



УДК: 517.925 + 517.93

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35

О некоторых новых аспектах хаотической динамики «КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ»

А. С. Гонченко, С. В. Гонченко, А. О. Казаков

В настоящей работе изучается хаотическая динамика одной неголономной модели движения кельтского камня на плоскости. Исследуются сценарии возникновения хаоса и основные этапы его развития.

Ключевые слова: неголономная модель, странный аттрактор, симметрия, бифуркация, смешанная динамика

1. Введение

В работе рассматривается неголономная модель движения кельтского камня на плоскости. Как хорошо известно, такая модель позволяет ответить на основной вопрос в динамике кельтских камней: о природе реверса (вращательной асимметрии) кельтского камня, которая состоит в том, что камень, положенный на плоскость, может свободно вращаться в одну сторону и «никак не хочет» вращаться в другую. В последнем случае он делает несколько оборотов по инерции, перестает вращаться и начинает колебаться, затем меняет

Получено 8 мая 2012 года

После доработки 25 июня 2012 года

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039. Работа поддержана грантами РФФИ № 10-01-00429, № 11-01-00001 и № 11-01-97017-р-поволжье, а также ФЦП «Кадры» № 14.V37.21.0361.

Гонченко Александр Сергеевич

agonchenko@mail.ru

Гонченко Сергей Владимирович

gosv100@uic.nnov.ru

Казаков Алексей Олегович

Kazakovdz@yandex.ru

НИИ Прикладной математики и кибернетики

603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 10

направление своего вращения, «делает реверс» и, наконец, продолжает свободно и устойчиво вращаться (уже в другую сторону).

Объяснение этому явлению, во всяком случае с формальной, математической точки зрения, кажется теперь достаточно простым. Дело в том, что, как и для большинства известных неголономных механических моделей, система, описывающая динамику кельтского камня, является обратимой (реверсивной) относительно замены времени $t \rightarrow -t$. Однако не является консервативной и интегрируемой, хотя и имеет два независимых интеграла — интеграл энергии E и геометрический интеграл γ (см. формулу (2.2)) ниже), и поэтому у системы на совместном уровне интегралов E и γ могут существовать симметричные друг другу асимптотически устойчивые и вполне неустойчивые решения, стационарные (равновесия), периодические (предельные циклы) и т. п. Тогда, например, устойчивому равновесию отвечает устойчивое вращение камня в одном направлении, а ему симметричному равновесию — неустойчивое вращение в противоположном направлении. Собственно говоря, такое объяснение явления реверса в динамике кельтских камней было дано сравнительно недавно — в работах И. С. Астапова [1], А. В. Карапетяна [2], А. П. Маркеева [3] и некоторых других (см. необходимые ссылки в монографии [4]).

Тем не менее, движение кельтского камня на плоскости рассматривается в механике по-прежнему как один из самых сложных и до сих пор весьма слабо исследованных типов движения твердого тела вообще. Более того, это один из немногих таких видов движения, в которых возможна хаотическая динамика.¹

Впервые странные аттракторы в динамике кельтских камней были обнаружены в работах А. В. Борисова и И. С. Мамаева [6, 7]. В настоящей работе мы, по существу, продолжаем эти исследования. Однако наша точка зрения на задачу отличается от [6, 7], поскольку, как нам кажется, хаотическая динамика здесь ассоциируется не только (и не столько) со странными аттракторами. Хотя последние и существуют при определенных значениях параметров (например, как мы показываем, здесь существует спиральный аттрактор [8]), гораздо более важным является тот факт, что в модели кельтского камня, как нами и ожидалось, наблюдается сравнительно новый и малоисследованный тип динамического хаоса, так называемая *смешанная динамика* [9–12]. В этом случае неблуждающее множество системы устроено так, что

- оно содержит грубые периодические траектории всех топологических типов, то есть устойчивые, вполне неустойчивые, седловые, а также, если система обратима, то и симметричные эллиптические или эллиптико-седловые траектории,
- замыкания множеств траекторий разных типов имеют непустое пересечение.

Последнее означает, что «аттракторы» и «репеллеры» (здесь ω - и α -предельные множества) пересекаются.² В принципе, на счете в этом случае может казаться, что «аттрактор» и «репеллер» образуют единое целое.

¹Недавно хаотическая динамика была обнаружена также в модели, описывающей движения (как чистые качения, так и общие — качения и верчения) неуравновешенного шара на плоскости [5].

²И это пересечение само может быть весьма сложным. Вообще, математическим образом смешанной динамики может служить квазиаттрактор системы, принадлежащей области Ньюхауса, в которой плотны системы, имеющие одновременно счетное множество периодических стоков и источников. Как вытекает из [13] (аналогичная аргументация есть уже в [14]), для таких областей Ньюхауса со смешанной динамикой типично, когда α - и ω -предельные множества системы содержат в пересечении «подкову» — некоторое нетривиальное равномерно гиперболическое множество. Напомним, что областями Ньюхауса называются открытые (в C^2 -топологии) области из простран-

В настоящей работе мы прослеживаем, в основном с помощью численного счета, определенные этапы развития хаотической динамики в модели кельтского камня: ее возникновение; качественные изменения — включая появление спирального аттрактора (когда предельное множество содержит в замыкании седло-фокус с отрицательной дивергенцией), а также смешанной динамики — спирального аттрактора-репеллера (когда предельное множество содержит в замыкании оба симметричных один другому седло-фокуса); появление элементов консервативной динамики (хаотических торов, КАМ-торов и т.п.). Конечно, работа имеет во многом дискуссионный, полемический характер, так как некоторые утверждения (в частности, о существовании петель сепаратрис седло-фокусов) не доказаны строго математически. Однако главная ее цель — обратить внимание читателя на богатство и разнообразие хаотической динамики в движении кельтского камня — кажется вполне достигнутой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Совсем недавно, на семинаре в ИМАШ им. Благоднарова (в марте этого года), когда мы уже выступили с докладом на тему статьи, А. П. Маркеев задал казалось бы простой вопрос: «Так существуют ли странные аттракторы в динамике кельтских камней?» Несмотря на то что уже есть соответствующие статьи на эту тему [6, 7], ответ не кажется вполне очевидным и однозначным. Если говорить о «физических СА», то есть о так называемых квазиаттракторах, то ответ положительный для тех камней, которые были рассмотрены в [6, 7] и в нашей статье. Однако если взять кельтский камень с другими параметрами (например, если рассмотреть $\delta = 1$ вместо $\delta = 0.2$, как в [6, 7]; по поводу δ см. ниже), то, как показывают наши исследования (не вошедшие в эту статью), здесь хаос может быть связан исключительно только со смешанной динамикой, а никак не с СА. С другой стороны, настоящих СА (гиперболических, лоренцевских или псевдогиперболических [17]) здесь, скорее всего, не бывает.

Содержательная часть статьи — это параграфы 2 и 3. В § 2 собраны основные сведения о математической модели кельтского камня — почти все они хорошо известны (см., например, [7, 18]), но приведены для удобства читателя. § 3 содержит в основном новые результаты о регулярной и хаотической динамике кельтского камня.

2. Уравнения движения и их свойства

Мы изучаем динамику движения твердого тела по горизонтальной плоскости без проскальзывания, то есть в предположении существования неинтегрируемой (неголономной) связи отвечающей тому, что скорость тела в точке контакта с плоскостью равна нулю. Это условие можно записать в виде $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс G с точкой контакта R , а \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно. Стандартно считается, что координаты всех векторов заданы в некотором базисе, жестко связанном с телом. Хорошо известно (см. [18]), что уравнения движения твердого тела в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ства динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями. Известно, что такие области существуют в любой окрестности любой системы с гомоклиническим касанием [15, 16]. Свойство называется типичным, если оно выполняется для подмножества второй категории некоторого открытого множества (получаемого как пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств). Области Ньюхауса со смешанной динамикой существуют, например, вблизи двумерных диффеоморфизмов с негрубыми гетероклиническими контурами, содержащими седловые неподвижные точки с якобианами > 1 и < 1 [9].

где $\mathbf{M} = \mathbf{I}\omega + m\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})$ — кинетический момент тела относительно точки контакта, γ — единичный орт вертикали, mg — вес тела. Уравнение (2.1) имеет два интеграла:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega) - mg(\mathbf{r}, \gamma) \quad \text{и} \quad (\gamma, \gamma) = 1, \quad (2.2)$$

интеграл энергии и геометрический интеграл соответственно.

Мы рассматриваем кельтский камень в форме эллиптического параболоида. Тогда поверхность тела $F(\mathbf{r}) = 0$ и координаты вектора γ задаются соотношениями

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{a_1} + \frac{r_2^2}{a_2} \right) - (r_3 + h) = 0, \quad (2.3)$$

$$r_1 = -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 = -h + \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2},$$

где a_1, a_2 — радиусы главных кривизн в вершине параболоида, h — высота центра масс, расположенного на оси параболоида. Предполагается также, что центр тяжести тела находится в точке $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, а одна из главных осей инерции является вертикальной. Отличительной особенностью кельтских камней является то, что две другие главные оси повернуты относительно геометрических осей на угол δ , где $0 < \delta < \pi/2$. Тогда тензор инерции в главных геометрических осях будет иметь вид [7]

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции параболоида.

Система (2.1) может быть представлена в стандартной форме шестимерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений от фазовых переменных $\omega \in \mathbb{R}^3$ и $\gamma \in \mathbb{R}^3$, зависящей от параметров μ , характеризующих геометрические и физические свойства камня,

$$(\dot{\omega}, \dot{\gamma}) = G(\omega, \gamma, \mu). \quad (2.5)$$

При численных расчетах мы будем использовать модель кельтского камня, физические параметры³ которого следующие:

$$I_1 = 5, I_2 = 6, I_3 = 7, m = 1, g = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1. \quad (2.6)$$

2.1. Компактификация: переменные Андуайе – Депри

В рассматриваемой задаче, как и во многих других разделах динамики твердого тела, весьма удобны для исследования так называемые координаты Андуайе – Депри, (L, H, G, g, l) ,

³Здесь размеры указаны в сантиметрах, время — в $\text{с}/\sqrt{10}$, вес — в килограммах (в частности, ускорение свободного падения g здесь равно 100, так как стандартное $10 \text{ м}/\text{с}^2$ преобразуется в $100 \text{ м}/(\sqrt{10} \text{ с}^2)$).

которые вводятся по формулам [18]

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \\ \gamma_1 &= (\sin \zeta \cos \tau + \sin \tau \cos \zeta \cos g) \sin l + \cos \zeta \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= (\sin \zeta \cos \tau + \sin \tau \cos \zeta \cos g) \cos l - \cos \zeta \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \sin \zeta \sin \tau - \cos \tau \cos \zeta \cos g, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\sin \tau = L/G$, $\sin \zeta = H/G$ и, по определению (см., например, [18]),

$$H = (M, \gamma) = M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2 + M_3 \gamma_3. \tag{2.8}$$

Здесь предполагается, что $\tau, \zeta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

На совместном уровне двух интегралов (2.2) уравнения (2.5) задают четырехмерный поток \mathcal{G}_E . Отметим, что новые координаты L, H, G, g и l выбраны так, что условие $(\gamma, \gamma) = 1$ выполняется автоматически.

Это означает, что на уровне геометрического интеграла формулы (2.7) задают взаимно однозначное преобразование везде, кроме плоскостей $L/G = \pm 1$ и $H/G = \pm 1$.

Далее мы будем исследовать системы на четырехмерных уровнях энергии $\mathcal{H}(L, G, H, l, g) = E$. Для геометрических построений будем рассматривать проекции траекторий редуцированной системы на трехмерную плоскость $g = g_0 = \text{const}$, на которой введем координаты $(l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G})$. Кроме того, плоскости $g = g_0 = \text{const}$ (при подходящих g_0) можно рассматривать в качестве секущих для соответствующего четырехмерного потока. И тогда исследование динамики последнего можно проводить с помощью отображения Пуанкаре [6, 7],

$$\bar{x} = \mathcal{F}_{g_0}(x), \quad x = \left(l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G} \right), \tag{2.9}$$

которое определено в области $0 \leq l < 2\pi, -1 \leq L/G \leq 1, -1 \leq H/G \leq 1$.

Лемма 1 ([7]). *Фазовое пространство отображения (2.9) в случае эллиптического параболоида гомеоморфно «шаровому слою» $S^2 \times [-1, 1]$.*⁴

2.2. Симметрии в модели кельтского камня

В нашем случае, то есть для камня в форме эллиптического параболоида, система (2.5) обладает рядом интересных и полезных симметрий, описываемых в следующей лемме.

Лемма 2 ([7]). *Система (2.5) симметрична относительно замены координат вида*

$$(a) \quad \mathcal{S}_1: \omega \rightarrow -(-\omega_1, -\omega_2, \omega_3), \quad \gamma \rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3) \tag{2.10}$$

и обратима (реверсивна) относительно следующих двух инволюций:

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathcal{I}_1: \omega &\rightarrow -\omega, \quad \gamma \rightarrow \gamma, \quad t \rightarrow -t, \\ (c) \quad \mathcal{I}_2: \omega &\rightarrow (\omega_1, \omega_2, -\omega_3), \quad \gamma \rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3), \quad t \rightarrow -t. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Заметим, что эти симметрии и инволюции будут существовать и в новых координатах (Андуйе–Депри), однако они, вообще говоря, уже не будут линейными. Но в частном случае, для отображения Пуанкаре (2.9) с секущей $g = 0$, которое будем обозначать как \mathcal{F}_0 , симметрии леммы 2 будут линейными.

⁴Это соответствует тому, что координата l циклическая с периодом 2π , а отрезки $L/G = \pm 1$ на любом сечении $H/G = \text{const}$ склеены в одну точку.



Лемма 3 ([7]). *Отображение \mathcal{F}_0 инвариантно относительно преобразований*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \tilde{S}_1: l \rightarrow l + \pi, \quad \frac{L}{G} \rightarrow \frac{L}{G}, \quad \frac{H}{G} \rightarrow \frac{H}{G}, \\
 (b) \quad & \tilde{I}_1: l \rightarrow l + \pi, \quad \frac{L}{G} \rightarrow -\frac{L}{G}, \quad \frac{H}{G} \rightarrow -\frac{H}{G}, \quad \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0^{-1}, \\
 (c) \quad & \tilde{I}_2 = \tilde{I}_1 \tilde{S}_1: l \rightarrow l, \quad \frac{L}{G} \rightarrow -\frac{L}{G}, \quad \frac{H}{G} \rightarrow -\frac{H}{G}, \quad \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Следствие 1. *Пусть отображение \mathcal{F}_0 имеет траекторию L^* , тогда его траекториями будут также $\tilde{S}_1(L^*)$, $\tilde{I}_1(L^*)$ и $\tilde{I}_2(L^*)$, причем траектории L^* и $\tilde{S}_1(L^*)$, а также $\tilde{I}_1(L^*)$ и $\tilde{I}_2(L^*)$ — попарно динамически идентичны, а L^* и $\tilde{S}_1(L^*)$ находятся в инволюции как с $\tilde{I}_1(L^*)$, так и с $\tilde{I}_2(L^*)$.*

3. Бифуркации и хаотическая динамика

Мы будем рассматривать однопараметрические семейства 4-мерных потоков (2.5) или 3-мерных отображений (2.9) с управляющим параметром E . При этом, для большей определенности, мы зафиксируем значение параметра δ и положим его равным $\delta = 0,2$ — так же, как и в работе [7], так что читателю будет удобно сопоставить наши результаты с полученными в [7].

Обозначим через \mathcal{G}_E и через \mathcal{F}_{0E} однопараметрические семейства потоков (2.5) и отображений (2.9) соответственно. Как показано в [6, 7], динамика 4-мерной системы \mathcal{G}_E при больших E весьма простая. Здесь имеется два состояния равновесия O_1 и O_2 , отвечающие перманентным вращениям вокруг вертикали $\gamma = (0, 0, 1)$ с угловыми частотами $\omega_1 = (0, 0, \omega_0)$ и $\omega_2 = (0, 0, -\omega_0)$. При $E > 1300$ одно из этих равновесий, O_1 , вполне неустойчиво, а другое, O_2 , асимптотически устойчиво.⁵

Замечание 2. В случае вертикального вращения $E = \frac{1}{2}I_3\omega^2 + mgh$, откуда получаем, что $\omega_0 = \sqrt{2(E - mgh)/I_3}$.

При уменьшении E здесь будут происходить бифуркации. Первоначально они будут связаны со сменой регулярных устойчивых режимов: потерей устойчивости состояния равновесия O_2 и появлением новых периодических аттракторов (репеллеров). Затем бифуркации приведут к возникновению сложной динамики и хаоса (ассоциирующегося со странным аттрактором, смешанной динамикой или почти консервативной неинтегрируемой динамикой), который, в свою очередь, в конце концов сменяется динамическим поведением, близким к интегрируемому (при значениях энергии, близких к потенциальной $E = 100$).

3.1. Бифуркации в регулярной динамике

При $E = E_2 = 1300$ состояние равновесия O_2 теряет устойчивость в результате мягкой бифуркации Андронова–Хопфа [19], а в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, который мы будем называть *K-циклом*. Одновременно, в силу обратимости,

⁵Однако существуют и другие кельтские камни, у которых оба равновесия O_1 и O_2 всегда неустойчивые (седловые). Таким будет, например, камень в случае $I_1 = 4$, $I_2 = 5$, $I_3 = 6$, тогда как «наш» камень имеет, для сравнения, $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$.

в окрестности точки O_1 рождается вполне неустойчивый предельный цикл. При этом точки O_1 и O_2 становятся одновременно седло-фокусами типа (2,2).⁶

Заметим, что K -цикл, в свою очередь, теряет устойчивость при $E = E_3 \sim 935$ в результате седло-узловой бифуркации; K -цикл при $E = E_3$ сливается с седловым предельным циклом того же периода, после чего исчезает. Однако сразу же проявляется новый устойчивый режим — асимптотически устойчивый предельный цикл [7], который мы будем называть BM -циклом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Устойчивый K -цикл — единственный (поэтому он \mathcal{S}_1 -симметричен). Что касается устойчивых BM -циклов, то их рождается сразу два, C_1 и $C'_1 = \mathcal{S}_1(C_1)$, симметричных один другому; и, соответственно, существуют еще два вполне неустойчивых BM -цикла — $\tilde{C}_1 = \mathcal{I}_2(C_1)$ и $\tilde{C}'_1 = \mathcal{I}_1(C_1)$. (См. рис. 1.)

Мы проследили поведение устойчивого BM -цикла(ов) при увеличении E . При этом обнаружилось, что он теряет свою устойчивость в результате (мягкой) бифуркации Андронова–Хопфа при $E = E_1 \sim 1510$, то есть при $E < E_1$ цикл устойчивый, а при $E > E_1$ он становится седловым (с одним мультипликатором внутри единичной окружности и двумя комплексно-сопряженными — вне), но его окружает устойчивый двумерный инвариантный тор. Заметим, что этот тор сохраняет свою устойчивость недолго — при $E > E_{tor} \sim 1550$ он становится седловым. Вопрос о существовании других (кроме равновесия O_2) устойчивых режимов при больших E (при $E > 1500$) мы не рассматривали.

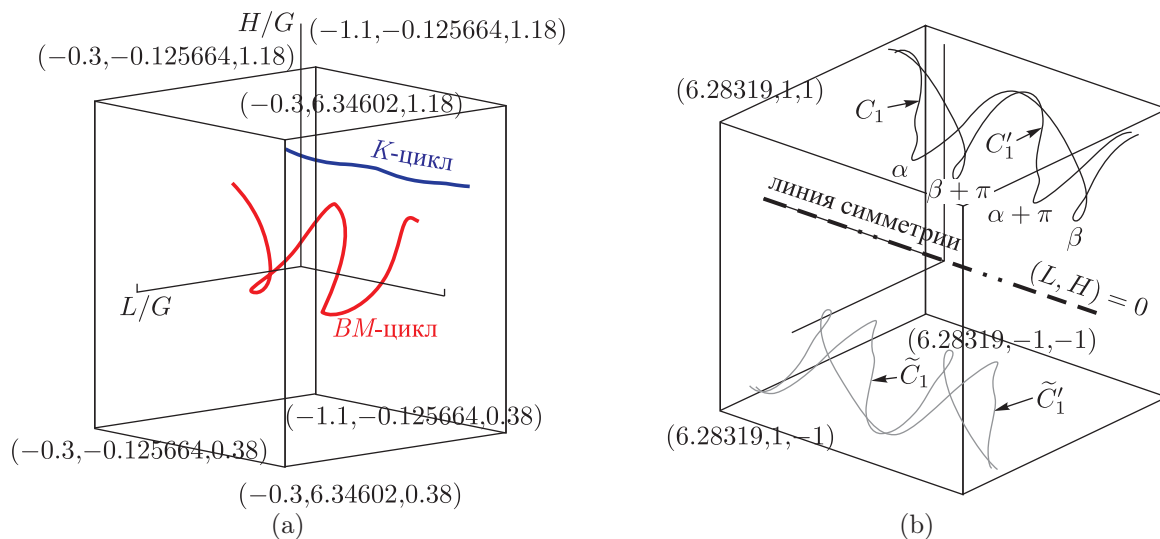


Рис. 1. Проекция на трехмерную секущую $g = 0$ предельных циклов: (а) устойчивые K -цикл и один из BM -циклов при $E = 1100$; (б) четыре BM -цикла, два устойчивых и два вполне неустойчивых, при $E = 600$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $E_1 > E > E_3$ система является *мультистабильной*, поскольку у нее существует три аттрактора. При $E_1 > E > E_2$ аттракторами являются состояния равновесия O_2 и два BM -цикла C_1 и C'_1 , а при $E_2 > E > E_3$ — три устойчивых предельных цикла: K -цикл и два BM -цикла.⁷

⁶Точка O_2 имеет характеристические корни $\nu_{1,2} = -\lambda_1 \pm i\mu_1$, $\nu_{3,4} = \lambda_2 \pm i\mu_2$, где $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$, а также $\lambda_1 > 0$ всегда, а λ_2 меняет знак: $\lambda_2 < 0$ при $E > E_2$, $\lambda_2 = 0$ при $E = E_2$ и $\lambda_2 > 0$ при $E < E_2$; соответственно, равновесие O_1 имеет характеристические корни $\nu_{1,2} = \lambda_1 \pm i\mu_1$, $\nu_{3,4} = -\lambda_2 \pm i\mu_2$.

⁷Если делать натуральный эксперимент, то в этом случае можно наблюдать следующее. При началь-

3.2. Возникновение хаоса

Предельные циклы C_1 и C'_1 теряют (одновременно) свою устойчивость при $E = E_4 \sim \sim 561$ жестким образом в результате бифуркации удвоения периода: устойчивый BM -цикл сливается при $E = E_4$ с седловым циклом удвоенного периода и становится, в свою очередь, седловым при $E < E_4$. При этом сразу возникает хаос — нечто похожее на «странный аттрактор». Заметим, что момент $E = E_4$ близок к моменту образования гомоклинической петли седло-фокуса O_2 , поэтому здесь уже есть готовая сложная динамика, которая, однако, не является притягивающей, когда существует BM -цикл. В силу обратимости, при $E < E_4$ существует также и «странный репеллер». Однако в момент, близкий к бифуркационному, аттрактор и репеллер определенно разделены, что видно на счете (см. рис. 2а).

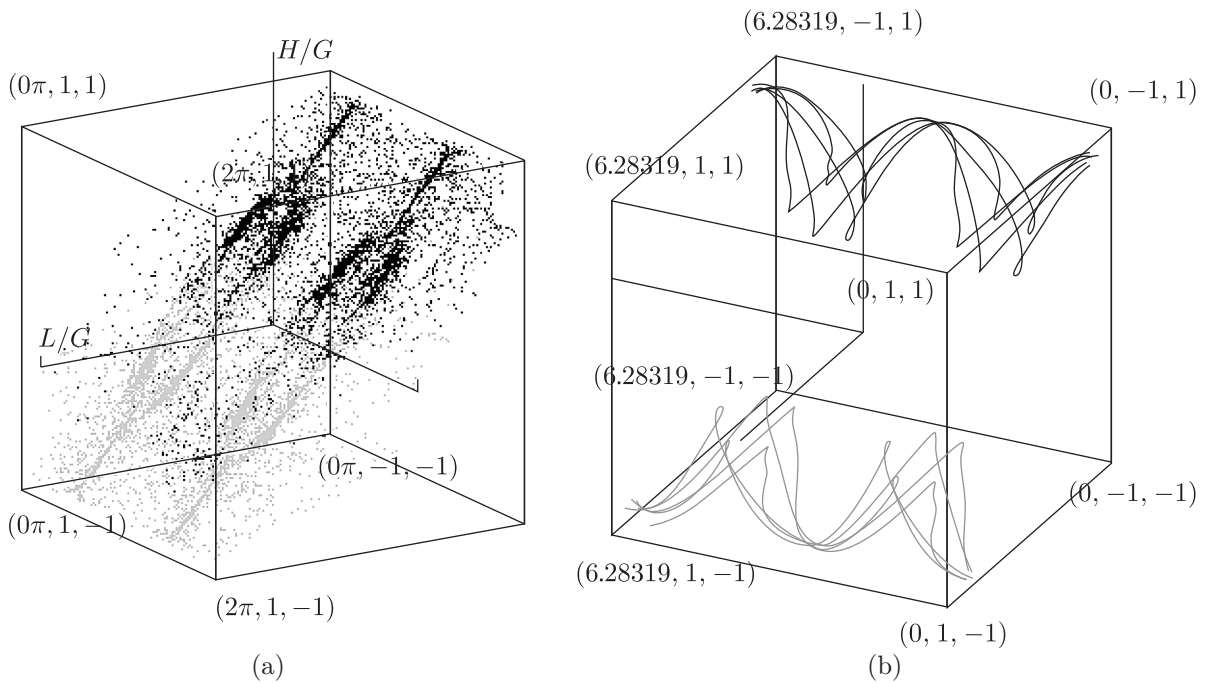


Рис. 2. (а) $E = 555$, аттрактор (черный) и репеллер (серый) определенно разделены; (б) окно устойчивости: устойчивый предельный цикл периода 5 (черный цвет) и симметричный ему вполне неустойчивый цикл (серый) при $E = 510$.

Если говорить в общем плане, то в семействе \mathcal{G}_E при $\delta = 0.2$ реализуется поначалу так называемый сценарий Шильникова развития хаоса [8], который включает следующие этапы:

$$\text{устойчивое равновесие} \rightarrow \text{устойчивый цикл} \rightarrow CA \rightarrow \text{спиральный } CA.$$

Заметим, что переход устойчивый цикл $\rightarrow CA$ может иметь совершенно разную бифур-

ном вертикальном вращении по часовой стрелке, что отвечает вращению с частотами $(0, 0, -\omega_0)$, это вращение будет сохраняться при $E_1 > E > E_2$ или сохранять свое направление, но слегка прецессировать при $E_2 > E > E_3$ (движение по K -циклу). При начальном вращении против часовой стрелки, что отвечает вращению с частотами $(0, 0, \omega_0)$, это вращение, в силу обратимости системы, сразу изменит свое направление при $E_1 > E > E_3$, но может возникнуть прецессия с несколько большей амплитудой, чем в предыдущем случае (движение по одному из BM -циклов).

кационную природу, в зависимости от конкретной задачи.⁸ В нашем случае (при $\delta = 0.2$) наблюдается возникновение хаоса в результате жесткой потери устойчивости одновременно двух BM -циклов C_1 и C'_1 . Однако переход от хаоса к спиральному аттрактору носит (типично) универсальный характер и связан с образованием гомоклинических петель седло-фокуса [8].

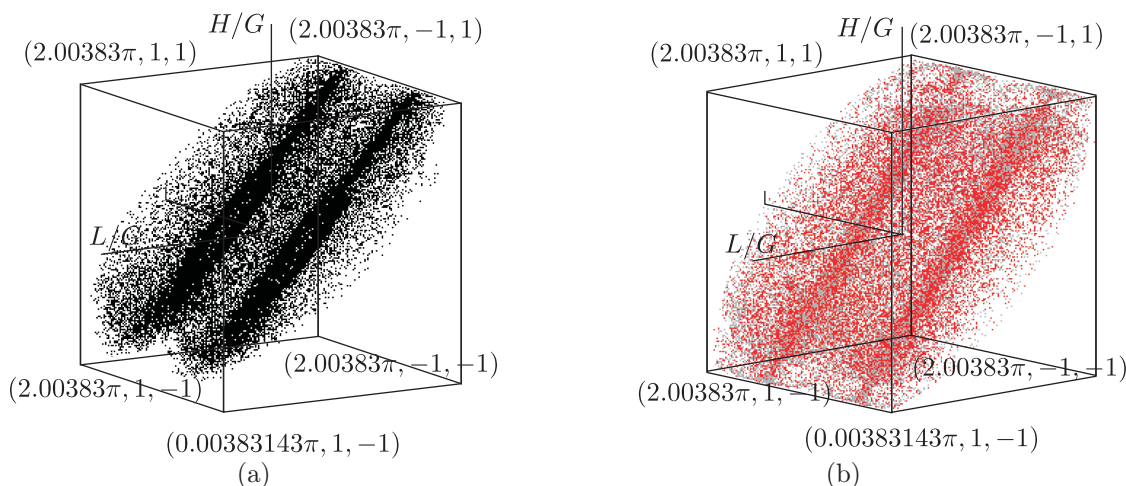


Рис. 3. (а) $E = 470$, спиральный аттрактор; (б) смешанная динамика при $E = 320$.

Отметим также, что наблюдаемый хаос не является, конечно, гиперболическим, в силу наличия или появления при малых возмущениях гомоклинических касаний, негрубых гетероклинических контуров и т. п. Как обычно в таких случаях, при изменении параметров могут возникать так называемые «окна устойчивости», то есть открытые множества значений параметров, при которых аттрактором становится, например, периодическая траектория или инвариантный тор. Такое окно устойчивости мы наблюдали и в нашей модели: при $528 > E > 485$ аттрактором является устойчивый предельный цикл периода 5 (см. рис. 2b). При дальнейшем уменьшении E этот цикл претерпевает серию бифуркаций удвоения периода (мы наблюдали несколько таких бифуркаций), и снова возникает СА.

Заметим, что на некотором достаточно большом интервале значений параметра ($470 > E > 350$) хаос является спиральным, так как седло-фокус O_2 принадлежит аттрактору (получено численно, см. рис. 3а). В силу обратимости системы, седло-фокус O_1 принадлежит в этот момент репеллеру.

При дальнейшем уменьшении E видимые аттрактор и репеллер могут весьма сильно «перемешаться», так что предельные режимы при положительных и отрицательных итерациях будут трудно различимы. Другими словами, здесь может наблюдаться явление так называемой *смешанной динамики* (см. введение), когда гиперболические периодические траектории всевозможных типов (устойчивые, вполне неустойчивые и седловые) сосуществуют, и типично, когда они в совокупности не отделимы друг от друга, поскольку их может быть счетное множество (явление Ньюхауса [9, 14]).

Смешанная динамика заведомо имеет место, когда оба седло-фокуса O_1 и O_2 (и с положительной и отрицательной дивергенцией) принадлежат замыканию предельного множе-

⁸Так, хаотическая динамика может возникать в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, рождения инвариантного тора и его дальнейшего разрушения (тор-хаос), жесткой потери устойчивости периодической траектории и т. п. (см., например [20–22]).

ства, к которому стремятся траектории при $t \rightarrow +\infty$ (а значит, по обратимости, и замыканию предельного множества, к которому стремятся траектории при $t \rightarrow -\infty$). На рис. 3b показано предельное множество отображения \mathcal{F}_{0E} при $E = 320$, образующее «единое целое», но состоящее из порядка 20 000 точек, из которых 10 000 — красные, и они получены при положительных итерациях, и 10 000 — серые, и они получены при отрицательных итерациях (при счете таких итераций было по 50 000, но 40 000 первых было отброшено). Таким образом, предельное множество получается «розовым» в среднем. Отметим, что здесь может возникать определенная асимметрия при итерациях «вперед» и «назад», если в динамике отображения \mathcal{F}_{0E} будут присутствовать асимптотически устойчивые и симметричные им асимптотически неустойчивые периодические траектории. Однако обычно такие траектории имеют весьма большие периоды, и поэтому возникающая асимметрия будет достаточно слабой.

При дальнейшем уменьшении E наблюдается процесс разрушения хаоса. Первоначально, его еще можно отождествлять со смешанной хаотической динамикой, в которой принципиальную роль начинают играть симметричные траектории, в частности, эллиптического и эллипτικο-седлового типа (см. рис. 4a), и за их счет динамика становится все больше похожа на интегрируемую консервативную (см. рис. 4b), при стремлении значений E к предельному $E = 100$, отвечающему остановке камня.

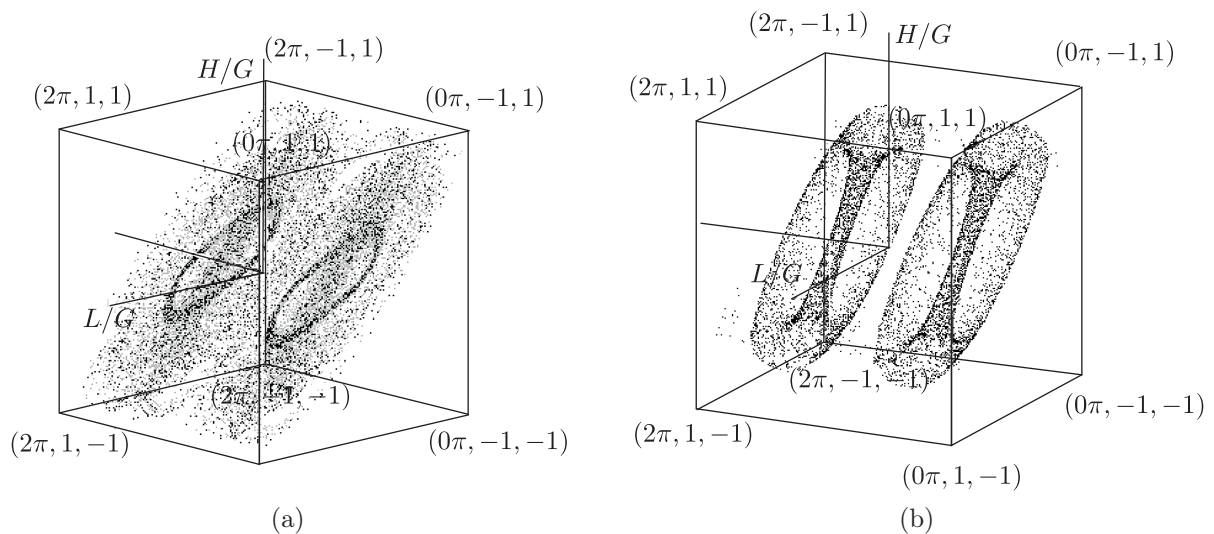


Рис. 4. (a) смешанная динамика при $E = 220$; (b) КАМ-торы при $E = 170$.

Благодарности. Авторы благодарят А. Борисова, И. Мамаева и Д. Тураева за весьма полезные замечания.

Список литературы

- [1] Астапов И. С. Об устойчивости вращения кельтского камня // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 1980, № 2, с. 97–100.
- [2] Карапетян А. В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней // ПММ, 1981, т. 45, № 1, с. 42–51.
- [3] Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ, 1983, т. 47, № 4, с. 575–582.

- [4] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 463 с.
- [5] Borisov A., Kazakov A. Strange attractors in the rock'n'roller in the plane problem // IUTAM Symposium «From Mechanical to Biological Systems: An Integrated Approach» (Izhevsk, Russia, 2012): Book of abstracts. Moscow–Izhevsk: R&C Dynamics, ICS, 2012. P. 17–18.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 293–316.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 117, № 4, с. 407–418.
- [8] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и турбулентность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / Е. А. Леонтович (отв. ред.) и др. Горький: ГГУ, 1986. С. 150–163.
- [9] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с неглубоким гетероклиническим контуром // Тр. МИАН, 1997, т. 216, с. 76–125.
- [10] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Stenkin O. V. On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori // Proc. Internat. Conf. «Progress in Nonlinear Science», dedicated to 100th Anniversary of A. A. Andronov (Nizhny Novgorod, Russia, 2002): Vol. 1: Mathematical problems of nonlinear dynamics. P. 80–102.
- [11] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // Nonlinearity, 2004, vol. 17, no. 4, pp. 1217–1244.
- [12] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazaro J. T., Stenkin O. V. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // Nonlinearity (to appear).
- [13] Gonchenko S., Shilnikov L., Turaev D. Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps // Nonlinearity, 2007, vol. 20, pp. 241–275.
- [14] Newhouse S. E. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology, 1974, vol. 13, pp. 9–18.
- [15] Newhouse S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1979, vol. 50, pp. 101–151.
- [16] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с неглубокой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Докл. РАН, 1993, т. 329, № 4, с. 404–407.
- [17] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб., 1998, т. 189, № 2, с. 137–160.
- [18] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. 384 с.
- [19] Карапетян А. В. Бифуркации Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости // МТТ, 1985, № 2, с. 19–24.
- [20] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [21] Vitolo R. Bifurcations of attractors in 3D diffeomorphisms: Ph. D. Thesis. Groningen, 2003.
- [22] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 3–28.

On some new aspects of Celtic stone chaotic dynamics

Alexander S. Gonchenko¹, Sergey V. Gonchenko², Alexey O. Kazakov³

^{1,2,3}Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics
Ul'yanova st. 10, Nizhnii Novgorod, 603605, Russia

¹agonchenko@mail.ru, ²gosv100@uic.nnov.ru, ³Kazakovdz@yandex.ru

We study chaotic dynamics of a nonholonomic model of celtic stone movement on the plane. Scenarios of appearance and development of chaos are investigated.

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35

Keywords: nonholonomic model, strange attractor, symmetry, bifurcation, mixed dynamics

Received May 8, 2012, accepted June 25, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 507–518 (Russian)