



УДК: 530.182

MSC 2010: 37B20, 37C45, 37L30

## Время возврата Пуанкаре и локальная размерность хаотических аттракторов

В. С. Анищенко, Н. И. Бирюкова, С. В. Астахов, Я. И. Боев

С помощью численного анализа среднего времени возврата в  $\varepsilon$ -окрестность выбранной точки хаотического аттрактора вводится определение локальной фрактальной размерности. Исследуется одномерное отображение Фейгенбаума, а также отображения Лози и Эно. Показано, что для квазигиперболического аттрактора Лози локальная размерность слабо зависит от точки на аттракторе и близка к фрактальной размерности аттрактора. Для квазиаттракторов в системах Эно и Фейгенбаума локальная размерность существенно зависит от рассматриваемой области аттрактора и даже от размера  $\varepsilon$ -окрестности рассматриваемой точки на аттракторе. Причиной является неоднородность структуры квазиаттрактора, типичная для негиперболических хаотических аттракторов.

Ключевые слова: возвраты Пуанкаре, размерность аттрактора

### Введение

Большое количество реальных систем (физических, химических, биологических и т. д.) имеют автоколебательную природу. Одним из наиболее естественных свойств автоколеба-

---

Получено 4 мая 2012 года

После доработки 13 июня 2012 года

---

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральных целевых программ (гос. контракт № 14.740.11.0074 и гос. контракт № 12.740.11.1182).

---

Анищенко Вадим Семенович  
[wadim@info.sgu.ru](mailto:wadim@info.sgu.ru)

Бирюкова Надежда Игоревна  
[harbour2006@mail.ru](mailto:harbour2006@mail.ru)

Астахов Сергей Владимирович  
[s.v.astakhov@gmail.com](mailto:s.v.astakhov@gmail.com)

Боев Ярослав Игоревич  
[boev.yaroslav@gmail.com](mailto:boev.yaroslav@gmail.com)

Международный НИИ нелинейной динамики  
Саратовского государственного университета  
410026, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, 89

тельных систем со сложной динамикой представляется возвращаемость системы в окрестность некоторого состояния на аттракторе, называемая возвратом Пуанкаре [1, 2, 15]. Различают локальный и глобальный подходы к определению времени возврата Пуанкаре. В рамках локального подхода [1] выбирается окрестность  $\varepsilon$  некоторой точки  $x_0$  аттрактора и временем возврата Пуанкаре считают время, за которое траектория, покинув данную окрестность, вернется в нее первый раз. Для хаотических систем данная величина является случайной и ее статистические характеристики зависят от режима функционирования динамической системы. Имеет смысл рассматривать среднее время возврата Пуанкаре

$$\langle \tau(x_0, \varepsilon) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i, \quad (1)$$

где  $\tau_i$  — это время первого возврата траектории, стартовавшей из  $i$ -й точки, принадлежащей  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0$ . Исходя из эргодичности хаотических систем, можно вычислять среднее время локального возврата Пуанкаре, усреднив  $N$  времен последовательных возвратов траектории, стартовавшей из одной точки [3, 4]. Доказано [1], что среднее время возврата в область  $\varepsilon$  (1) определяется вероятностью (теорема Каца):

$$\langle \tau_r(x_0, \varepsilon) \rangle = \frac{\gamma}{P(x_0, \varepsilon)}, \quad \gamma = \text{const}. \quad (2)$$

Также показано [3, 4], что данное соотношение выполняется и для зашумленных систем.

В рамках глобального подхода [3] производится разбиение всего аттрактора на  $M$  ячеек размером  $\varepsilon$  и в каждой ячейке выбирается множество начальных условий. Для каждой траектории, стартовавшей с начальных условий из данного множества, вычисляется время ее первого возврата в ячейку, откуда она стартовала. Из полученного множества времен возвратов выбирается наименьшее значение  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ . Затем производится усреднение данной величины по всем ячейкам [2, 5]

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \tau_{\text{inf}}, \quad j(\varepsilon), \quad (3)$$

где  $j$  — это номер ячейки.

В настоящей работе мы ограничимся локальным подходом на основе теоремы Каца (2). Для однородных множеств, которые характеризуются гладким распределением вероятностной меры, зависимость времен возврата от величины  $\varepsilon$  в соответствии с (2) не представляет сложностей при практических исследованиях. Однако фрактальная структура множеств, характерная для хаотических квазиаттракторов, приводит к ряду проблем. Попытаемся дать этому простое объяснение.

Перепишем выражение для вероятности в (2) в следующем виде:

$$P(\vec{x}_0, \varepsilon) = \int_{x_1 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_1 + \frac{\varepsilon}{2}} \dots \int_{x_d - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_d + \frac{\varepsilon}{2}} p(x_1, \dots, x_d) dx_1, \dots, dx_d, \quad (4)$$

где  $p(x_1, \dots, x_d)$  —  $d$ -мерная плотность распределения на аттракторе,  $d$  — размерность фазового пространства системы. Не теряя общности, в дальнейшем рассмотрим системы раз-

мерности  $d = 2$ . В случае  $d = 2$  положим  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  и перепишем (4) в форме

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) = \int_{x_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} \int_{y_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{y_0 + \frac{\varepsilon}{2}} p(x, y) dx dy. \quad (5)$$

Здесь  $x_0, y_0$  — выбранная точка аттрактора, которая находится в центре квадрата со стороной  $\varepsilon \ll 1$ . Если  $p(x, y)$  достаточно гладкая функция, то в силу теоремы о среднем мы можем записать

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) = p(x_0, y_0)\varepsilon^d, \quad (6)$$

где  $d$  — размерность фазового пространства (в данном случае  $d = 2$ ).

Если  $p(x, y)$  сложная функция, определяемая на фрактальном множестве, то выражение (6) не будет справедливым и мы полагаем, что в этом случае можно записать [6, 7]

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) \approx p(x_0, y_0)\varepsilon^{d_f}, \quad (7)$$

где  $d_f$  — фрактальная размерность хаотического подмножества, включенного в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $(x_0, y_0)$ . Эту размерность  $d_f$  мы будем называть локальной размерностью аттрактора системы в  $\varepsilon$ -окрестности точки с координатами  $(x_0, y_0)$ .

Из выражения (7), если его подставить в (2), следует

$$\langle \tau_r(x_0, y_0, \varepsilon) \rangle \approx \frac{\gamma}{p(x_0, y_0)} \varepsilon^{-d_f}. \quad (8)$$

Если взять  $\ln \langle \tau_r(x_0, y_0, \varepsilon) \rangle$ , то получим

$$\ln \langle \tau_r(x_0, y_0, \varepsilon) \rangle \approx C - d_f \ln \varepsilon, \quad (9)$$

где  $C = \ln(\gamma/p(x_0, y_0))$ .

График зависимости (9) представляет собой прямую на плоскости  $(\ln \tau_r, \ln \varepsilon)$  с наклоном  $d_f$ , сдвинутую вертикально относительно нуля координат на постоянную  $C$ . Это дает возможность численно определить  $d_f$  по результатам расчетов зависимости среднего времени возврата  $\langle \tau_r \rangle$  от размера  $\varepsilon$ -ячейки. В силу теоремы Каца и выражений (6), (7), необходимо выполнение требования малости  $\varepsilon \ll 1$ .

## 1. Локальная размерность для аттракторов логистического отображения

Рассмотрим простейший пример одномерного хаотического отображения

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n). \quad (10)$$

При  $\lambda = 4$  отображение (10) характеризуется гладкой функцией для вероятностной меры  $p(x)$ , которая может быть записана в аналитической форме [8]:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}. \quad (11)$$

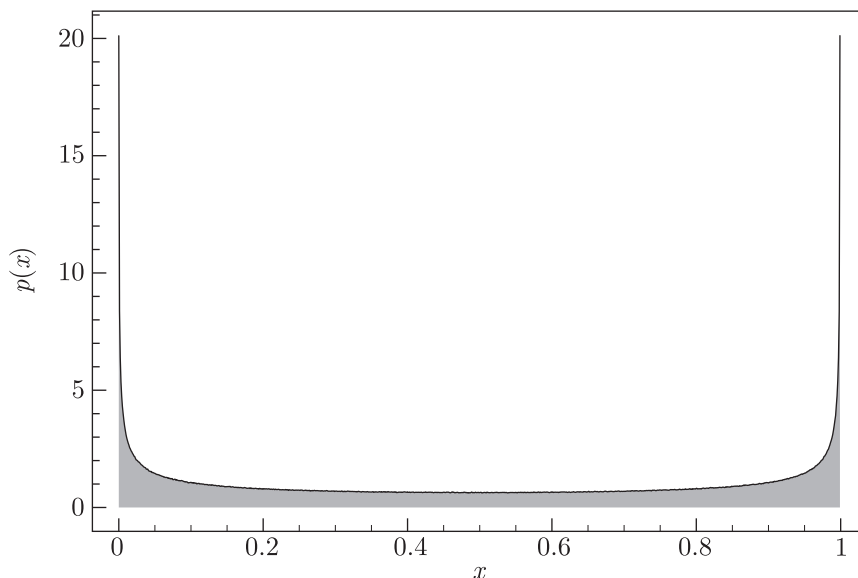


Рис. 1. Плотность распределения  $p(x)$  отображения (10) для значения параметра  $\lambda = 4$  ( $D = 0$ ).

График  $p(x)$  для системы (10), рассчитанный для  $\lambda = 4$  и представленный на рисунке 1, полностью соответствует теории (11).

В силу гладкости функции  $p(x)$  выражение (9) мы можем переписать в виде

$$\ln \langle \tau_r(x_0, \varepsilon) \rangle = C - 1 \cdot \ln \varepsilon, \quad (12)$$

то есть зависимость (12) должна быть прямой с наклоном  $-1$ . Расчеты представлены на рисунке 2 и подтверждают это.

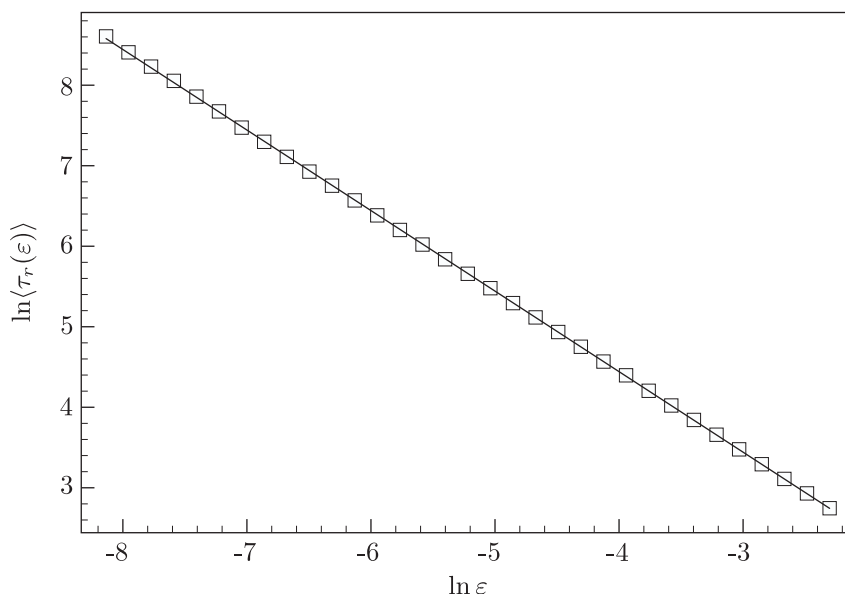


Рис. 2. Зависимость (12) получена численно для  $\lambda = 4$  в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0 = 0.562$  ( $D = 0$ ).

Линейная аппроксимация данных вычислений (рис. 2) дает значение коэффициента наклона  $d_f = 1.0003$ . В силу гладкости функции  $p(x)$  (рис. 1) величина наклона в экспе-

риментах с точностью до ошибки вычислений не зависит от значений  $x_0$  во всей области определения  $0 \leq x \leq 1$ .

С уменьшением величины параметра  $\lambda < 4$  структура вероятностной меры существенно изменится. Плотность  $p(x)$  становится негладкой, приобретая фрактальные свойства. В качестве примера рассмотрим значение  $\lambda = 3.8$  и рассчитаем плотность  $p(x)$ . Данные расчетов представлены на рисунке 3, из которого видно, что будет справедливо выражение (9) с  $d_f < 1$ , о чем свидетельствуют данные рисунка 4.

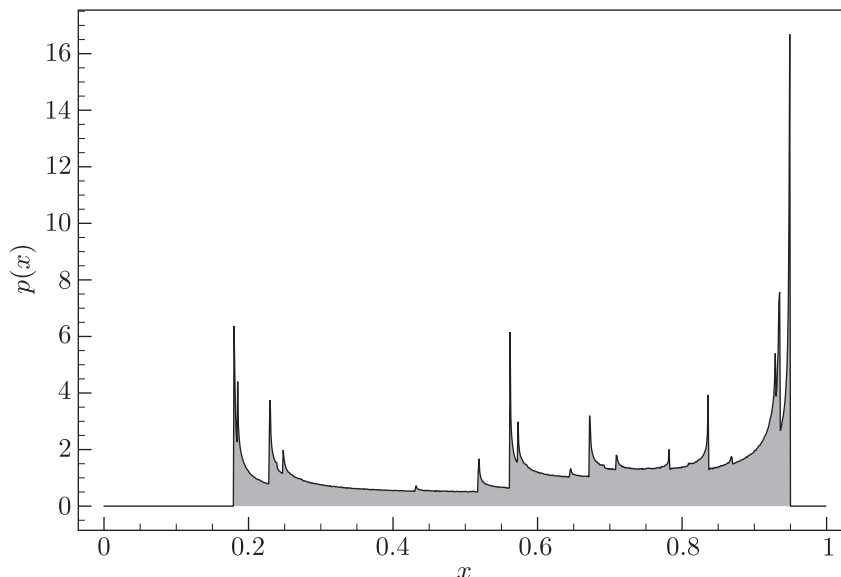


Рис. 3. Результаты расчетов  $p(x)$  отображения (13) для значения  $\lambda = 3.8$  ( $D = 0$ ).

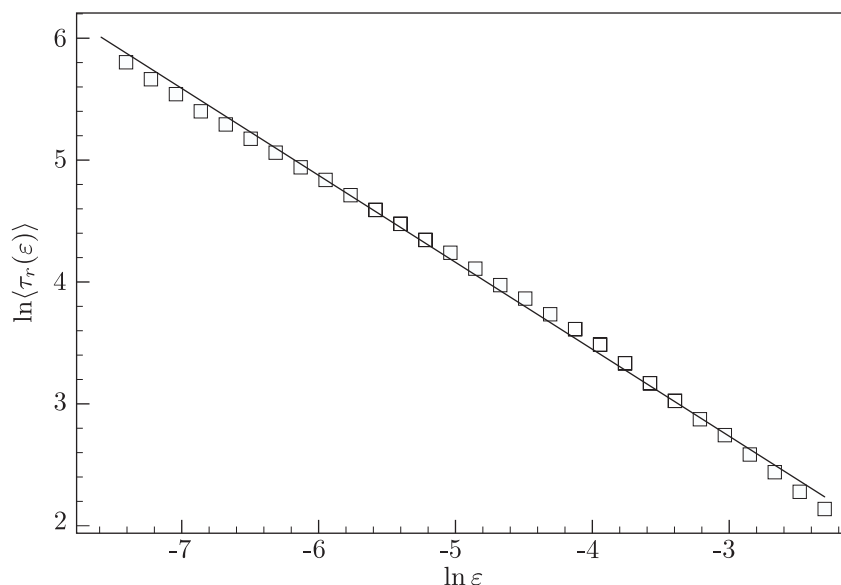


Рис. 4. Расчет зависимости среднего времени возврата  $\langle \tau_r \rangle$  от величины  $\epsilon$  для  $\lambda = 3.8$  в  $\epsilon$ -окрестность точки  $x_0 = 0.562$ , наклон соответствует  $d_f = 0.71$  ( $D = 0$ ).

Отметим, что в силу сложности функции  $p(x)$  (рис. 3) величина  $d_f$  существенно зависит от выбора точки  $x_0$  и меняется в пределах  $0.6 \leq d_f \leq 0.9$ , но остается меньше единицы.

Естественно предположить, что в условиях действия внешнего шума плотность распределения  $p(x)$  будет сглаживаться. Это должно привести к тому, что значение  $d_f$  будет близко к единице. На рисунке 5 представлены результаты, которые подтверждают сказанное.

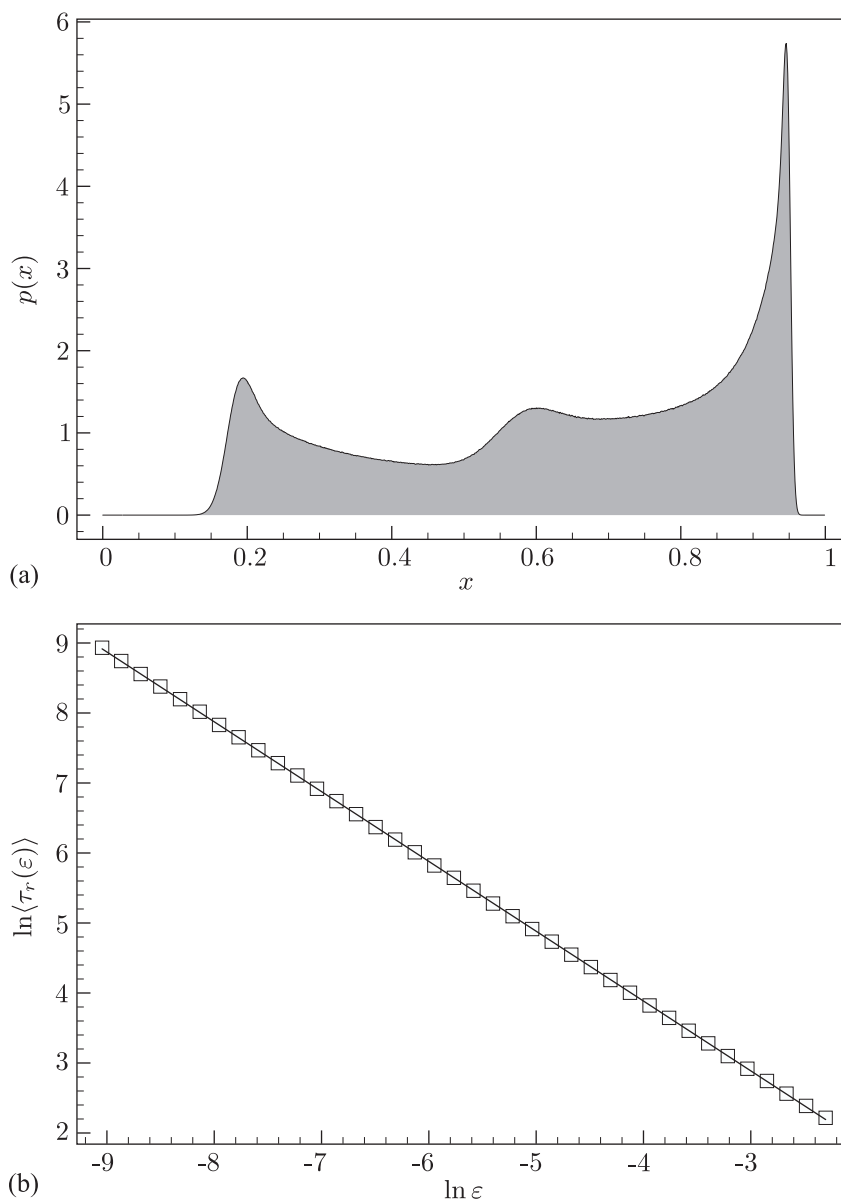


Рис. 5. Плотность распределения  $p(x)$  (а) и время возврата Пуанкаре (б) для зашумленной системы (13) для  $\lambda = 3.8$ ,  $x_0 = 0.562$  и  $D = 10^{-5}$ .

Шум  $\xi(n)$  вводился в систему (10) аддитивно

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) + \sqrt{2D}\xi_n. \quad (13)$$

Здесь  $D$  — параметр, определяющий интенсивность шумового воздействия,  $\xi(n)$  — источник гауссова шума.

Отметим, что в случае зашумленной системы (13) локальная размерность  $d_f$  действительно имеет величину, близкую к единице ( $d_f = 1.0 \pm 0.01$ ), и не зависит от выбранной

точки  $x_0$ . Так, для  $x_0 = 0.562$  она характеризуется величиной  $d_f = 0.9973$ , а для  $x_0 = 0.23$  — величиной  $d_f = 0.991$ .

## 2. Локальная размерность для аттракторов двумерных хаотических отображений

Логистическое отображение (10) является одномерным необратимым отображением отрезка в себя. Представляется важным и интересным исследовать двумерные хаотические аттракторы, которые характеризуются более сложной структурой вероятностной меры  $P(x, y)$ . Будут ли справедливы рассуждения о локальной размерности  $d_f$  в этом случае?

Вначале рассмотрим двумерное отображение Лози [9], которое является почти гиперболическим и, следовательно, характеризуется практически однородной структурой предельного хаотического множества:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha|x_n| + y_n + \sqrt{2D}\xi(n), \\ y_{n+1} &= \beta x_n, \end{aligned} \tag{14}$$

где положим  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ . Фазовый портрет аттрактора Лози приведен на рисунке 6. В силу сильного сжатия размерность аттрактора близка к единице. Оценкой величины  $d_f$  может послужить ляпуновская размерность, рассчитанная нами по формуле Каплана – Йорке [10, 11]:

$$D_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \approx 1.1, \tag{15}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — показатели спектра ЛХП системы (14) для аттрактора (рис. 6).

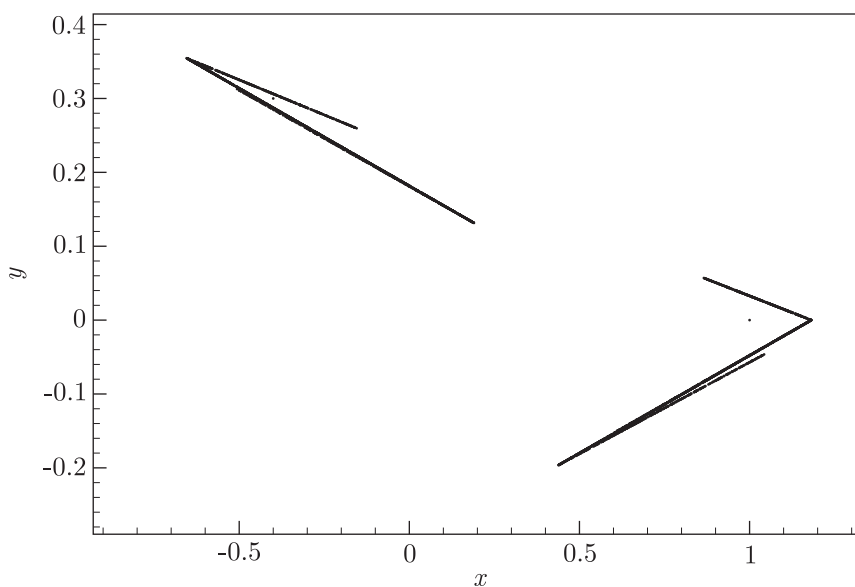


Рис. 6. Аттрактор в системе (14) при  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$  в отсутствие шума ( $D = 0$ ).

Были проведены расчеты, аналогичные представленным в разделе 1, которые подтвердили справедливость соотношения (9). На рисунке 7 представлены результаты, которые свидетельствуют, что в отсутствие шума локальная размерность  $d_f \approx 1.001$ , а при наличии

шума  $d_f \approx 1.98$ . В силу однородности аттрактора локальная размерность в пределе точности счета не зависит от выбранной точки на аттракторе при  $D = 0$ . Другими словами, локальную размерность можно трактовать как размерность аттрактора. При добавлении шума аттрактор «распухает» и становится двумерным с размерностью  $d_f \approx 2.0$ .

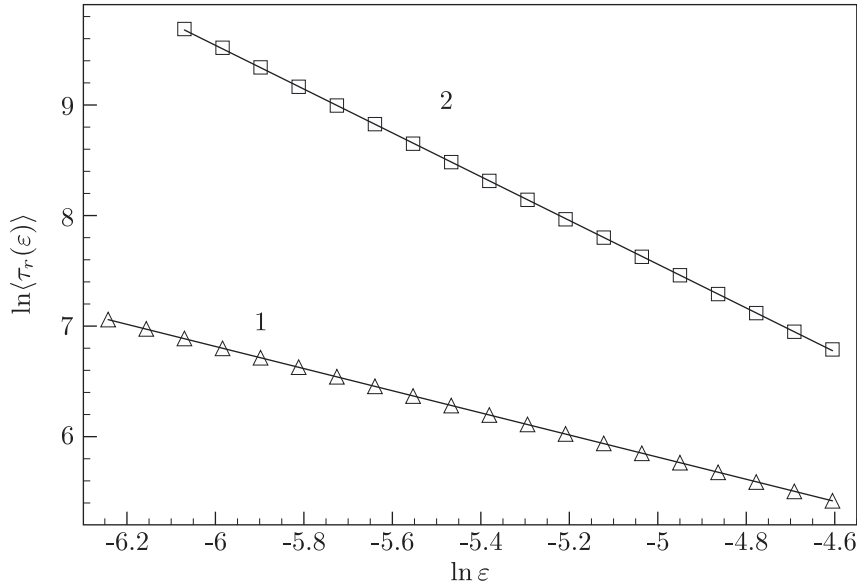


Рис. 7. Результаты расчетов зависимости (9) для аттрактора Лози в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0 = 0.1$ ,  $y_0 = 0.155$  в отсутствие шума ( $D = 0$ ) и при  $D = 5 \cdot 10^{-3}$  (графики 1 и 2 соответственно).

Рассмотрим локальную размерность в аттракторе системы Эно [12]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= \beta x_n, \end{aligned} \quad (16)$$

где зафиксируем значения параметров  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ . Аттрактор Эно представляет классический пример квазиаттрактора и характеризуется неоднородной структурой и фрактальной размерностью. На рисунке 8 приведен фазовый портрет аттрактора с указанием конкретных областей 1–7, для которых проводились расчеты локальной размерности.

Численные исследования показали, что для каждой из указанных областей величины  $d_f$  отличаются; подтвердился факт неоднородности структуры аттрактора. Более того, даже для конкретно выбранной области величина  $d_f$  оказывается зависящей от величины  $\varepsilon$ . Для иллюстрации приведем данные расчетов, проведенных для области 7, наиболее наглядно демонстрирующие сказанное.

Характерной особенностью зависимости  $\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle$  на рисунке 9 является то, что она содержит 4 линейных участка с различными наклонами. Это означает, что локальная размерность  $d_f$  меняется с изменением величины  $\varepsilon$ . Неоднородность структуры аттрактора настолько сильна, что  $d_f$  заметно изменяется при вариации  $\varepsilon$  в пределах  $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10^{-1}$ . При увеличении  $\varepsilon$  локальная размерность принимает следующие значения:  $d_f = 1.03$  ( $\varepsilon < 0.01$ ),  $d_f = 1.72$  ( $0.01 < \varepsilon < 0.04$ ),  $d_f = 0.38$  ( $0.04 < \varepsilon < 0.2$ ) и  $d_f = 0.87$  ( $\varepsilon > 0.2$ ). Отметим, что для почти гиперболического аттрактора Лози (рис. 7) этого эффекта не наблюдается (в силу однородности аттрактора).

В работе [7] представлены результаты аналогичных расчетов для отображения Эно, на основании которых автор делает вывод, что фрактальная размерность  $d_f \approx 1.26$  и сов-



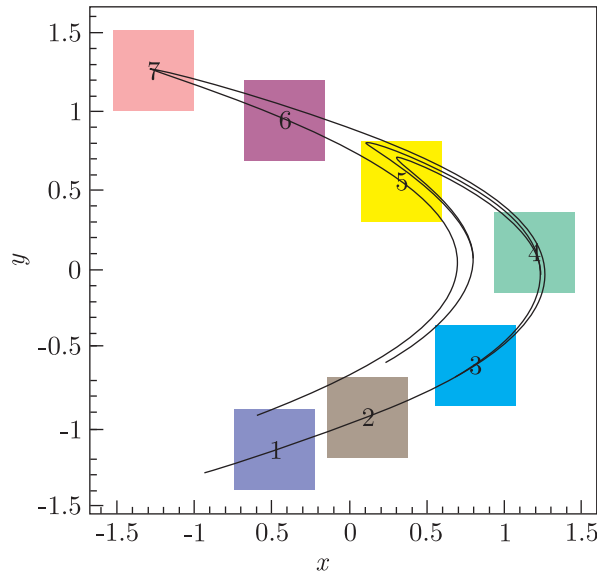


Рис. 8. Аттрактор системы Эно (16): 1–7 — области аттрактора, в которых выбиралось значение точки  $(x_0, y_0)$  для расчета локальной размерности  $d_f$ .

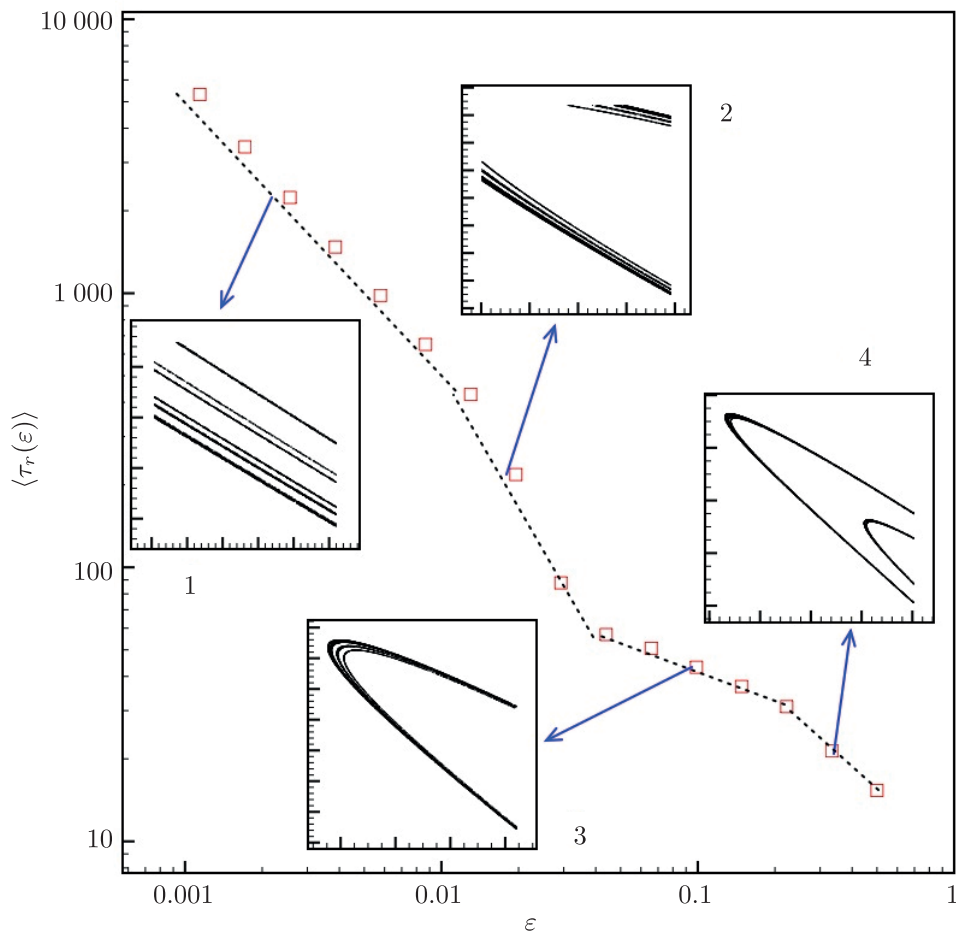


Рис. 9. Данные расчета зависимости  $\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle$  для области 7 (рис. 8). Вставки на рисунке показывают изменение локальной структуры аттрактора с изменением величины  $\varepsilon$ .

падает со значениями, полученными другими методами. Мы постарались найти область в аттракторе Эно, где этот результат имеет место. Расчеты представлены на рисунке 10.

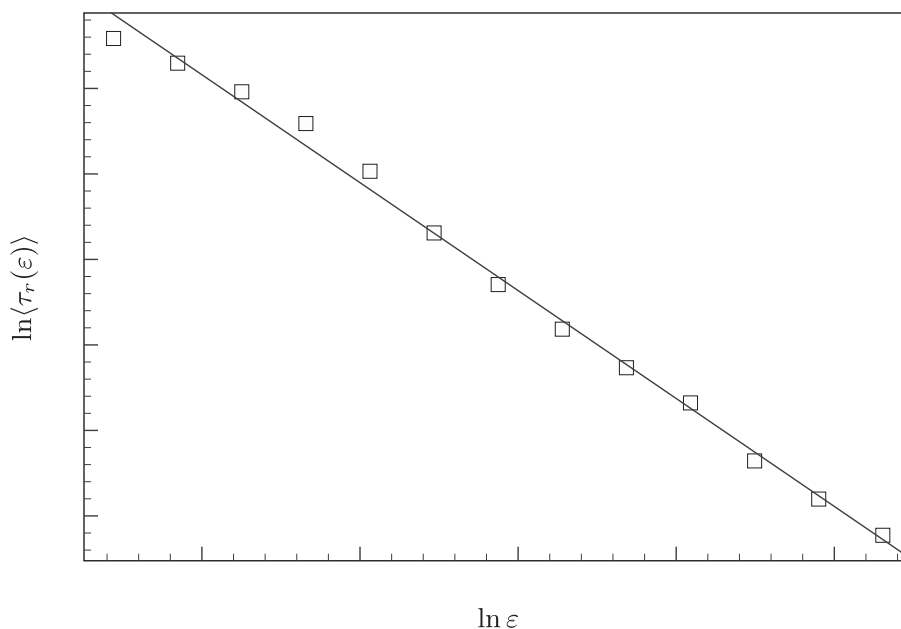


Рис. 10. Зависимость  $\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle$  для аттрактора Эно в области 3. Средний наклон графика соответствует значению  $d_f = 1.26$ .

Как видно из графика (рис. 10), его аппроксимация прямой линией во всем диапазоне изменений  $\varepsilon$  возможна лишь приблизительно. На графике явно можно выделить 4–5 участков, которые имеют отличающийся от среднего наклон. И даже в том случае, когда такое усреднение возможно, это свидетельствует лишь о том, что локальная размерность аттрактора в области 3 близка к размерности аттрактора в целом.

### 3. Обсуждение результатов и выводы

С точки зрения математики, основой настоящей статьи является численный метод оценки интеграла (4) от функции  $p(x)$ , определенной на фрактальном множестве. Если приближенное выражение (7) справедливо, то результатом является соотношение (8), позволяющее путем расчета средних времен возврата  $\langle \tau_r(x, \varepsilon) \rangle$  определить локальную фрактальную размерность  $d_f$  множества в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0$ . Из теории размерностей хорошо известно неравенство [13]

$$D_K \leq D_I \leq D_C. \quad (17)$$

где  $D_K$  — корреляционная размерность,  $D_I$  — информационная размерность,  $D_C$  — емкость по Колмогорову. В связи с тем, что строгое вычисление фрактальной размерности по Хаусдорфу для хаотических аттракторов практически невозможно, указанные выше размерности можно вычислить, и они используются для оценки хаусдорфовой размерности в экспериментах [13].

На примере модифицированного отображения Арнольда, аттрактор которого характеризуется емкостью по Колмогорову  $D_C = 2$ , нами было показано, что  $d_f < D_C$  [14].

Учитывая тот факт, что расчет величины  $d_f$  проводится на основе времени возврата Пуанкаре (8), которое связано с вероятностной мерой, мы склонны полагать, что получаемые с помощью (8) величины  $d_f$  соответствуют информационной размерности  $D_I$ , то есть  $d_f \approx D_I$  [7, 14].

По результатам работы следует вывод о том, что с помощью расчетов среднего времени возврата Пуанкаре в  $\varepsilon$ -окрестность заданной точки хаотического аттрактора можно получить величину локальной размерности в окрестности выбранной точки, которая близка к значению информационной размерности аттрактора.

## Список литературы

- [1] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 407 с.
- [2] Afraimovich V., Ugalde E., Urias J. Fractal dimension of Poincaré recurrences. (Monogr. Ser. on Nonlinear Sci. and Complexity, vol. 2.) Amsterdam: Elsevier, 2006. 258 pp. [Афраимович В., Угальде Э., Уриас Х. Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2011. 292 с.]
- [3] Анищенко В. С., Хайрулин М. Е. Влияние индуцированного шумом кризиса аттракторов на характеристики времен возврата Пуанкаре // Письма в ЖТФ, 2011, т. 37, с. 25–43.
- [4] Anishchenko V. S., Khairulin M., Strelkova G., Kurths J. Statistical characteristics of the Poincaré return times for a one-dimensional nonhyperbolic map // Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys., 2011, vol. 82, pp. 219–225.
- [5] Afraimovich V. S., Lin W.-W., Rulkov N. F. Fractal dimension for Poincaré recurrences as an indicator of synchronized chaotic regimes // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2000, vol. 10, no. 10, pp. 2323–2337.
- [6] Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199; Erratum: «Controlling chaos» // Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 64, no. 23, p. 2837.
- [7] Gao J. B. Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications // Phys. Rev. Lett., 1999, vol. 83, no. 16, pp. 3178–3181.
- [8] Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988. 253 с.
- [9] Lozi R. Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon // J. de Physique C5, 1978, Supplément au № 8, vol. 39, pp. 9–10.
- [10] Ledrappier F. Some relations between dimension and Lyapounov exponents // Comm. Math. Phys., 1981, vol. 81, no. 2, pp. 229–238.
- [11] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [12] Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Comm. Math. Phys., 1976, vol. 50, no. 1, pp. 69–77.
- [13] Анищенко В. С., Сафонова М. А. Сравнительный анализ размерностей хаотического аттрактора // Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, № 12, с. 41–45.
- [14] Анищенко В. С., Астахов С. В., Боев Я. И., Куртс Ю. Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 29–41.
- [15] Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // Acta Math., 1889, vol. 13, pp. 1–270.

**Poincaré recurrences time and local dimension of chaotic attractors**Vadim S. Anishchenko<sup>1</sup>, Nadezhda I. Birukova<sup>2</sup>, Sergey V. Astakhov<sup>3</sup>, Yaroslav I. Boev<sup>4</sup>

International Research Institute of Nonlinear Dynamics

Saratov State University

Astrakhanskaya 83, Saratov, 410026, Russia

<sup>1</sup>wadim@info.sgu.ru, <sup>2</sup>harbour2006@mail.ru, <sup>3</sup>s.v.astakhov@gmail.com, <sup>4</sup>boev.yaroslav@gmail.com

The concept of a local fractal dimension has been introduced in the framework of the average Poincaré recurrence time numerical analysis in an  $\varepsilon$ -vicinity of a certain point. Lozi and Hénon maps have been considered. It has been shown that in case of Lozi map the local dimension weakly depends on the point on the attractor and its value is close to the fractal dimension of the attractor. In case of a quasi attractor observed in both Hénon and Feigenbaum systems the local dimension significantly depends on both the diameter and the location of the  $\varepsilon$ -vicinity. The reason of this strong dependency is high non-homogeneity of a quasi-attractor which is typical for non-hyperbolic chaotic attractors.

MSC 2010: 37B20, 37C45, 37L30

Keywords: Poincaré recurrence, attractor dimension

Received May 4, 2012, accepted June 13, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 449–460 (Russian)