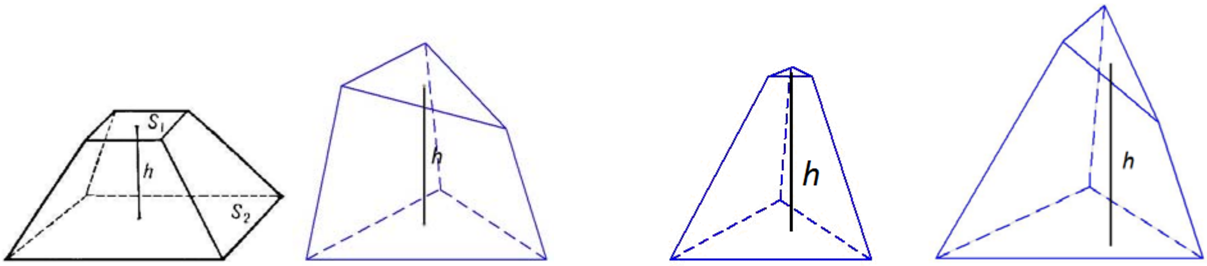


Рис. 10. Наклонная пирамида.

Прямые и наклонные пирамиды бывают *полные и усечённые.*

Полной называется пирамида, у которой боковые рёбра встречаются в единой точке называемой вершиной.

Усечённая пирамида – это пирамида, у которой вершина отсечена плоскостью. В этом случае пирамида имеет два основания. Если секущая плоскость была параллельна основанию пирамиды, то основания пирамиды будут параллельны друг другу (рисунок 11 а). Если секущая плоскость не параллельна основанию, то основание отсечения будет наклонным (рисунок 11 б). Если пирамида наклонная, а секущая плоскость параллельна основанию, то основания пирамиды будут параллельны (рисунок 11 с). Если пирамида наклонная, а секущая плоскость была не параллельна основанию, то основание сечения будет наклонным (рисунок 11 д).



а б с д

Рис. 11. Усеченная пирамида.

3.1.2 Тела Платона (Правильные многогранники).

Правильными считаются многогранники, у которых все грани правильные и конгруэнтные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней.

Существует пять правильных многогранников: *тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*

Тетраэдр – это четырёхгранник, все грани которого являются равносторонними треугольниками (рисунок 12).

Характеристики:

- Каждая его вершина является вершиной трех треугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов.
- Тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер.

Элементы симметрии:

- Тетраэдр не имеет центра симметрии, но имеет 3 оси симметрии и 6 плоскостей симметрии.

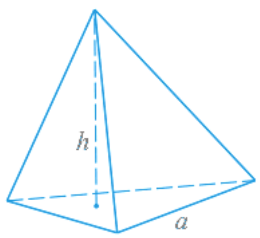


Рис. 12.

Гексаэдр (куб) – это шестигранник, все грани которого являются квадратами (рисунок 13).

Характеристики:

- Каждая его вершина является вершиной трех квадратов.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов.

- Куб имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.

Элементы симметрии:

- Куб имеет центр симметрии - центр куба, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

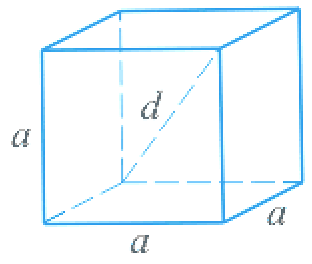


Рис. 13.

Октаэдр – это восьмигранник, все грани которого являются равносторонними треугольниками (рисунок 14).

Характеристики:

- Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240 градусов.
- Октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.

Элементы симметрии:

- Октаэдр имеет центр симметрии - центр октаэдра, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

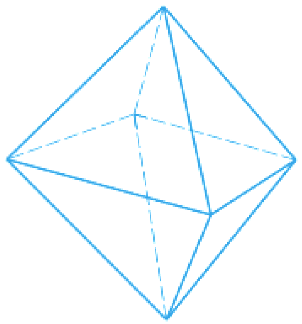


Рис. 14.

Додекаэдр – это двенадцатигранник, все грани которого являются правильными пятиугольниками (рисунок 15).

Характеристики:

- Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градусов.
- Додекаэдр имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер.

Элементы симметрии:

- Додекаэдр имеет центр симметрии - центр додекаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

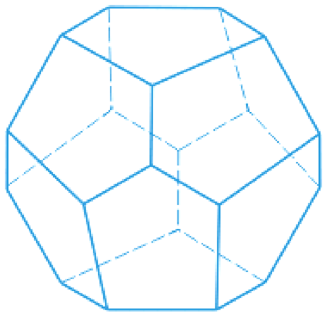


Рис. 15.

Икосаэдр – двадцатигранник, все грани которого являются правильными равносторонними треугольниками (рисунок 16).

Характеристики:

- Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов.
- Икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.

Элементы симметрии:

- Икосаэдр имеет центр симметрии - центр икосаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

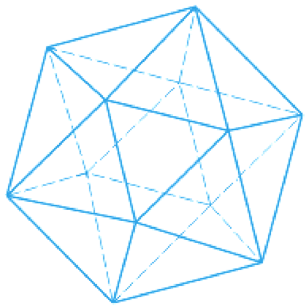


Рис. 16.

3.1.3 Тела Архимеда.

Тела Архимеда это правильные многогранники со срезанными вершинами. Существует 13 типов тел Архимеда: *кубооктаэдр, икосододекаэдр, усечённый тетраэдр, усечённый октаэдр, усечённый икосаэдр, усечённый куб, усечённый додекаэдр, ромбоикосододекаэдр, ромбоусечённый кубооктаэдр, ромбоусечённый икосододекаэдр, курносый куб, курносый додекаэдр.* (рисунок 17).

Тела Архимеда получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Так, если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим *усеченный тетраэдр*, имеющий восемь граней (рис.1 на рисунке 17). Из них четыре – правильные шестиугольники и четыре – правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходится три грани.

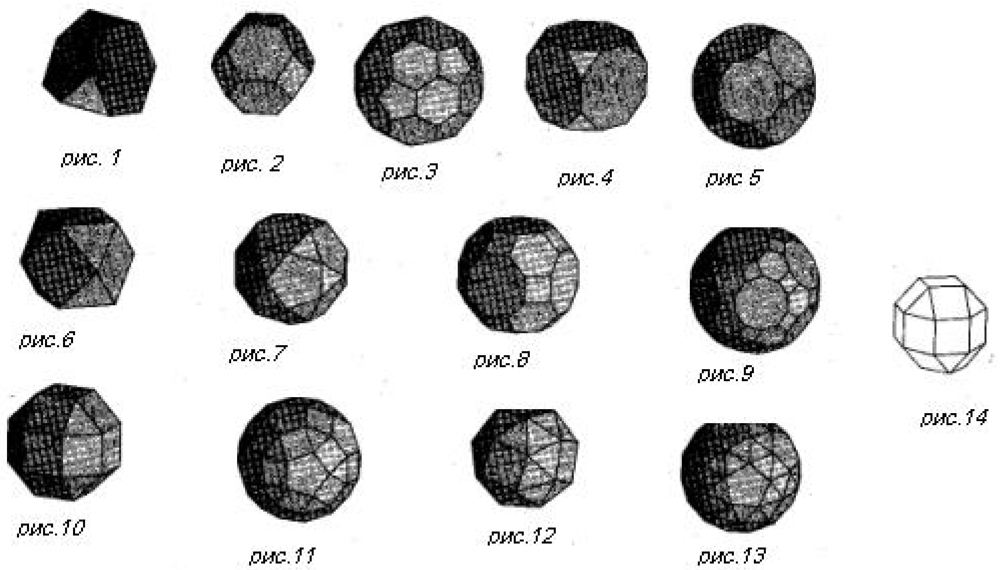


Рис. 17. Тела Архимеда.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно *усеченный октаэдр* (рис. 2 на рисунке 17) и *усеченный икосаэдр* (рис. 3 на рисунке 17). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить *усеченный куб* (рис.4 на рисунке 17) и *усеченный додекаэдр* (рис. 5 на рисунке 17).

Для того чтобы получить еще один правильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется *кубооктаэдром* (рис. 6 на рисунке 17). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и название – кубооктаэдр.

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется *икосододекаэдром* (рис. 7 на рисунке 17). У него двадцать граней – правильные треугольники и двенадцать граней – правильные пятиугольники, то есть все грани икосаэдра и додекаэдра.

Еще два многогранника называются *усеченный кубооктаэдр* (рис. 8 на рисунке 17) и *усеченный икосододекаэдр* (рис. 9 на рисунке 17), хотя их нельзя получить усечением *кубооктаэдра и икосододекаэдра*. Отсечение углов этих многогранников дает не квадраты, а прямоугольники.

На рисунке 10 (рис. 17) изображен *ромбокубооктаэдр.* Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов.

На рисунке 11 (рис. 17) изображен *ромбоикосододекаэдр,* поверхность которого состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 12, 13 (рис. 17) представлены так называемые *плосконосый (курносый) куб* и *плосконосый (курносый) додекаэдр*, поверхности которых состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

3.1.4 Тела Фёдорова (Параллелоиды).

Русский учёный *Е. С. Фёдоров* в 1881 г. выделил выпуклые многогранники, рассматриваемые как тела, параллельным переносом которых можно заполнить все бесконечное пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой. Такие многогранники называются *телами Фёдорова* (рисунок 18).

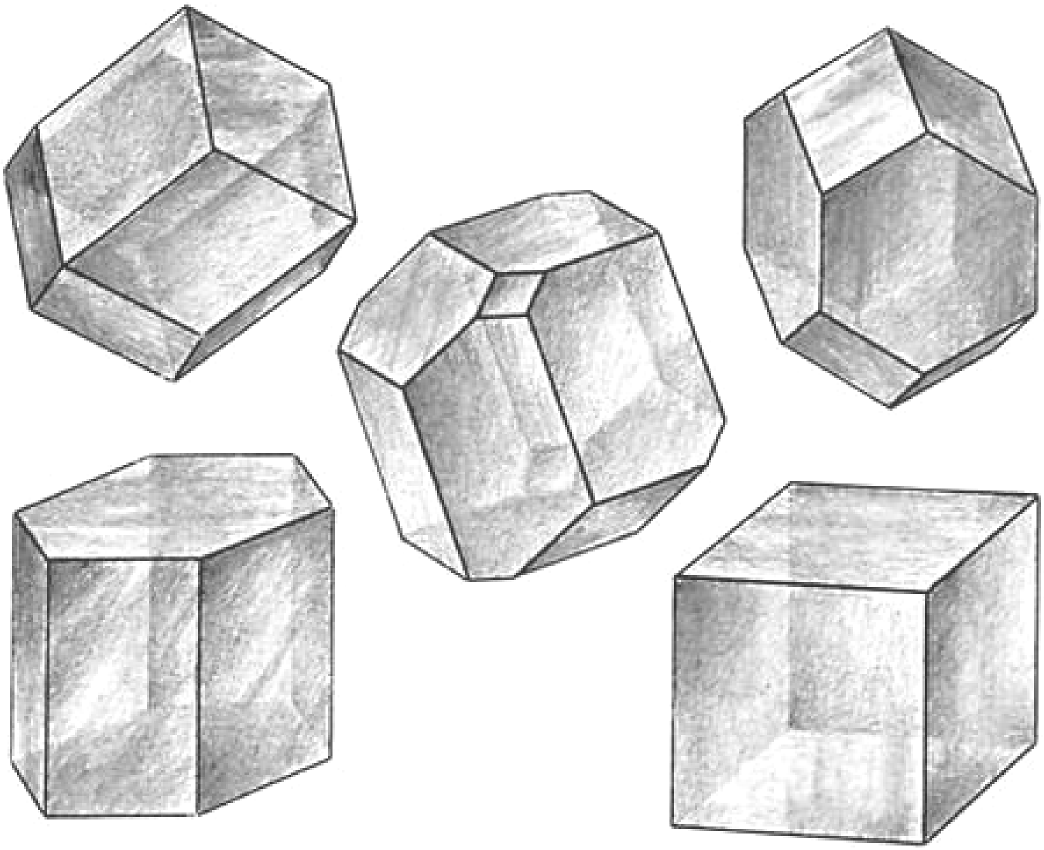


Рис.18. Тела Фёдорова.

3.2 Вогнутые многогранники.

3.2.1 Тела Пуансо (Правильные звездчатые многогранники).

Правильные звездчатые многогранники, называемые *телами Пуансо*. В этих *многогранниках* либо грани пересекают друг друга, либо сами грани самопересекающиеся многогранники. *Кеплер* первым начал изучать так называемые звездчатые многогранники, которые в отличие от Платоновых и Архимедовых тел являются правильными выпуклыми многогранниками. В начале прошлого столетия французский математик и механик *Л. Пуансо* (1777-1859), геометрические работы которого относятся к звездчатым многогранникам, в развитие работ Кеплера открыл существование еще двух видов правильных невыпуклых многогранников. Благодаря работам *Кеплера и Пуансо* стали известными четыре типа таких фигур (рисунок 19).

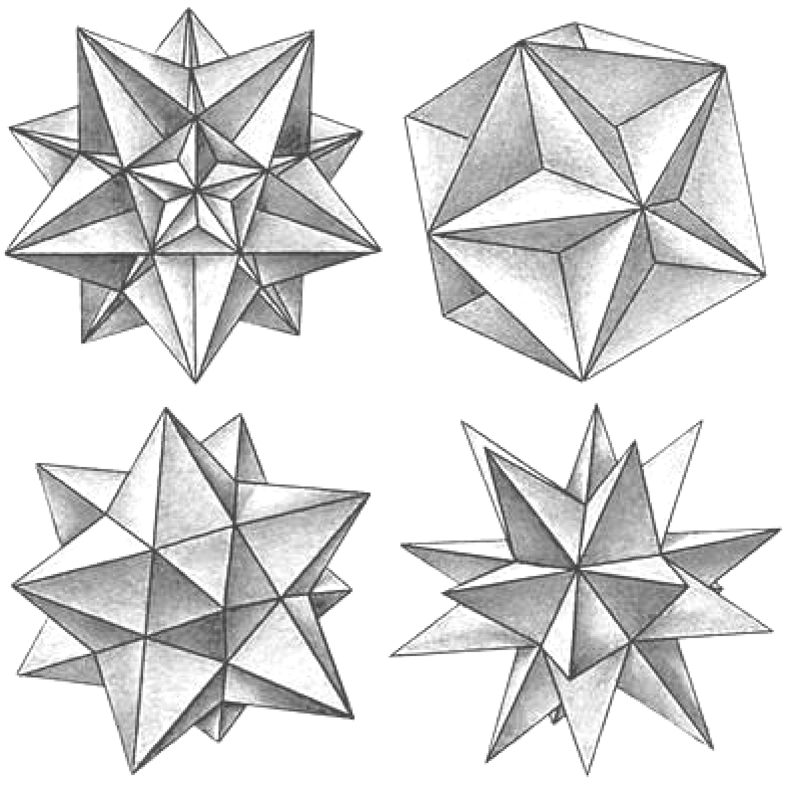


Рис. 19. Тела Пуансо.

Большой икосаэдр.

Икосаэдр имеет двадцать граней. Если каждую из них продолжить неограниченно, то тело будет окружено великим многообразием отсеков – частей пространства, ограниченных плоскостями граней. Все звездчатые формы икосаэдра можно получить добавлением к исходному телу таких отсеков. Не считая самого икосаэдра, продолжения его граней отделяют от пространства 20+30+60+20+60+120+ 12+30+60+60 отсеков десяти различных форм и размеров (рисунок 20).

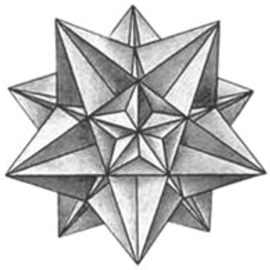


Рис. 20.

Додекаэдр имеет 3 звёздчатые формы: *малый звёздчатый додекаэдр, большой додекаэдр, большой звёздчатый додекаэдр (звёздчатый большой додекаэдр, завершающая форма).*

Первая форма. *Малый звездчатый додекаэдр.*

Двенадцать пирамид, надстроенных над каждой из граней исходного додекаэдра, создают пространственную звезду (рисунок 21).

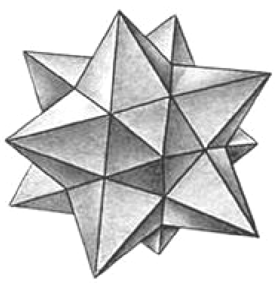


Рис. 21.

Вторая форма. *Большой додекаэдр.*

Грани большого звездчатого додекаэдра – пентаграммы, как и у малого звездчатого додекаэдра. У каждой вершины соединяются три грани. С одной стороны можно представлять себе этот многогранник икосаэдром, у которого грани выполнены в виде утопленных внутрь треугольных чаш. С другой стороны можно отчетливо разглядеть выступающие звезды на плоских пятиугольниках (рисунок 22).

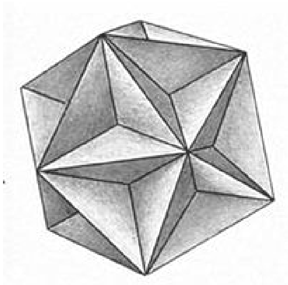


Рис. 22.

Третья форма. Большой звёздчатый додекаэдр.

Третья форма получается, если на грани икосаэдра поместить длинные иглы треугольных пирамид (рисунок 23).

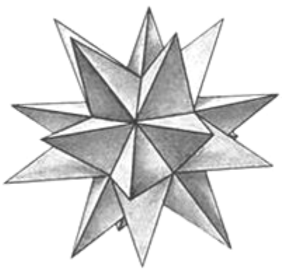


Рис. 23.

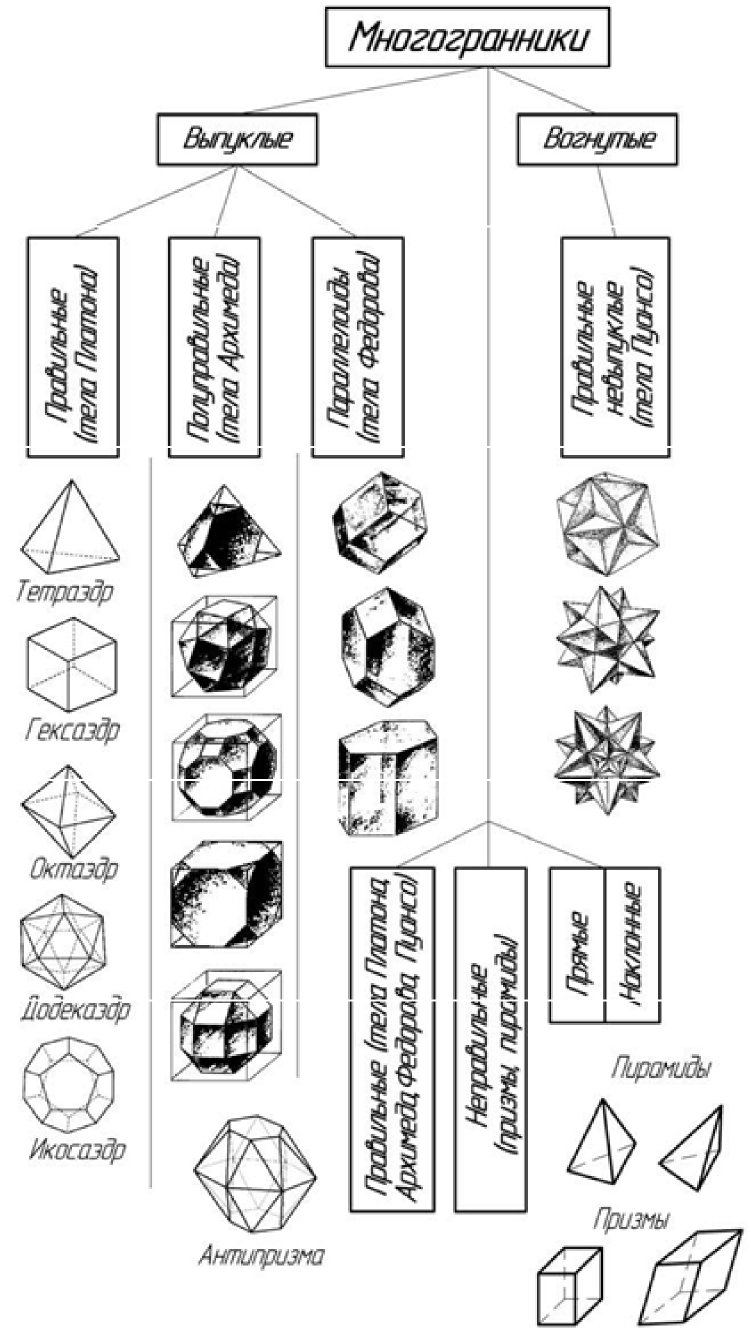


Рис. 24. Классификация многогранников.
(Е. М. Кирин, Н. А. Базыкина, А. Н. Вантеев М. Н. Краснов)

4. Построение сложных многогранных поверхностей

Построение ортогональных проекций сложных многогранных поверхностей значительно упрощается, если эту поверхность представить как два (или несколько) пересекающихся многогранника.

Линия пересечения поверхностей двух многогранников будет иметь форму ломаной прямой. Она может быть *плоской* или *пространственной замкнутой* линией. Иногда линия пересечения может быть *незамкнутой.* Если многогранные поверхности представляются как сквозное пересечение одного многогранника другим, то замкнутых линий пересечения получится две (на входе одного объекта в другой и на выходе из него).

Конструкция линии пересечения определяется характером пересечения многогранников.

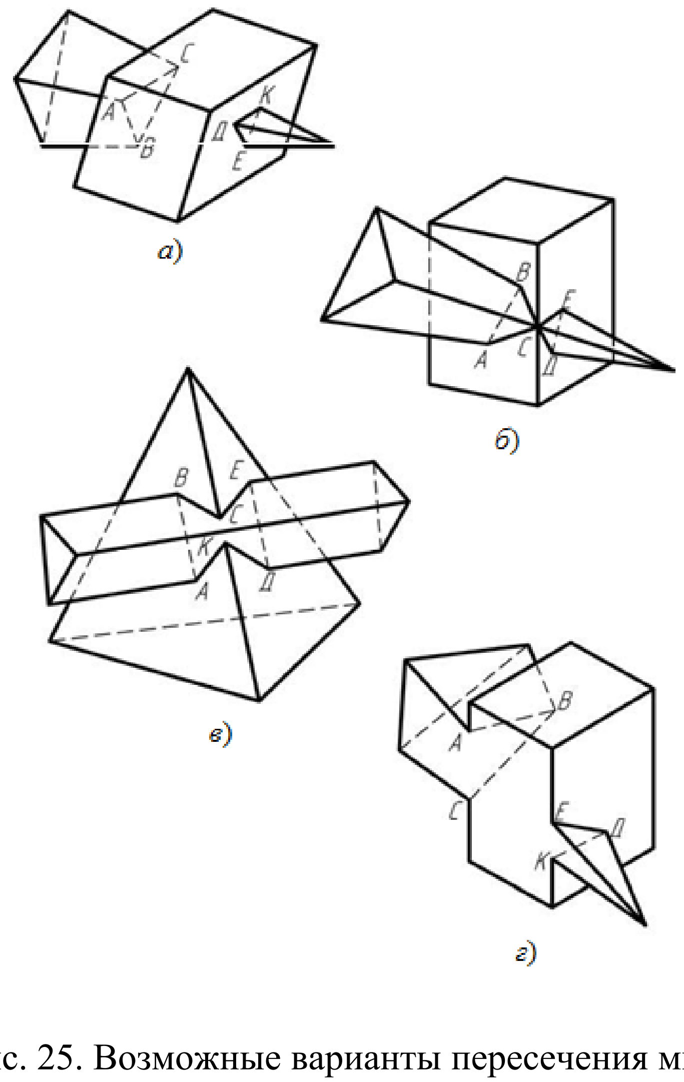


Рис. 25. Возможные варианты пересечения многогранников:

а полное; *б* полное с касанием ребер; *в* неполное; *г* неполное с касанием граней.

Пересечение многогранников может быть *полным, полным с касанием ребер, неполным и не полным с касанием рёбер* (рисунок 25).

При полном пересечении (рисунок 25,*а*) линия пересечения распадается на две линии *ABC* и *EDK*, причем эти линии могут быть как плоскими, так и пространственными.

При неполном пересечении (рисунок 5,*в*) линия пересечения представляет собой замкнутую, как правило, пространственную линию. Возможно также полное пересечение с касанием ребер или граней (рисунок 25,*б* и 25,*г*).

При полном пересечении с касанием рёбер линия пересечения имеет одну общую точку *С*.

При неполном пересечении с касанием рёбер линия пересечения замыкается на четыре точки пересекающихся ребер совпадающих граней (точки *A*, *C*, *E*, *K*).

На рисунке 5 линия пересечения определяется точками пересечения ребер одного многогранника с гранями (или ребрами) другого или линиями пересечения граней одного многогранника с гранями (или ребрами) другого. В связи с этим линию пересечения можно построить также методом ребер или методом граней, как и в случае построения сечения многогранников.

4.1 Построение линий пересечения двух многогранников, если один из них находится в частном положении.

Рассмотрим последовательность построения линий пересечения треугольной призмы с треугольной пирамидой (рисунок 26).

1. На горизонтальной проекции найти точки пересечения ребра *S’C’* пирамиды с ребром *K’L’* призмы. Ребро *S’C’* пересекает ребро *K’L* в точке *3’*.

2. Из точки *3’* на фронтальную плоскость провести проекционные линии связи до пересечения с ребром *S’’C’’* , точку пересечения обозначить точкой *3’’*.

3. На горизонтальной проекции найти точки пересечения ребра *S’C’* пирамиды с ребром *K’M’* призмы. Ребро *S’C’* пересекает ребро *K’M’* в точке *4’*.

4. Из точки *4’* на фронтальную плоскость провести проекционные линии связи до пересечения с ребром *S’’C’’* , точку пересечения обозначить точкой *4’’*.

5. На горизонтальной проекции найти точки пересечения ребра *S’A’* пирамиды с ребром *K’L’* призмы. Ребро *S’A’* пересекает ребро *K’L’* в точке *2’*.

6. Из точки *2’* на фронтальную плоскость провести проекционные линии связи до пересечения с ребром *S’’A’’*, точку пересечения обозначить точкой 2*’’*.

7. На горизонтальной проекции найти точки пересечения ребра *S’A’* пирамиды с ребром *L’M’* призмы. Ребро *S’A’* пересекает ребро *L’M’* в точке *7’*.

8. Из точки *7’* на фронтальную плоскость провести проекционные линии связи до пересечения с ребром *S’’A’’*, точку пересечения обозначить точкой *7’’*.

9. На горизонтальной проекции найти точки пересечения ребра *S’B’* пирамиды с ребром *K’L’* призмы. Ребро *S’B’* пересекает рёбро *K’L’* точке *1’*.

10. Из точки *1’* на фронтальную плоскость провести проекционные линии связи до пересечения с ребром *S’’B’’*, точку пересечения обозначить точкой *1’’*

11. На горизонтальной проекции найти точки пересечения ребра *S'B'* пирамиды с ребром *L'M'* призмы. Ребро *S'B'* пересекает рёбро *L'M'* точке *8'*.

12. Из точки *8'* на фронтальную плоскость провести проекционные линии связи до пересечения с ребром *S''B''*, точку пересечения обозначить точкой *8''*.

13. Ввести горизонтально проецирующую плоскость a, проходящую через вершину *S'* пирамиды и ребро *N'M'* призмы.

14. Вспомогательная плоскость пересекает пирамиду по линии *S'P'*.

15. Из точки *P'* на фронтальную плоскость провести проекционную линию связи до пересечения с ребром *B''C''* пирамиды, точку пересечения обозначить точкой *P''*.

16. Вспомогательная плоскость пересекает пирамиду по линии *S'Q'*.

17. Из точки *Q'* на фронтальную плоскость провести проекционную линию связи до пересечения с ребром *A''C''* пирамиды, точку пересечения обозначить точкой *Q''*.

18. Линия *S''Q''* пересекает ребро *M''* призмы в точке *5''*.

19. Линия *S''P''* пересекает ребро *M'* призмы в точке *6''*.

20. Соединить точки *1''2''3''1''* и *8''7''5''4''6''8''* и получить две линии, которые будут являться линиями пересечения. Линия *1''2''3''1''* – плоская, линия *8''7''5''4''6''8''*- пространственная. Обе линии замкнутые.

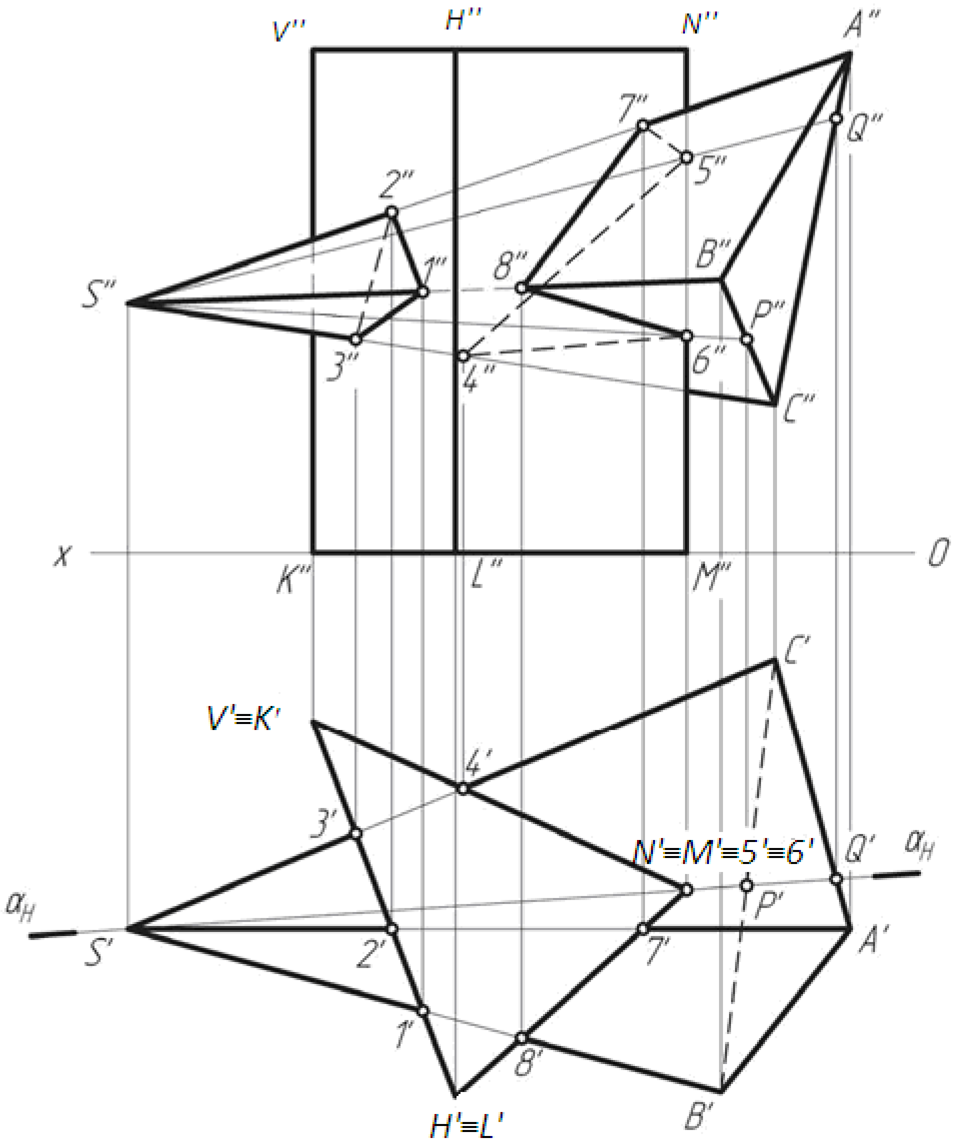


Рис. 26. Построение линий пересечения двух многогранников, один из которых находится в частном положении.

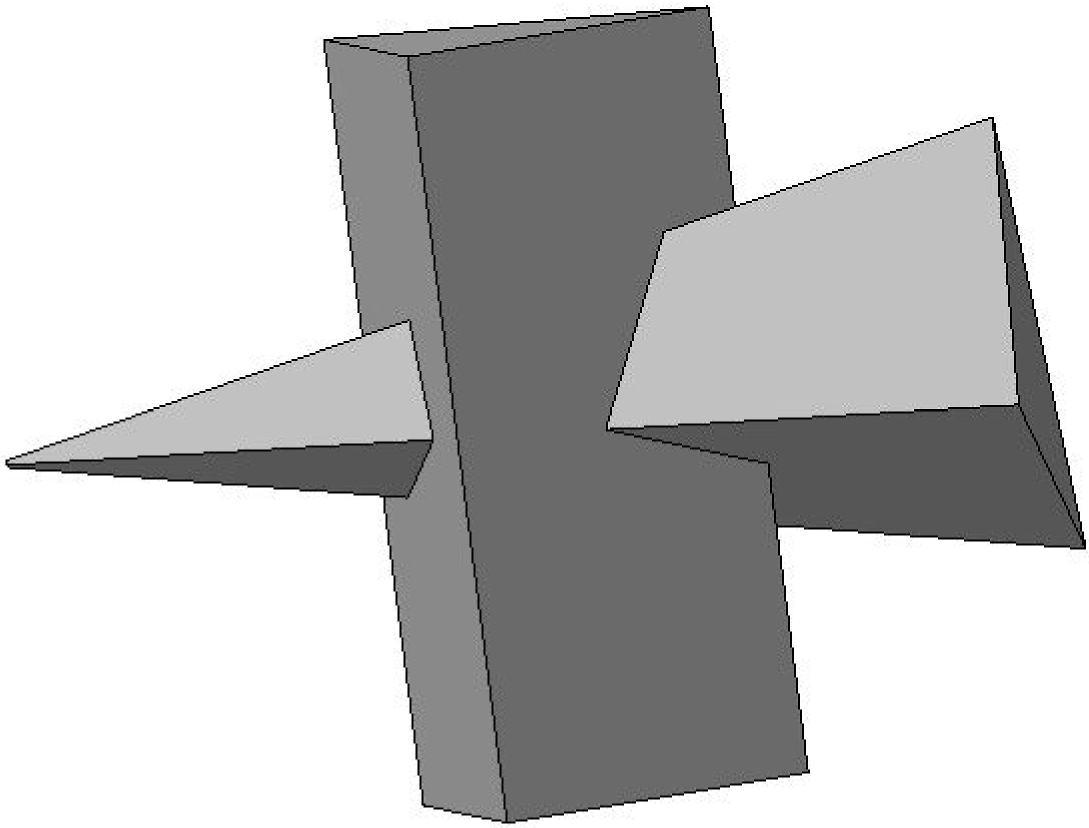


Рис. 27. 3D модель пересечения двух многогранников, если один из них находится в частном положении.

4.2 Построение линии пересечения двух многогранников общего положения.

Рассмотрим последовательность построения линий пересечения треугольной призмы и треугольной пирамиды (рисунок 28).

1. Провести вспомогательную плоскость *a* через ребро *S''A''*. Плоскость *a* рассекает призму, в сечении призмы получается треугольник *K''L''M''*.
2. Из точки *K''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *E'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *K'*.

3. Из точки *L''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *F'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *L'*.

4. Из точки *M''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *D'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *M'*.

5. Найти общие точки пересечения ребра *S'A'* пирамиды и контура треугольника *K'L'M'* .

6. Ребро *S'A'* пирамиды пресекает линию *K'M'* в точке *1'*.

7. Ребро *S'A'* пирамиды пресекает линию *L'M'* в точке *4'*.

8. Провести вспомогательную плоскость *ß* через ребро *S''C''*. Плоскость ß рассекает призму, в сечении призмы получается треугольник *Y''Q''G''*.

9. Из точки *Y''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *E'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *Y'*.

10. Из точки *Q''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *F'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *Q'*.

11. Из точки *G''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *D'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *G'*.

12. Найти общие точки пересечения ребра *S'C'* пирамиды и контура треугольника *Y'Q'G'*.

13. Ребро *S'C'* пирамиды пресекает линию *Y'G'* в точке *3'*.

14. Ребро *S'C'* пирамиды пресекает линию *Q'G'* в точке *6'*.

15. Провести вспомогательную плоскость ω через ребро *S''B''*. Плоскость ω рассекает призму, в сечении призмы получается треугольник *T''R''P''*.

16. Из точки *T''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *E'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *T'*.

17. Из точки *R''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *F'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *R'*.

18. Из точки *P''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с гранью *D'* призмы. Точку пересечения обозначить точкой *P'*.

19. Найти общие точки пересечения ребра *S'B'* пирамиды и контура треугольника *T'R'P'*.

20. Ребро *S'B'* пирамиды пресекает линию *T'P'* в точке *2'*.

21. Ребро *S'B'* пирамиды пресекает линию *T'R'* в точке *8'*.

22. Провести вспомогательную плоскость δ через ребро *F''F''*.

Плоскость δ рассекает пирамиду, в сечении пирамиды получается треугольник *V''H''N''*.

23. Из точки *V''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с рёбром *S'A'* пирамиды. Точку пересечения обозначить точками *V'*.

24. Из точки *H''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с рёбром *S'B'* пирамиды. Точку пересечения обозначить точками *H'*.

25. Из точки *N''* на горизонтальную плоскость опустить проекционную линию связи до пересечения с рёбром *S'C'* пирамиды. Точку пересечения обозначить точками *N'*.

26. Найти общие точки пересечения грани *F'* призмы и контура треугольника и контура треугольника *V'H'N'*.

27. Грань *F'* пересекает линию *V'N'* в точке *5'*.

28. Грань *F'* пересекает линию *H'N'* в точке *7'*.

29. Соединить полученные точки *1, 2 и 3*, которые образуют первую линию пересечения. Линия *1231* – плоская.

30. Соединить полученные точки *4, 5, 6, 7 и 8*, которые образуют вторую линию пересечения. Линия *456784* – пространственная.

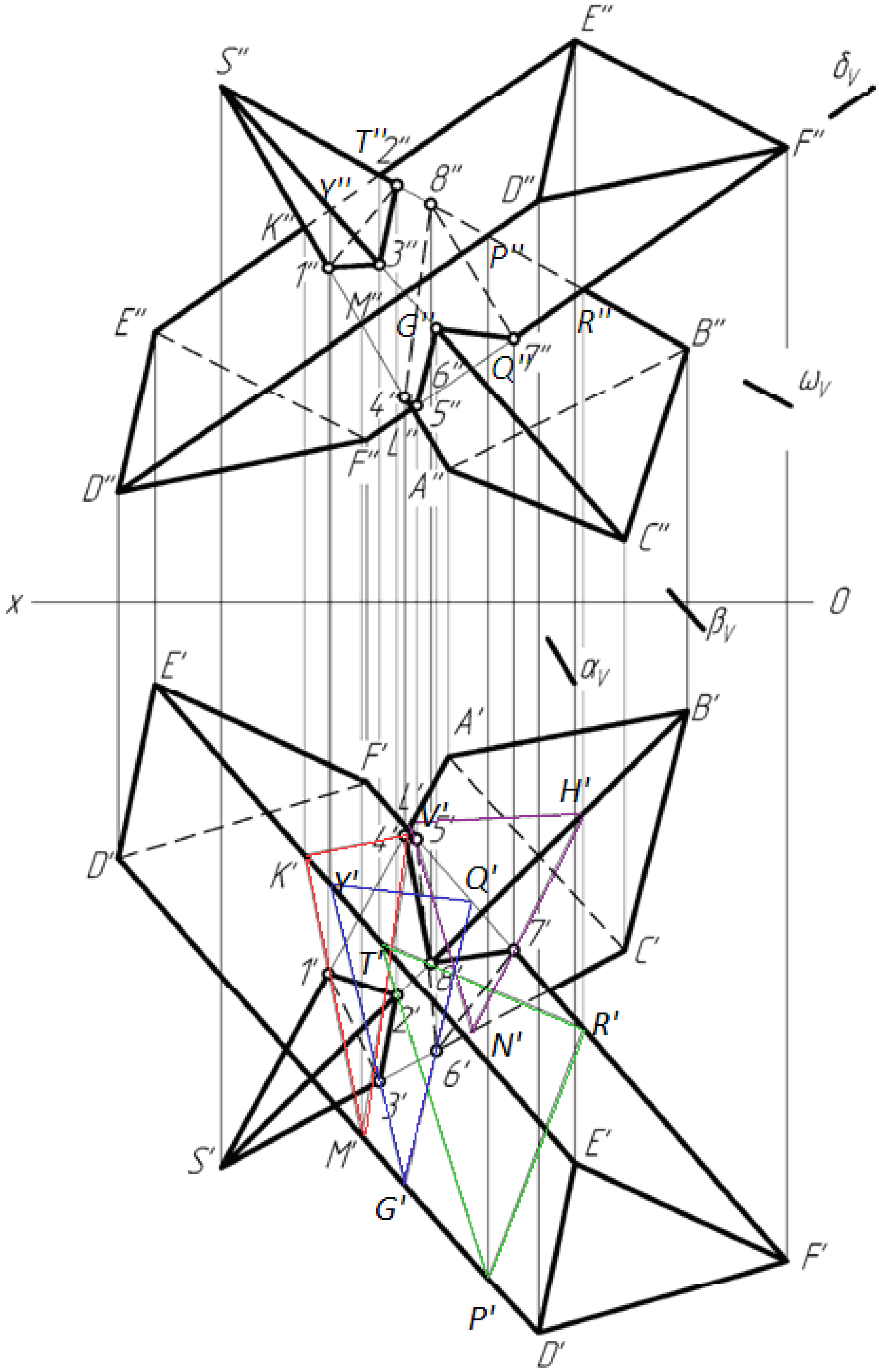


Рис. 28. Построение линии пересечения двух многогранников общего положения.

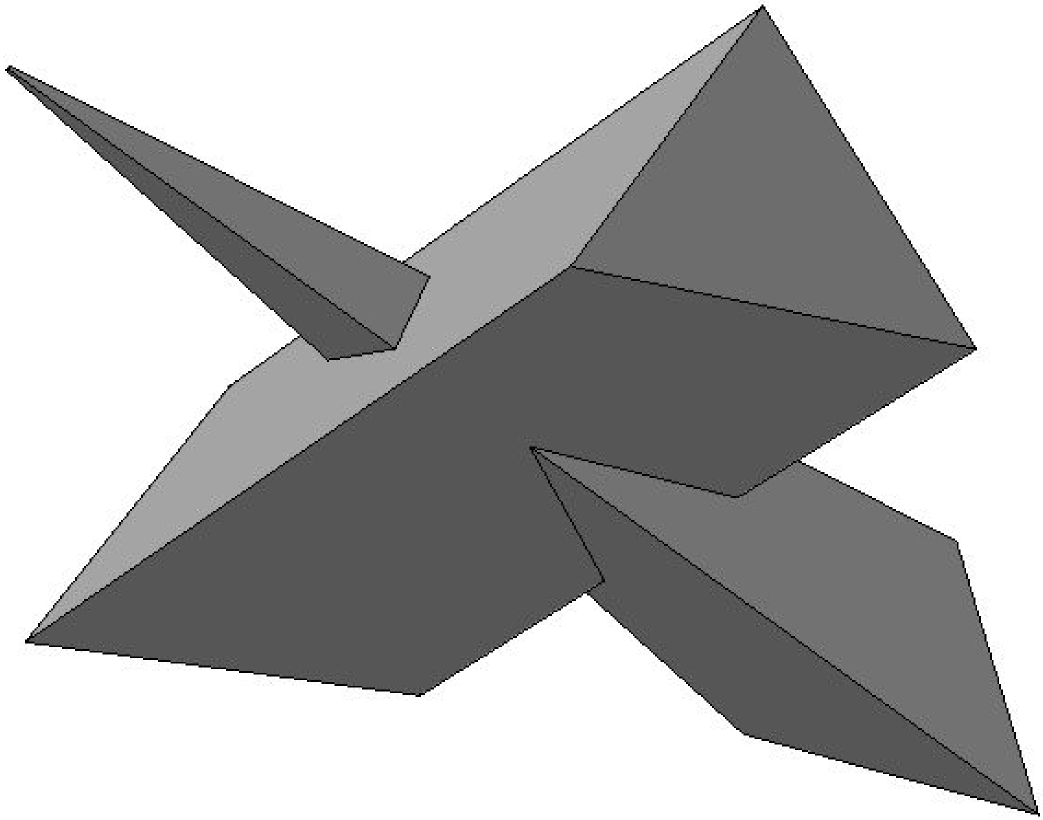


Рис. 29. 3D модель пересечения двух многогранников общего положения.

5. Вопросы для самопроверки

1. Назовите характеристики правильных многогранников.
2. Перечислите правильные многогранники.
3. Назовите особенности многогранников, называемых телами Архимеда?
4. В чем отличие выпуклых и вогнутых многогранников?
5. Перечислите вогнутые звезчатые многогранники.
6. Назовите варианты взаимного пересечения многогранников.

5. Библиографический список

1. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. М.: Наука, 2000. -270 с., ил.
2. Кузнецов, Н.С. Начертательная геометрия. - М., 1981. — 262 с., ил.

Инженерная графика: Учебник/А.И. Лагерь. — 2-е изд.. перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 2003.— 270 с., ил.

3. Фролов, С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. М. : Машиностроение, 2000. –238с.
4. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия. М.: Высш. шк., 1987. – 400 с., ил.
5. Погорелов, А. В. Элементарная геометрия. М.: Изд. «Наука», 1972. - 208 с., ил.
6. Информационно-образовательный ресурс Эвенкии. Многогранники. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://tvsh2004.narod.ru/gm04.html
7. Е. М. Кирин, Н. А. Базыкина, А. Н. Вантеев М. Н. Краснов. Построение сечений и линий пересечения поверхностей [Электронный ресурс]: Методическое пособие. П63 метод. указания. Пенза: Изд-во ПГУ, 2011. 64 с. - Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/974/74974/files/postroenie_secheni.pdf