Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 461–471.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.9
MSC 2010: 37G35

Универсальное двумерное отображение и его радиофизическая реализация

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, М. В. Поздняков, Ю. В. Седова

Предложено простое двумерное отображение, параметрами которого являются непосредственно след и якобиан матрицы возмущений неподвижной точки. На плоскости параметров оно демонстрирует основные универсальные бифуркационные сценарии: переход к хаосу через удвоения периода, картину квазипериодических колебаний и языков Арнольда. Продемонстрирована возможность реализации такого отображения в радиофизическом устройстве.

Ключевые слова: отображения, бифуркации, квазипериодические явления

Введение

Двумерные отображения важны для многих приложений, поскольку могут представлять собой сечения Пуанкаре трехмерных потоков. В свою очередь, известно большое число радиофизических, биофизических систем, моделей популяционной биологии и т. д., которые описываются трехмерными потоками [1–5]. Бифуркации двумерных отображений подробно изучены [6–8]. Одним из интересных феноменов в таких отображениях является

Получено 27 февраля 2012 года
После доработки 16 апреля 2012 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-02-00342-а и гранта Правительства РФ для гос. поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых (№ 11.G34.31.0039).

Кузнецов Александр Петрович
alkuz@rambler.ru
Кузнецов Сергей Петрович
spkuz@rambler.ru
Седова Юлия Викторовна
sedovayv@rambler.ru
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Поздняков Михаил Валерьевич
mpozdnyakov@yandex.ru
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

бифуркация рождения инвариантной кривой — бифуркация Неймарка–Сакера, с наличием которой ассоциируется целый круг явлений, таких как возникновение резонансных циклов, структура языков Арнольда и т. д. Наиболее популярный в литературе пример двумерного отображения — отображение Эно — характеризуется постоянным якобианом и не демонстрирует такую бифуркацию. В [9–12] предложена определенная модификация отображения Эно (*generalized Hénon map*), которая приводит к возникновению бифуркации Неймарка–Сакера. Еще один возможный путь построения необходимого отображения состоит в использовании двумерных потоков с бифуркацией Андронова–Хопфа, для которых производные по времени заменяются конечными разностями. Такой подход приводит, например, к отображению Богданова (*Bogdanov map*), предложенному и исследованному в [13–15]. Мы предлагаем еще один вариант отображения, который логическим образом вытекает из двухпараметрического бифуркационного анализа. В этом случае параметрами отображения являются непосредственно след и якобиан матрицы возмущений (матрицы Якоби), что обеспечивает, в определенной мере, универсальность свойств отображения. Такой подход рассмотрен в разделе 1 настоящей статьи. Предлагаемое отображение (как и упоминавшиеся выше примеры) является, однако, формально построенной конструкцией. Поэтому важным является вопрос о его возможной физической реализации. Этот вопрос обсуждается в разделе 2, где предложена радиофизическая схема, которая демонстрирует необходимый тип поведения, и приведены результаты моделирования ее динамики с применением программного пакета Multisim [16, 17].

1. Бифуркации двумерных отображений и универсальная модель

Двумерное отображение в общем случае задается соотношениями

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Оно может иметь неподвижные точки (x_0, y_0), такие, что

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0), \\ y_0 &= g(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Характер устойчивости неподвижной точки определяется матрицей Якоби системы (1.1), вычисленной в такой точке:

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Собственные числа этой матрицы представляют собой мультипликаторы отображения μ_1 и μ_2, для которых справедливо соотношение

$$\mu^2 - S\mu + J = 0, \tag{1.4}$$

где S и J — след и якобиан матрицы возмущений (1.3).

Бифуркации двумерных отображений удобно представить на плоскости след–якобиан (S, J). В этом случае получается достаточно полная, а главное, универсальная картина бифуркаций [4, 18]. На плоскости (S, J) имеет место характерный «треугольник устойчивости», показанный на рисунке 1. Его стороны отвечают основным бифуркациям коразмерности один [6]:

а) касательная бифуркация (*fold*), $\mu = +1$: $1 - S + J = 0$;

б) бифуркация удвоения периода (*flip*), $\mu = -1$: $1 + S + J = 0$;

в) бифуркация Неймарка – Сакера: $J = 1$.

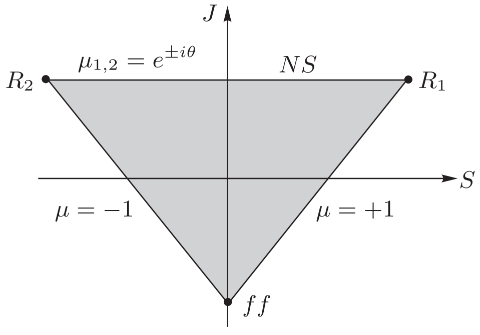

Рис. 1. Треугольник устойчивости двумерных отображений на плоскости след–якобиан матрицы возмущений.

Вершины треугольника соответствуют простейшим бифуркациям коразмерности два [6]:

а) резонанс $1:1$, R_1, когда $\mu_1 = \mu_2 = +1$: $S = 2$, $J = 1$;

б) резонанс $1:2$, R_2, когда $\mu_1 = \mu_2 = -1$: $S = -2$, $J = 1$;

в) бифуркация *fold–flip*, *ff*, когда $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$: $S = 0$, $J = -1$.

В силу универсальности картины на плоскости (S, J), привлекательной является идея построить отображение, для которого след и якобиан были бы непосредственно регулируемыми параметрами. Сконструируем сначала соответствующее линейное отображение:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - y_n, \\ y_{n+1} &= Jx_n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Оно имеет неподвижную точку в начале координат. Матрица Якоби в этой точке имеет вид

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} S & -1 \\ J & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Таким образом, параметры S и J действительно являются следом и якобианом матрицы Якоби. Добавим простейшую квадратичную нелинейность вида $(x^2 + y^2)$. Тогда отображение примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2). \end{aligned} \tag{1.7}$$

(Множитель $1/5$ введен для более удобного представления результатов.)

Понятно, что картина основных бифуркаций неподвижной точки $x_0 = y_0 = 0$ отображения (1.7) будет точно отвечать «треугольнику устойчивости» на рисунке 1. Для более полной характеристики свойств отображения (1.7) используем метод карт динамических режимов [4]. Соответствующая карта на рисунке 2 получена следующим образом: в каждой точке плоскости параметров (S, J) численно определялся период цикла отображения (1.7), и эта точка окрашивалась в определенный цвет в соответствии с полученным периодом. Периоды основных режимов указаны на карте. Кроме того, белым цветом обозначены квазипериодические режимы Q, черным — хаос C, лазурным — гиперхаос CH. Для визуализации этих режимов дополнительно рассчитывались ляпуновские показатели системы; при этом квазипериодическим режимам соответствует один нулевой и один отрицательный показатель, хаосу отвечает один положительный показатель, а гиперхаосу — два положительных показателя. Серым цветом и буквой D обозначена область убегания траекторий на бесконечность.

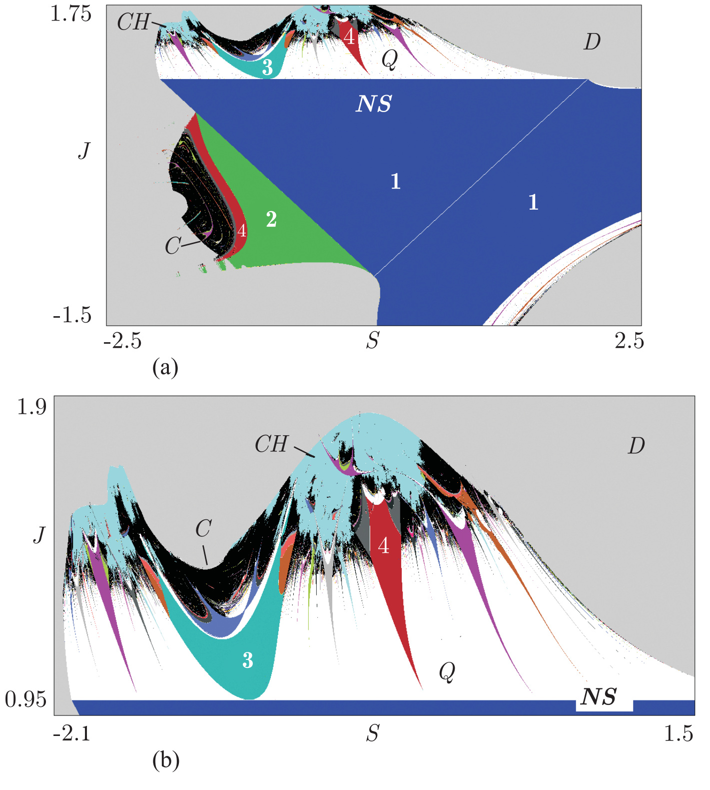

Рис. 2. Карта динамических режимов двумерного универсального отображения (a) и ее увеличенный фрагмент (b) в окрестности линии бифуркации Неймарка–Сакера NS.

На рисунке 2a оказывается визуализированным «треугольник устойчивости». Правая граница треугольника на карте отвечает касательной бифуркации с жестким переходом на другой режим. В рассматриваемом случае это область устойчивости другой неподвижной точки. Левая граница треугольника отвечает бифуркации удвоения периода, причем возможен полный фейгенбаумовский каскад с переходом к хаосу. Отметим, что небольшой отрезок (верхняя часть) этой границы отвечает не удвоению периода, а жесткому переходу через мультипликатор -1. На рисунке хорошо видна точка, в которой линия удвоения превращается в линию жесткого перехода.

Верхняя граница треугольника устойчивости соответствует бифуркации Неймарка–Сакера NS. На рисунке 2b показана в увеличенном виде картина языков Арнольда, выстроенных вдоль этой линии. Можно видеть, что языки погружены в область квазипериодических режимов. С ростом параметра J, отвечающего за превышение над порогом бифуркации Неймарка–Сакера, в области перекрытия языков Арнольда возникает хаос, а затем и гиперхаос.

Найдем числа вращения w на линии бифуркации Неймарка–Сакера. В соответствии с (1.4), при $J = 1$ для мультипликаторов имеем $\mu = S/2 \pm i\sqrt{1 - S^2/4}$. Тогда $tg(\arg\mu) = (\sqrt{4 - b^2})/b$. С учетом определения числа вращения $w = \arg\mu/2\pi$, легко получаем связь следа матрицы Якоби S с числом вращения w:

$$S = 2\cos(2\pi w). \tag{1.8}$$

Таким образом, при движении вдоль линии бифуркации Неймарка–Сакера $J = 1$ число вращения меняется от значения $w = 1/2$ при $S = -2$ до $w = 0$ при $S = 2$.

Отметим некоторые особенности внутреннего устройства основных языков Арнольда. На рисунке 3 показан в увеличенном виде язык периода 4. Можно видеть, что на верхней границе устойчивости резонансного 4-цикла возникает разрыв области существования цикла периода 8. В этой области граница устойчивости 4-цикла оказывается линией вторичной бифуркации Неймарка–Сакера NS_2. На базе цикла периода 4 возникает новая инвариантная кривая, так что на фазовом портрете можно наблюдать появление характерных овалов из каждого элемента 4-цикла. Можно отметить также возникновение внутри области квазипериодической динамики специфических областей периодических режимов, которые не контактируют с линией вторичной бифуркации Неймарка–Сакера.

Аналогичная картина, включающая вторичную бифуркацию Неймарка–Сакера, реализуется и на основе цикла периода 8 при выходе из области существования такого цикла, расположенной на рисунке 3 справа. Эта часть зоны периода 8 является маленькой «копией» языка периода 4, тогда как для левой области периода 8 наблюдается более традиционное устройство плоскости параметров с непрерывными линиями удвоений периода.

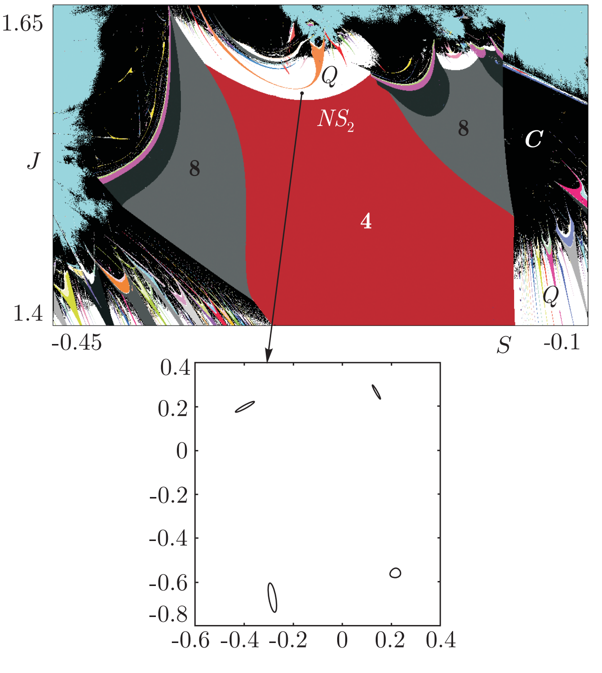

Рис. 3. Язык Арнольда периода 4 и характерный фазовый портрет, иллюстрирующий вторичную бифуркацию Неймарка–Сакера.

2. Радиофизическая реализация универсального отображения

Отображение (1.7) фактически представляет собой хотя и удобный для анализа, но абстрактный, искусственно сконструированный объект. Было бы интересно представить примеры физических систем, которые при соответствующей интерпретации динамических переменных описываются отображением такого типа. Отметим, что отображение необратимое, и поэтому для потоковых систем оно может соответствовать только лишь приближенному описанию в терминах сечения Пуанкаре (размерности больше 2). При этом динамика в двух измерениях, ассоциирующаяся с переменными x, y, должна сопровождаться сильным сжатием фазового объема по остальным направлениям пространства состояний. Ниже рассмотрен пример неавтономной системы в виде электронной схемы с периодическим внешним воздействием, для которой отображение (1.7) возникает при стробоскопическом описании преобразования мгновенного состояния за период.

Имея в виду разработку электронного устройства, естественно обратиться к средствам схемотехнического моделирования, среди которых удобным и популярным является программный продукт Multisim [16, 17].

При построении схем возможны два методически разных подхода, хотя грань между ними несколько условная. Один состоит в конструировании физической системы, обладающей интересующим типом динамического поведения, на основе радиотехнических элементов — колебательных контуров, активных элементов типа транзисторов, источников напряжения, элементов обратной связи и т. п. Второй опирается на идеологию по возможности точного воспроизведения исходных уравнений на базе элементов, применяемых в технике аналогового моделирования, таких как интеграторы, умножители, сумматоры и пр. При построении схемы, которая описывалась бы уравнениями (1.7), естественно взять за основу второй подход.

Обратимся к схеме, показанной на рисунке 4. Она содержит источник синусоидального напряжения V4 (частота 5 кГц), под действием которого периодически открываются и закрываются четыре электронных ключа J1-J4. Время, соответствующее одной полной итерации отображения, будет равно периоду изменения напряжения V4. Параметры S и J задаются с помощью потенциометров R1 и R2 и отвечают величинам напряжения, контроль которых осуществляется с помощью вольтметров XMM1 и XMM2.

В течение одного полупериода, когда замкнуты ключи J2 и J3, напряжение на конденсаторе C1 через повторитель на операционном усилителе U6 и резистор R13 передается (копируется) на конденсатор C2. Аналогичным образом, напряжение на конденсаторе C3 через повторитель U5 и резистор R14 копируется на конденсатор C4. (Резисторы R13, R14 служат для ограничения тока зарядки конденсаторов C2 и C4.) Результирующие напряжения, установившиеся к концу данного полупериода на конденсаторах C2 и C4, полагаем задающими динамические переменные x_n и y_n. (Соответствующие точки на схеме помечены как X и Y.)

На втором полупериоде ключи J2 и J3 разомкнуты, а J1 и J4 замкнуты. При этом происходит заряд конденсаторов C1 и C3 до напряжений, отвечающих значениям переменных на следующем шаге согласно формулам (1.7). Умножители напряжения A2 и A3 формируют напряжения, равные $-0.1x_n^2$ и $-0.1y_n^2$, которые поступают на вход суммирующего инвертора на операционном усилителе U4. Выходное напряжение, определяющееся выражением

$$U_{\mathrm{U4}} = -\frac{\mathrm{R}_5}{\mathrm{R}_3}\left(-0.1x_n^2\right) - \frac{\mathrm{R}_5}{\mathrm{R}_4}\left(-0.1y_n^2\right) = x_n^2 + y_n^2, \tag{2.1}$$

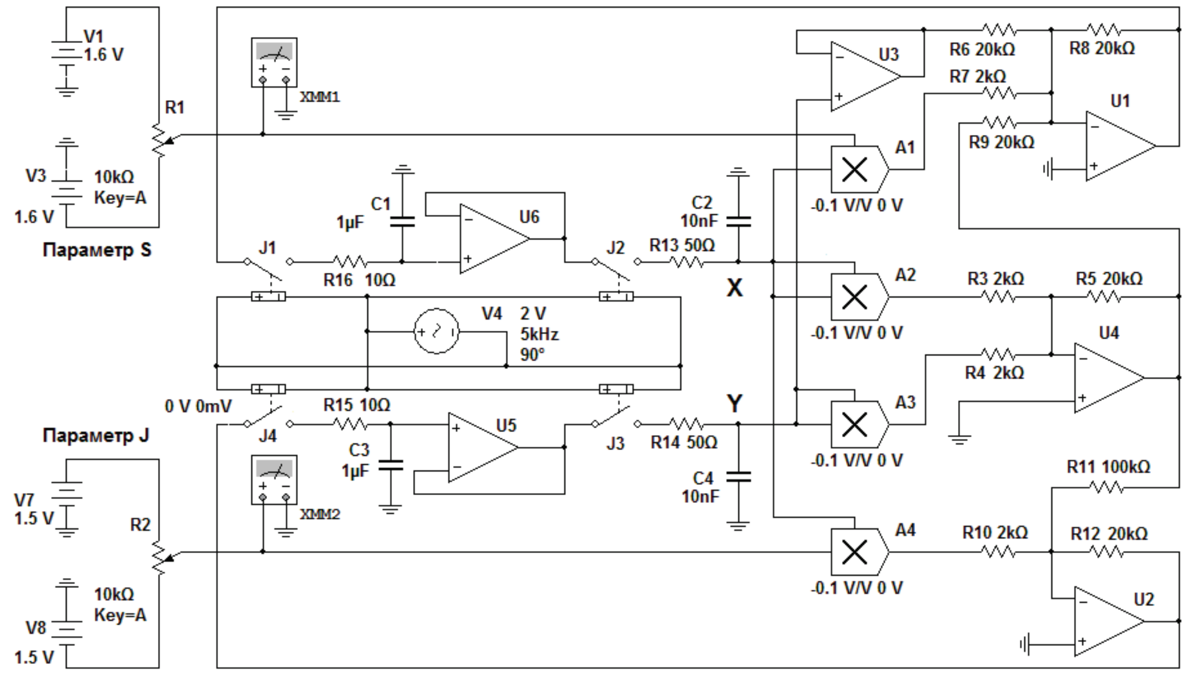

Рис. 4. Принципиальная схема электронного устройства, динамика которого описывается отображением (1.7).

подается на вход двух суммирующих инверторов на операционных усилителях U1 и U2. На другие два входа инвертора U1 подано напряжение $-0.1Sx_n$ с выхода умножителя A1 и напряжение y_n через повторитель U3. В результате на выходе U1 при указанных на схеме номиналах резисторов получается напряжение

$$U_{\mathrm{U1}} = -\frac{\mathrm{R}_8}{\mathrm{R}_7}\left(-0.1Sx_n\right) - \frac{\mathrm{R}_8}{\mathrm{R}_6}y_n - \frac{\mathrm{R}_8}{\mathrm{R}_9}\left(x_n^2 + y_n^2\right) = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2). \tag{2.2}$$

Что касается инвертора U2, то к его второму входу приложено напряжение $-0.1Jy_n$ с выхода умножителя A4. В результате на выходе U2 получаем напряжение

$$U_{\mathrm{U2}} = -\frac{\mathrm{R}_{12}}{\mathrm{R}_{10}}\left(-0.1Jy_n\right) - \frac{\mathrm{R}_{12}}{\mathrm{R}_{11}}\left(x_n^2 + y_n^2\right) = Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2). \tag{2.3}$$

Как можно видеть, формулы (2.2) и (2.3) соответствуют выражениям (1.7) для величин x_{n+1} и y_{n+1}. Эти напряжения обеспечивают заряд конденсаторов C1 и C3, причем для ограничения тока зарядки служат резисторы R15 и R16. После этого, на очередном периоде изменения напряжения источника V4, реализуется следующая итерация отображения (1.7), и так далее. Следует заметить, что при запуске схемы должны быть обеспечены ненулевые начальные условия; например, заданием начального напряжения на конденсаторе C1 и/или C2.

Обратимся к иллюстрациям динамики системы, полученным в результате схемотехнического моделирования. При его проведении использовались двухлучевой осциллограф и анализатор спектра программного продукта Multisim. Входное напряжение $\mathrm{U_X}$ для одного канала осциллографа снимается с точки X, а для второго U_Y — с точки Y. Вход анализатора спектра подключался к точке X.

На рисунке 5 в левой колонке показаны осциллограммы напряжений U_X и U_Y при значениях параметров J и S, иллюстрирующие различные режимы динамики системы: цикл периода 2 (a), цикл периода 4 (b), хаос, возникший в результате каскада удвоений периода (c). Также представлены квазипериодический режим (d), хаос (e) и гиперхаос (f), возникающие в области разрушения квазипериодической динамики. Следует подчеркнуть, что

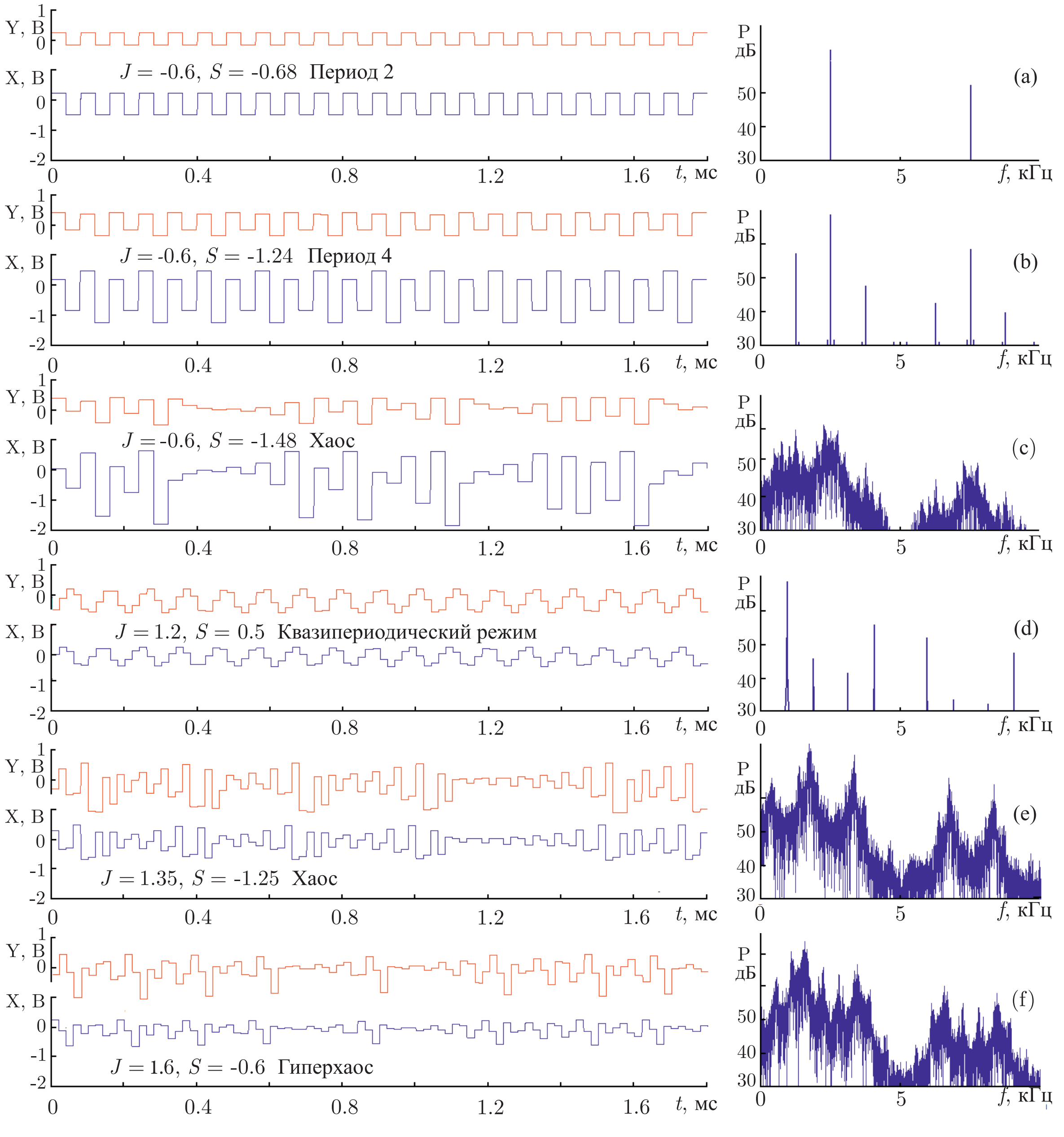

Рис. 5. В левой колонке — осциллограммы напряжений в точках X и Y, полученные при моделировании динамики схемы, приведенной на рисунке 4, в программной среде Multisim. В правой колонке приводятся спектры сигнала в точке X в логарифмическом масштабе.

режимы динамики, наблюдаемой при схемотехническом моделировании, находятся в хорошем соответствии с отображением (1.7), что говорит об адекватности предложенной схемы. В правой колонке показаны соответствующие спектры. Видно, что периодическим и квазипериодическим режимам отвечают дискретные спектры, причем во втором случае количество спектральных составляющих больше — наряду с основными составляющими присутствуют всевозможные комбинационные частоты. В режимах хаоса и гиперхаоса наблюдается сплошной спектр. На рисунке не приведены из-за их тривиальности осциллограммы, которым на плоскости параметров отвечает внутренность треугольника устойчивости: здесь система демонстрирует устойчивое состояние равновесия, и временные зависимости представлены горизонтальными линиями.

На рисунке 6 показаны фазовые портреты, которые получаются переключением осциллографа в режим без временной развертки, когда два подаваемых на вход напряжения соответствуют горизонтальному и вертикальному отклонению луча. Поскольку основной интересной особенностью системы является присутствие бифуркации Неймарка–Сакера, здесь приводятся результаты для аттракторов, возникающих за порогом этой бифуркации. Параметр J принят равным 1.2, а параметр S изменяется от одной диаграммы к другой, что соответствует движению слева направо вдоль горизонтальной линии на плоскости параметров. На этой линии в зависимости от величины S реализуются квазипериодические (a, c, e, f) или периодические (b, d) режимы, поскольку соотношение основных частот изменяется в примерном соответствии с изменением аргумента комплексного мультипликатора на границе бифуркации Неймарка–Сакера. В языках синхронизации соотношение частот остается фиксированным. Самый широкий и легко наблюдаемый язык отвечает периоду 3 (см. рис. 6b).

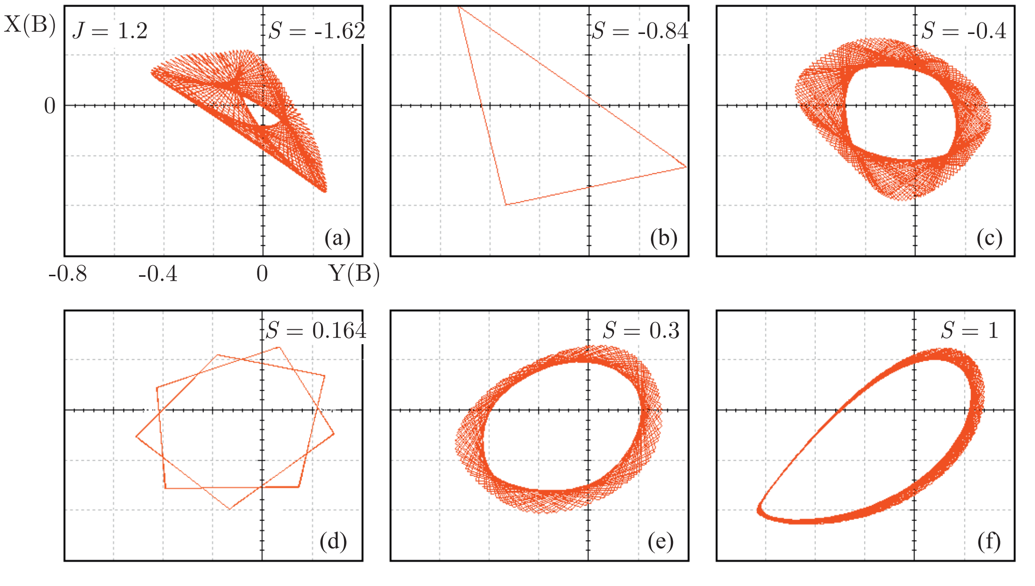

Рис. 6. Фазовые портреты аттракторов, возникающих за порогом бифуркации Неймарка–Сакера, построенные по результатам моделирования схемы, приведенной на рисунке 4, в программной среде Multisim. Параметр J остается одним и тем же, а параметр S увеличивается от одной диаграммы к другой, начиная с некоторого отрицательного значения.

Заключение

В настоящей работе предложено двумерное отображение, параметрами которого служат непосредственно след и якобиан матрицы возмущения вблизи неподвижной точки. Карта режимов и карта ляпуновских показателей такого отображения демонстрирует на плоскости этих параметров характерный «треугольник» устойчивости, составленный из отрезков прямых в виде линий касательной бифуркации, удвоения периода и линии бифуркации Неймарка – Сакера, а также систему языков Арнольда с характерным внутренним устройством, включая вторичные бифуркации Неймарка – Сакера. Предложенное отображение допускает радиофизическую реализацию в виде электронной схемы, функционирование которой продемонстрировано путем схемотехнического моделирования с помощью программного пакета Multisim. Такую схему можно использовать для экспериментов, имеющих целью накопление опыта практического исследования динамических феноменов, которые ассоциируются с переходами к хаосу, включающими бифуркации рождения квазипериодических режимов.

Список литературы

[1] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М: Наука, 1987. 424 с.

[2] Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.

[3] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Либроком, 2009. 320 с.

[4] Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

[5] Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.

[6] Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 614 pp.

[7] Meijer H. G. E. Codimension 2 bifurcations of iterated maps: PhD Thesis. Utrecht Univ., 2006 (http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm).

[8] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer, 2003. 843 pp.

[9] Gonchenko V. S., Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E. Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2005, vol. 4, no. 32, pp. 407–436.

[10] Гонченко С. В., Стенькин О. В., Шильников Л. П. О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 1, с. 3–25.

[11] Гонченко С. В., Гонченко А. С. К вопросу о классификации линейных и нелинейных подков Смейла // Нелинейная динамика, 2007, т. 3, № 4, с. 423–443.

[12] Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E., van Veen L. The fold-flip bifurcation // Internat. J. Bifur. Chaos, 2004, vol. 14, no. 7, pp. 2253–2282.

[13] Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M. The Bogdanov map: Bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // Internat. J. Bifur. Chaos, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 803–842.

[14] Сухаревский В. В. Оценка температуры и плотности частиц в слабодиссипативной теории Колмогорова – Арнольда – Мозера // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 2006, № 2, с. 7–9.

[15] Богданов Р. И., Богданов М. Р. Слабодиссипативная версия теории Колмогорова – Арнольда – Мозера: Теория и практика расчетов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2008, т. 48, № 3, с. 473–490.

[16] Макаренко В. В. Моделирование радиоэлектронных устройств с помощью программы NI Multisim // Электронные компоненты и системы (Киев) VD MAIS, 2008, № 1, с. 50–56; № 2, с. 51–57; № 3, с. 44–51; № 4, с. 44–51; № 6, с. 46–53; № 7, с. 54–59; № 8, с. 46–56; № 9, с. 65–69; № 12, с. 47–52.

[17] Варзарев Ю. Н., Иванцов В. В, Спиридонов Б. Г. Моделирование электронных схем в системе Multisim. Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2008. 81 с.

[18] Thompson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear dynamics and chaos: Geometrical methods for engineers and scientists. Chichester: Wiley/Blackwell, 1986. 376 pp.

Universal two-dimensional map and its radiophysical realization

Alexander P. Kuznetsov[1], Sergey P. Kuznetsov[2], Mikhail V. Pozdnyakov[3], Julia V. Sedova[4]

[1,2,4]Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
Zelenaya 38, Saratov, 410019 Russia
[3]Saratov State Technical University
Polytechnicheskaya 77, Saratov, 410054, Russia
[1]alkuz@rambler.ru, [2]spkuz@rambler.ru, [3]mpozdnyakov@yandex.ru, [4]sedovayv@rambler.ru

We suggest a simple two-dimensional map, parameters of which are the trace and Jacobian of the perturbation matrix of the fixed point. On the parameters plane it demonstrates the main universal bifurcation scenarios: the threshold to chaos via period-doublings, the situation of quasiperiodic oscillations and Arnold tongues. We demonstrate the possibility of implementation of such map in radiophysical device.

MSC 2010: 37G35
Keywords: maps, bifurcations, phenomena of quasiperiodicity

Received February 27, 2012, accepted April 16, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 461–471 (Russian)