



УДК: 517.9

MSC 2010: 37G35

Связанные универсальные отображения с бифуркацией Неймарка – Сакера

А. П. Кузнецов, М. В. Поздняков, Ю. В. Седова

Рассматривается динамика связанной системы, составленной из подсистем, демонстрирующих бифуркацию Неймарка – Сакера. Проведено исследование связанных отображений на плоскости параметров, отвечающих за такую бифуркацию в индивидуальных подсистемах. На плоскости параметров, характеризующих числа вращения индивидуальных подсистем, обнаружены сложные структуры из квазипериодических режимов разной размерности и точных периодических резонансов разного порядка.

Ключевые слова: отображения, бифуркации, квазипериодические явления

1. Введение

Одной из наиболее важных бифуркаций в теории динамических систем является бифуркация Неймарка – Сакера, которая состоит в рождении в фазовом пространстве инвариантного тора [1, 2]. Наличие такой бифуркации с физической точки зрения отвечает возникновению квазипериодических колебаний. Примеры *автономных* генераторов с бифуркацией Неймарка – Сакера представлены и исследованы в работах [3–7]. В серии работ

Получено 27 февраля 2012 года

После доработки 16 апреля 2012 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-02-00342-а, и гранта Правительства РФ для гос. поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых (№ 11.G34.31.0039).

Кузнецов Александр Петрович

alkuz@rambler.ru

Седова Юлия Викторовна

sedovayv@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Поздняков Михаил Валерьевич

mpozdnyakov@yandex.ru

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

В. С. Анищенко с соавторами [3–5] для оригинального генератора квазипериодических колебаний обнаружен эффект удвоения двухчастотного тора, а также демонстрируется возможность существования торов разной размерности для двух связанных генераторов. Однако в силу сложности и многоплановости задача описания связанных систем с квазипериодической динамикой все еще недостаточно проработана. Ее детальный анализ требует больших объемов компьютерных вычислений. (Особенно это относится к анализу вложения картины режимов в пространство параметров.) Поэтому целесообразно использовать не только реалистичные радиофизические системы, но и более простые модели. Так, в качестве частичной подсистемы можно выбрать двумерное отображение с бифуркацией Неймарка – Сакера. Такая задача обсуждается в настоящей работе. Отметим, что при этом возникает интересный класс *квазипериодических бифуркаций* (т. е. бифуркаций квазипериодических движений), обсуждавшихся, например, в [8], но пока еще мало используемых в приложениях.

2. Устройство плоскости параметров, отвечающих за превышение порога бифуркации Неймарка – Сакера в подсистемах

В качестве индивидуальной автономной системы используем двумерное отображение следующего вида [9]:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Его преимущество состоит в том, что параметры S и J являются непосредственно следом и якобианом отображения, вычисленными в неподвижной точке $x_0 = y_0 = 0$. В этом случае картина режимов на плоскости (S, J) оказывается достаточно универсальной [9]. Бифуркация Неймарка – Сакера наблюдается на линии обращения в единицу якобиана $J = 1$. Соответственно, параметр J отвечает за превышение над порогом бифуркации Неймарка – Сакера в индивидуальной подсистеме при $J > 1$.

Связь между подсистемами организуем следующим образом. Выполним сначала по одной итерации каждого отображения. Затем включается связь, которая пропорциональна разности проитерированных переменных. (Известно, что при такой организации связи она обычно носит *диссипативный* характер [10].) В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (1 - \mu)f_1(x_n, y_n) + \mu f_2(u_n, v_n), \\y_{n+1} &= (1 - \mu)g_1(x_n, y_n) + \mu g_2(u_n, v_n), \\u_{n+1} &= (1 - \mu)f_2(u_n, v_n) + \mu f_1(x_n, y_n), \\v_{n+1} &= (1 - \mu)g_2(u_n, v_n) + \mu g_1(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь x, y — переменные первого отображения, u, v — переменные второго отображения, а функции задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}f_i(x, y) &= S_i x - y - (x^2 + y^2), \\g_i(x, y) &= J_i x - \frac{1}{5}(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Для анализа устройства пространства параметров будем использовать построение карт ляпуновских показателей. Такая карта (рис. 1) строится следующим образом [11, 12]. В каждой точке плоскости параметров вычисляются все ляпуновские показатели $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \Lambda_4$ системы (2.2). Затем плоскость окрашивается в разные цвета в соответствии со спектром показателей Ляпунова, так что визуализируются следующие области:

- а) P — периодический режим, $0 > \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$,
- б) T_2 — двухчастотный квазипериодический режим, $0 = \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$,
- в) T_3 — трехчастотный квазипериодический режим, $0 = \Lambda_1 = \Lambda_2 > \Lambda_3$,
- г) C — хаос, $\Lambda_1 > 0 > \Lambda_2 > \Lambda_3$,
- д) CH — гиперхаос, $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0 > \Lambda_3$.

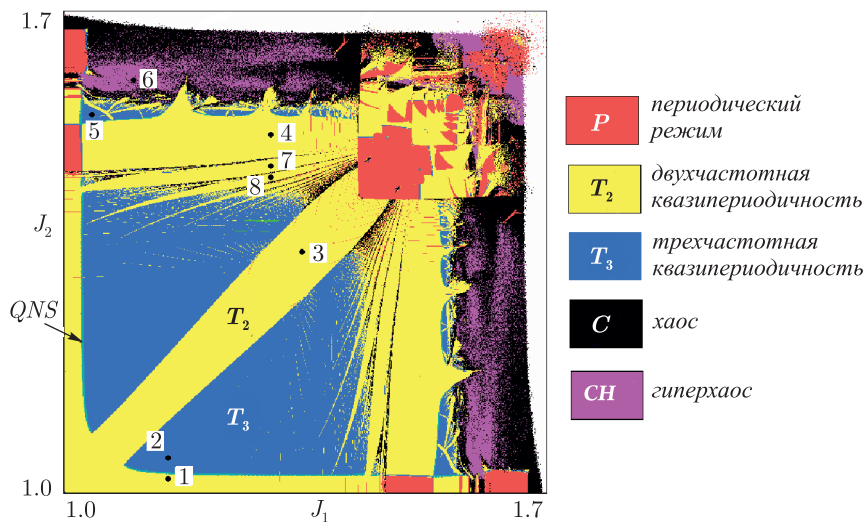


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей связанных универсальных отображений на плоскости параметров, ответственных за бифуркацию Неймарка–Сакера в подсистемах. Цифры соответствуют фазовым портретам на рисунках 2–4. QNS — линия квазипериодической бифуркации Неймарка–Сакера. Параметры $S_1 = S_2 = 0.2$, $\mu = 0.01$.

Цветовая палитра расшифрована в подписи справа от рисунка 1. Отметим, что четвертый показатель Λ_4 всегда оставался отрицательным, так что четырехчастотные режимы не наблюдались.

Карта на рисунке 1 представляет собой конфигурацию областей различных режимов на плоскости параметров (J_1, J_2) , отвечающих за бифуркацию Неймарка–Сакера в индивидуальных подсистемах. Значения второго параметра равны $S_1 = S_2 = 0.2$, что соответствует, в основном, квазипериодическим колебаниям индивидуальных подсистем. Однако с ростом J возможным становится, например, синхронный режим периода 5.

Понять устройство плоскости параметров помогают фазовые портреты на рисунках 2 и 3. Они представляют собой проекции аттракторов четырехмерной системы (2.2) на трехмерное пространство (x, y, u) . Цифры на карте рисунка 1 отвечают соответствующим портретам. В точке 1 реализуется двухчастотный квазипериодический режим, и фазовая траектория представляет собой инвариантную кривую. Ее особенность состоит в том, что она существенно вытянута по оси переменной x первого отображения, при этом переменная u второй подсистемы почти постоянна и лишь слабо осциллирует. Причина заключается

в доминировании второй подсистемы. Действительно, выбранная точка отвечает условию $J_2 < J_1$. Это означает, что вторая подсистема «отстроена» от случая неподвижной точки незначительно. Соответственно, ее переменная u мало меняется в процессе динамики.

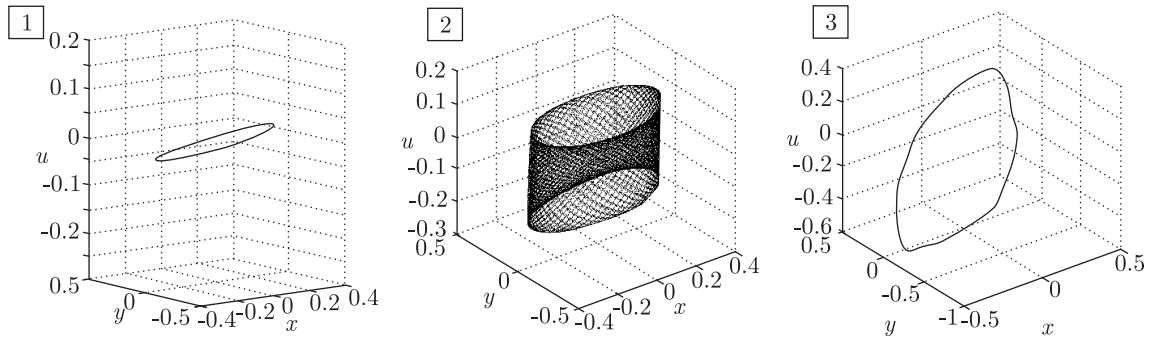


Рис. 2. Трехмерные проекции аттракторов связанных универсальных отображений. Двухчастотный (1) и трехчастотный (2) режимы с доминированием первой подсистемы, а также двухчастотные колебания (3), близкие к симметричным.

Если теперь увеличить степень возбуждения второй подсистемы и перейти в точку 2, то возникает трехчастотный квазипериодический режим. В фазовом пространстве наблюдается трехчастотный тор. При этом вторая подсистема отчасти все еще доминирует — фазовый портрет близок к цилиндру, вытянутому вдоль оси u .

Увеличивая еще больше степень возбуждения парциальных подсистем, попадаем на рисунке 1 в точку 3, лежащую в другой «ветви» области двухчастотных режимов. Теперь параметры возбуждения подсистем близки: $J_1 \approx J_2$. При этом возникает режим, которому отвечает примерное равенство переменных подсистем: $x \approx u$ (то есть наблюдается слабо возмущенный квазипериодическим образом режим почти симметричного движения подсистем).

Увеличим параметр возбуждения второй подсистемы J_2 и перейдем в область на карте рисунка 1, на которой отмечены точки 4, 5 и 6. Соответствующие фазовые портреты даны на рисунке 3. Обратимся сначала к точке 4. Степень превышения второй подсистемой порога бифуркации Неймарка–Сакера теперь настолько велика, что для нее в автономном режиме становится возможным возникновение синхронного режима периода пять. Взаимодействие с первой подсистемой, находящейся в режиме автономных квазипериодических колебаний, приводит к возникновению двухчастотного тора на базе цикла периода 5. Поэтому фазовый портрет выглядит как пять замкнутых инвариантных кривых, каждую из которых изображающая точка посещает по очереди.

Увеличение параметра J_2 приводит к выходу второй подсистемы из условий синхронизации, что, в свою очередь, приводит к возникновению трехчастотных колебаний на базе данного режима (вставка 5 на рис. 3). При этом портрет аттрактора «размывается», но сохраняется его структура, обусловленная резонансным характером режима периода 5. При еще большем увеличении параметра возбуждения возникает хаос, а затем и гиперхаос, и тонкая структура аттрактора полностью разрушается (вставка 6).

На карте рисунка 1 можно видеть и другие языки резонансных двухчастотных торов более высокого порядка. Для примера некоторые из них отмечены цифрами 7 и 8, а соответствующие фазовые портреты в проекции на плоскость (x, u) даны на рисунке 4.

В случае взаимодействия подсистем с квазипериодическим поведением становятся возможными бифуркации квазипериодических режимов. В этом случае бифуркационные изменения претерпевают инвариантные кривые (инвариантные торы) [8]. Обсудим их подробнее.

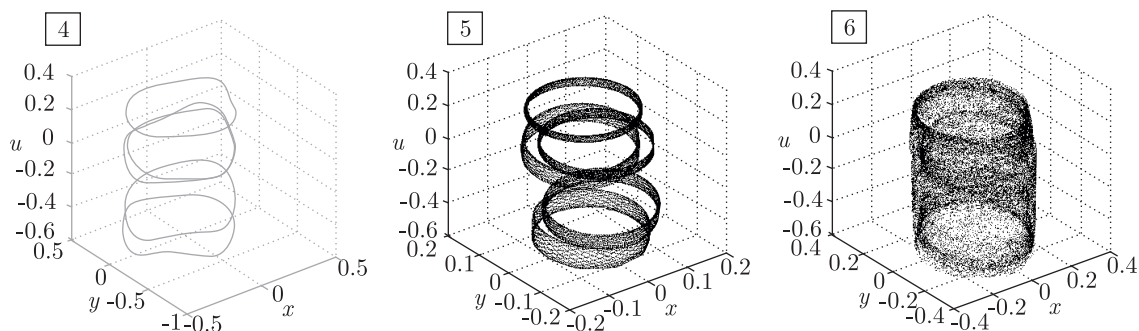


Рис. 3. Трехмерные проекции аттракторов связанных универсальных отображений. Двухчастотный тор на базе режима периода 5 (4) и его превращение в трехчастотный тор (5) и гиперхаос (6).

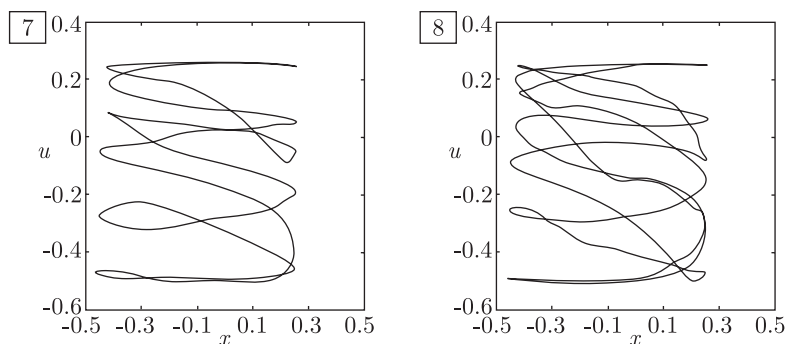


Рис. 4. Двумерные проекции аттракторов — различных типов резонансных двухчастотных торов.

Фиксируем управляющий параметр второй подсистемы $J_2 = 1.18$ и будем увеличивать параметр первой подсистемы J_1 . Обратимся к соответствующим графикам ляпуновских показателей на рисунке 5. Можно видеть, что сначала равен нулю один ляпуновский показатель Λ_1 . В этом случае реализуется режим двухчастотной квазипериодичности. В то же время два других показателя Λ_2 и Λ_3 совпадают и растут. В некоторой точке QNS $J_1 \approx 1.03$ оба этих показателя обращаются в нуль. При дальнейшем увеличении параметра J_1 показатель Λ_2 становится равным нулю и возникает режим трехчастотной квазипериодичности, когда $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$. График же третьего показателя Λ_3 , коснувшись линии $\Lambda = 0$, снова уходит в область отрицательных значений. В точке QNS этот график имеет излом. Такое поведение показателей является характерным атрибутом точки с *квазипериодической бифуркацией Неймарка – Сакера* QNS^1 .

Ее появление можно пояснить физически. Если выключить связь между подсистемами, то при $J_1 = 1$ в первой подсистеме наблюдается бифуркация Неймарка – Сакера, состоящая в потере устойчивости неподвижной точки с возникновением инвариантной кривой. Введение связи со второй подсистемой, совершающей квазипериодические колебания, возмущает этот режим. Теперь вместо неподвижной точки будет наблюдаться двухчастотный квазипериодический режим, а вместо инвариантной кривой — трехчастотный режим. Соответственно, граница между двумя этими типами режимов будет квазипериодической бифуркацией Неймарка – Сакера.

¹В [8] аналогичную бифуркацию называют квазипериодической бифуркацией Хопфа (*quasi-periodic Hopf bifurcation*). Однако, по-видимому, более корректно называть ее квазипериодической бифуркацией Неймарка – Сакера.

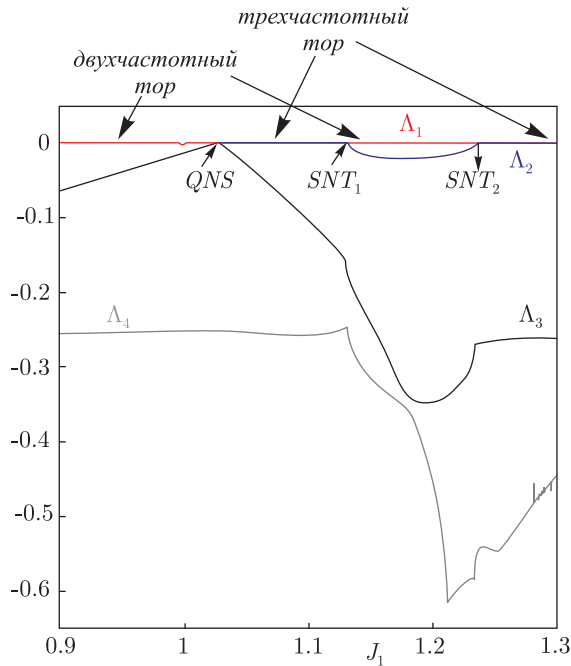


Рис. 5. График ляпуновских показателей в зависимости от управляющего параметра J_1 ; QNS — квазипериодическая бифуркация Неймарка–Сакера, SNT — седло-узловые бифуркации инвариантных кривых; $J_2 = 1.18$, $\mu = 0.01$.

Эволюцию аттрактора при квазипериодической бифуркации Неймарка–Сакера иллюстрирует рисунок 6. В этом случае трехчастотный режим возникает «мягким» образом в окрестности исходной инвариантной кривой. Можно видеть, что аттрактор в форме «бублика» постепенно увеличивается в размерах с ростом превышения над порогом бифуркации.

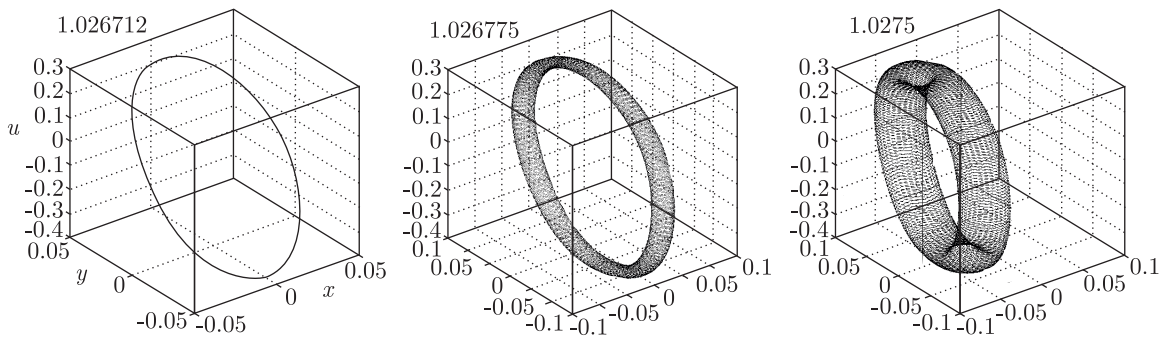


Рис. 6. Эволюция аттрактора при квазипериодической бифуркации Неймарка–Сакера, $J_2 = 1.2$, $\mu = 0.01$. Значения параметра J_1 указаны на рисунке.

При дальнейшем увеличении параметра на рисунке 5 достигаем точки SNT_1 . В этом случае только первый показатель Λ_1 остается нулевым, а показатель Λ_2 становится отрицательным. Эта ситуация отвечает *седло-узловой бифуркации инвариантных кривых* (торов) [8]. В этом случае устойчивая и седловая инвариантные кривые возникают из трехчастотного режима путем «сгущения» фазовых траекторий. При дальнейшем увеличении параметра достигаем точки SNT_2 . Теперь аналогичная бифуркация происходит в обратном

порядке, то есть устойчивая и седловая кривые сталкиваются и исчезают с образованием трехчастотного режима. Рисунок 7 иллюстрирует эволюцию аттрактора в этом случае. Можно видеть, что, в отличие от рисунка 6, трехчастотный аттрактор возникает, в определенной мере, «жестким» образом: траектории уже не локализованы в окрестности исходной инвариантной кривой.

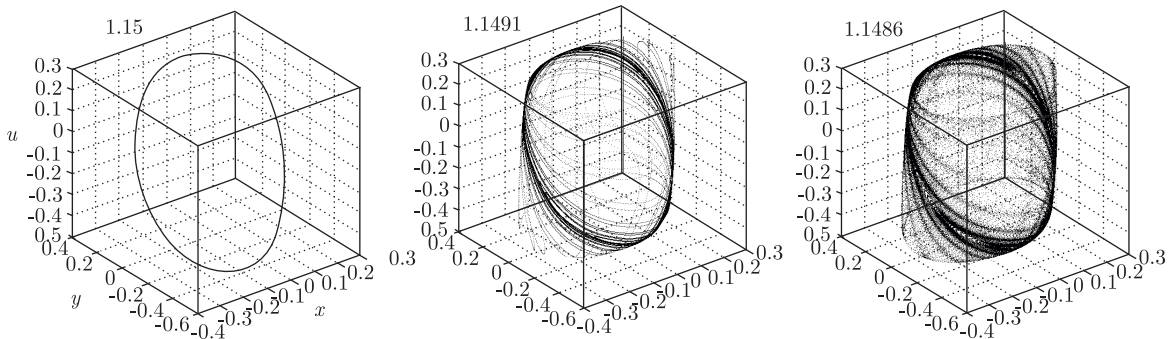


Рис. 7. Эволюция аттрактора при квазипериодической седло-узловой бифуркации; $J_2 = 1.2$, $\mu = 0.01$. Значения параметра J_1 указаны на рисунке.

3. Устройство плоскости параметров, отвечающих за числа вращения парциальных систем

Мы обсудили устройство плоскости параметров, отвечающих за бифуркацию Неймарка–Сакера в подсистемах. Обратимся теперь к устройству плоскости второй пары управляющих параметров индивидуальных отображений (S_1, S_2) . Для индивидуального отображения мультипликатор μ связан с его следом и якобианом соотношением

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \tag{3.1}$$

Аргумент комплексного мультипликатора определяет число вращения w , так что $w = \arg \mu / 2\pi$. Тогда из (3.1) при $J = 1$ легко получаем

$$S = 2 \cos(2\pi w). \tag{3.2}$$

Таким образом, параметр S определяется числом вращения индивидуальной подсистемы. Для двух подсистем пара параметров (S_1, S_2) определяет два числа вращения (w_1, w_2) .²

Фиксируем теперь параметры $J_1 = J_2 = 1.17$, $\mu = 0.01$ и обратимся к карте ляпуновских показателей системы (2.2) на плоскости (S_1, S_2) (рис. 8а). На этом рисунке можно видеть сложную систему полос областей двухчастотных режимов T_2 , на пересечении которых наблюдаются периодические режимы. Такая структура плоскости параметров связана с различными резонансами в системе.

Чтобы более детально охарактеризовать типы резонансов, на рисунке 8b показана карта динамических режимов системы, где разными цветами обозначены периоды наблюдаемых

²Поскольку мы ограничиваемся случаем дискретных отображений, то парциальные подсистемы имеют, в некотором смысле, один общий ритм. В этом плане данная задача более ограничена, чем общий случай двух связанных квазипериодических генераторов [4, 5]. По этой причине в анализируемой системе максимальная размерность торов равна трем.



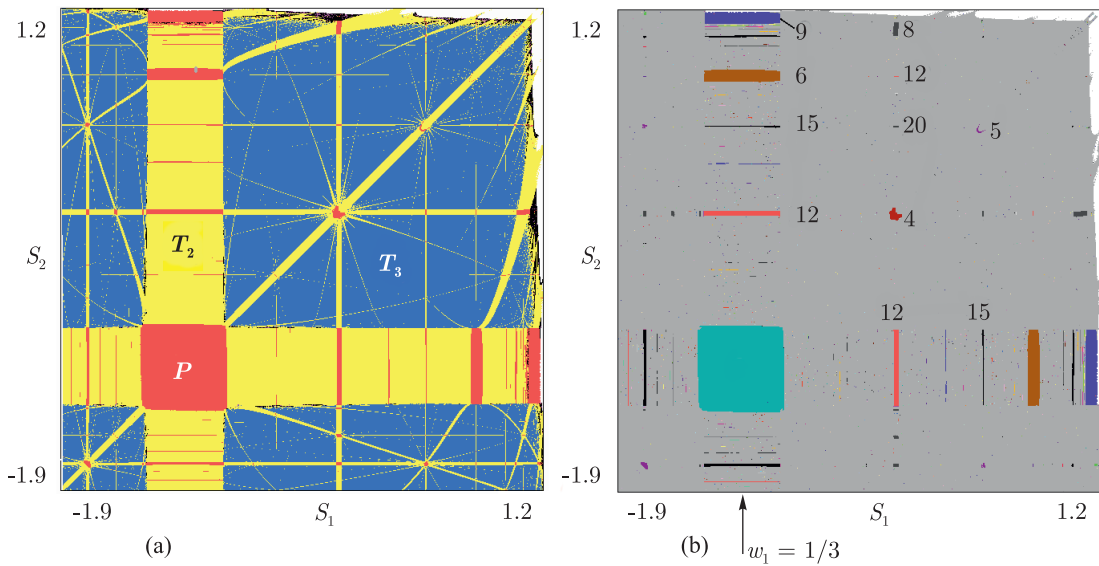


Рис. 8. Карта спектра ляпуновских показателей (а) и карта динамических режимов (б) связанных универсальных отображений на плоскости параметров S_1, S_2 ; параметры $J_1 = J_2 = 1.17, \mu = 0.01$. Числа на фрагменте (б) отвечают периодам наблюдаемых циклов.

циклов отображения (2.2). Возникающие точные резонансы определяются теми или иными комбинациями двух чисел вращения w_1 и w_2 взаимодействующих подсистем. При этом каждый резонанс удобно характеризовать фактором $(p, q)/n$, где после сокращения дроби величина $w_1 = p/n$ представляет собой первое число вращения, $w_2 = q/n$ — второе, а n — общий знаменатель. На карте динамических режимов такой резонанс фиксируется как область периода n . Так, например, самый сильный резонанс периода три характеризуется комбинационным числом вращения $(1, 1)/3$.

Фиксируем теперь частотный параметр первой подсистемы S_1 , как показано стрелкой на рисунке 8б, и рассмотрим возникающие резонансы внутри вертикальной полосы двухчастотных режимов. Физически такие режимы отвечают тому, что первая подсистема при выключенной связи совершает колебания периода три с числом вращения $w_1 = 1/3$. Взаимодействие подсистем может приводить к двухчастотным квазипериодическим колебаниям или к периодическим колебаниям, если динамика второй подсистемы близка к ее собственному индивидуальному резонансу. Для индивидуальной второй подсистемы с ростом S_2 существенно выраженными будут области с числами вращения $w_2 = 1/3, 1/4, 1/5$ и т. д. [9]. В сочетании с динамикой первой подсистемы, для которой $w_1 = 1/3$, такая последовательность порождает систему резонансов с комбинационными числами вращения:

$$(1, 1)/3, (4, 3)/12, (5, 3)/15, (2, 1)/6, (7, 3)/21, (8, 3)/24, (3, 1)/9 \dots \tag{3.3}$$

Последовательность (3.3) можно видеть на рисунке 8б как области режимов периода 3, 12, 15, 6, ..., 9. (Области периода 21 и 24 слишком узкие.)

В свою очередь, окна периодических режимов имеют собственную систему резонансных двухчастотных полос, пересечение которых приводит к «островкам» новых периодических резонансов. Так, наиболее выраженными резонансами на рисунке 8б являются резонансы периода 4 и 5, лежащие на диагонали плоскости S_1, S_2 , которая отвечает примерному равенству частотных параметров подсистем. При этом вся система периодических и двух-

частотных режимов погружена в область трехчастотных колебаний T_3 и образует, таким образом, сложную структуру. Заметим, что аналогичные структуры характерны для задач, относящихся к взаимодействию многочастотных систем (см., например, [13]). По аналогии с системами с консервативной динамикой, где похожие структуры возникают из-за выполнения резонансных условий в фазовом пространстве [14, 15], авторы [16] предлагают использовать термин «резонансная паутина Арнольда».

4. Заключение

Связанные отображения являются удобным объектом для изучения связанных систем с бифуркацией Неймарка – Сакера. Плоскость параметров, отвечающих за превышение порога бифуркаций Неймарка – Сакера в индивидуальных подсистемах, содержит области периодических режимов, двух- и трехчастотной квазипериодичности, а также хаоса и гиперхаоса. Возможны двухчастотные квазипериодические режимы с доминированием первой или второй подсистем, а также квазипериодические решения, близкие к симметричным. В организации плоскости параметров важную роль играют квазипериодические бифуркации, формирующие характерную структуру языков двухчастотных режимов, погруженных в область трехчастотной квазипериодичности. Плоскость параметров, отвечающих числам вращения индивидуальных подсистем, образует сложную структуру, организованную по типу резонансной паутины Арнольда.

Список литературы

- [1] Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 614 pp.
- [2] Meijer H. G. E. Codimension 2 bifurcations of iterated maps: PhD Thesis. Utrecht Univ., 2006 (<http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>).
- [3] Анищенко В. С., Николаев С. М. Генератор квазипериодических колебаний: Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ, 2005, т. 31, № 19, с. 88–94.
- [4] Anishchenko V. S., Nikolaev S. M., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E, 2006, vol. 73, no. 5, 056202, 8 pp.
- [5] Анищенко В. С., Николаев С. М. Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 3, с. 267–278.
- [6] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Станкевич Н. В. Автономный генератор квазипериодических колебаний // ПНД, 2010, т. 18, № 2, с. 51–61.
- [7] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Stankevich N. V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2010, vol. 15, no. 6, pp. 1676–1681.
- [8] Vitolo R., Broer H., Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 154–184.
- [9] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Поздняков М. В., Седова Ю. В. Универсальное двумерное отображение и его радиофизическая реализация // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 461–471.
- [10] Кузнецов С. П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика, 1985, т. 28, № 8, с. 991–1007.
- [11] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 693–717.
- [12] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 411–425.

- [13] Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Phys. D*, 1991, vol. 49, no. 3, pp. 387–475.
- [14] Froeschlé C., Lega E., Guzzo M. Analysis of the chaotic behaviour of orbits diffusing along the Arnold web // *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2006, vol. 95, nos. 1–4, pp. 141–153.
- [15] Guzzo M., Lega E., Froeschlé C. First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi-integrable systems // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2005, vol. 5, no. 3, pp. 687–698.
- [16] Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 769–787.

Coupled universal maps demonstrating Neimark – Saker bifurcation

Alexander P. Kuznetsov¹, Mikhail V. Pozdnyakov², Julia V. Sedova³

^{1,3}Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
Zelenaya 38, Saratov, 410019 Russia

²Saratov State Technical University
Polytechnicheskaya 77, Saratov, 410054, Russia

¹alkuz@rambler.ru, ²mpozdnyakov@yandex.ru, ³sedovayv@rambler.ru

We examine the dynamics of the coupled system consisting of subsystems, demonstrating the Neimark–Sacker bifurcation. The study of coupled maps on the plane of the parameters responsible for such bifurcation in the individual subsystems is realized. On the plane of parameters characterizing the rotation numbers of the individual subsystems we reveal the complex structures consisting of the quasi-periodic modes of different dimensions and the exact periodic resonances of different orders.

MSC 2010: 37G35

Keywords: maps, bifurcations, phenomena of quasiperiodicity

Received February 27, 2012, accepted April 16, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 473–482 (Russian)