Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 519–522.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.01
MSC 2010: 37J02

Скобка Пуассона движения точки по поверхности

М. Н. Давлетшин

Рассматриваются уравнения движения точки по поверхности в форме уравнений Гамильтона в избыточных координатах. Приводятся явные формулы вычисления скобки Пуассона.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, скобка Пуассона, уравнения в избыточных координатах

Рассмотрим движение материальной точки единичной массы в $\mathbb{R}^n$ по k-мерной регулярной поверхности, задаваемой уравнениями $f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots n-k$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, под действием потенциальных сил. Будем считать, что связь, удерживающая точку, является идеальной и $\operatorname{grad} f_i$ линейно независимы. Если заданы локальные координаты на этой поверхности, то движение точки описывается уравнениями Лагранжа. Однако их вид по каким-то соображениям может быть неудобен. Например, введенные координаты на многообразии могут иметь особенности или вид уравнений движения может быть слишком громоздким, что осложнит поиск первых интегралов и исследование динамики. В работах [1] и [2] обсуждается возможность записи уравнений движения в избыточных координатах в случае движения точки по гиперповерхности в $\mathbb{R}^3$, причем в стандартной симплектической структуре. В работе [3] приводятся уравнения Гамильтона в избыточных координатах, где в качестве дополнительных координат берутся множители Лагранжа λ_i. В общем случае эта задача подробно разбирается в книге [4]; в этой же книге изложен алгоритм действий в случае одной связи, но он может быть обобщен на произвольное количество связей. В нашем случае имеется $n - k$ связей, и мы хотим записать уравнения движения в избыточных декартовых координатах объемлющего пространства, чтобы эти уравнения имели гамильтонов вид $\dot{z} = \{z, H\}$. Это сведет задачу исследования интегрируемости системы к поиску функций, коммутирующих с гамильтонианом H. Разумеется, искомая скобка будет вырожденной — у нее будут существовать функции Казимира.

Получено 19 сентября 2011 года
После доработки 27 декабря 2011 года

Давлетшин Марс Наилевич
marsdavletshin@mail.ru
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

Ниже приводятся гамильтониан и скобка.

Исходные уравнения движения:

$$\dot{y} = -V'(x) + R, \quad \dot{x} = y, \quad f_i = 0, \quad i = 1, \dots n-k. \tag{1}$$

Здесь $V = V(x_1, \dots x_n)$ — потенциальная энергия, $R = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \operatorname{grad} f_i$ — реакция связей. В качестве функции H естественно взять полную механическую энергию $H = \dfrac{y^2}{2} + V(x)$.

Поскольку $\operatorname{grad} f_i$ линейно независимы, $B_{ij} = (\operatorname{grad} f_i, \operatorname{grad} f_j)$ — невырожденная матрица. Введем обозначения:

$$(\operatorname{grad} F, y) = \partial_y F, \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = \partial_j F, \quad \partial_{V'} F = (\operatorname{grad} V, \operatorname{grad} F), \quad (B_{ij})^{-1} = (B^{ij})$$

Тогда $\lambda_j = B^{ij}(\partial_{V'} f_i - \partial_j \partial_y f_i)$.

Определим скобки Пуассона для базисных функций:

$$\{x_m, x_h\} = 0, \tag{2}$$

$$\{x_m, y_h\} = \delta_{mh} - \sum_{i,j=1}^{n-k} B^{ij} \partial_m f_i \partial_h f_j, \tag{3}$$

$$\{y_m, y_h\} = \sum_{i,j=1}^{n-k} B^{ij} \left(\partial_m \partial_y f_i \partial_h f_j - \partial_h \partial_y f_i \partial_m f_j\right). \tag{4}$$

Если положить $z = (x, y)$, то на нулевом уровне функций Казимира $f_i(x)$, $(y, \operatorname{grad} f_i)$, $i = 1 \dots, n-k$, уравнения движения примут вид (1).

Заметим, что указанная пуассонова структура — частный случай скобки Дирака, вернее ее редукции, которая подробно разобрана в книгах [4] и [5].

Покажем, однако, что эта билинейная кососимметрическая операция в самом деле является скобкой Пуассона. Для того чтобы билинейная кососимметрическая операция, задаваемая формулами (2)–(4), была скобкой Пуассона, необходимо проверить еще выполнение тождества Якоби, которое достаточно проверить для базисных функций.

Покажем, например, что

$$\{\{x_l, y_h\}, y_m\} + \{\{y_h, y_m\}, x_l\} + \{\{y_m, x_l\}, y_h\} = 0. \tag{5}$$

Действительно,

$$\{\{x_l, y_h\}, y_m\} = -\left\{B^{ij} \partial_l f_i \partial_h f_j, y_m\right\} = A_1 + A_2 + A_3,$$

где

$$\begin{aligned}
&A_1 = -B^{ij} \partial_l f_i \partial_h \partial_s f_j (\delta_{sm} - B^{\gamma\epsilon} \partial_s f_\gamma \partial_m f_\epsilon),\\
&A_2 = B^{ij} \partial_h f_j \partial_l \partial_s f_i (\delta_{sm} - B^{\gamma\epsilon} \partial_s f_\gamma \partial_m f_\epsilon),\\
&A_3 = \partial_l f_j \partial_h f_i B^{i\alpha} \partial_s B_{\alpha\beta} B^{\beta j} (\delta_{sm} - B^{\gamma\epsilon} \partial_s f_\gamma \partial_m f_\epsilon),\\
&\{\{y_m, x_l\}, y_h\} = B^{ij} \partial_l f_i \partial_m \partial_s f_j (\delta_{sh} - B^{\gamma\epsilon} \partial_s f_\gamma \partial_h f_\epsilon) +\\
&\qquad + B^{ij} \partial_m f_j \partial_l \partial_s f_i (\delta_{sh} - B^{\gamma\epsilon} \partial_s f_\gamma \partial_h f_\epsilon) - \partial_l f_j \partial_m f_i B^{i\alpha} \partial_s B_{\alpha\beta} B^{\beta j} (\delta_{sh} - B^{\gamma\epsilon} \partial_s f_\gamma \partial_h f_\epsilon),\\
&\{\{y_h, y_m\}, x_l\} = B^{ij} \partial_m f_j \{\partial_h \partial_y f_i, x_l\} - B^{ij} \partial_h f_j \{\partial_m \partial_y f_i, x_l\} =
\end{aligned}$$

$$= -B^{ij}\partial_m f_j \partial_l \partial_h f_i + B^{ij}\partial_m f_j \partial_\alpha \partial_h f_i B^{\beta\gamma}\partial_l f_\beta \partial_\alpha f_\gamma + B^{ij}\partial_h f_j \partial_l \partial_m f_i -$$
$$- B^{ij}\partial_h f_j \partial_\alpha \partial_m f_i B^{\beta\gamma}\partial_l f_\beta \partial_\alpha f_\gamma.$$

Было использовано, что $\partial_m B^{ij} = -B^{i\alpha}\partial_m B_{\alpha\beta}B^{\beta j}$.

Если теперь сложить полученные выражения, то получим (5). Аналогичным образом проверяется, что

$$\{\{y_l, y_h\}, y_m\} + \{\{y_h, y_m\}, y_l\} + \{\{y_m, y_l\}, y_h\} = 0. \tag{6}$$

Заметим, что функции $f_i(x)$ и $(y, \mathrm{grad}\ f_i)$, $i = 1\ldots, n-k$, являются функциями Казимира для этой скобки.

Действительно, для любой функции $F(x, y)$

$$\{f_i(x), F(x,y)\} = \frac{\partial F}{\partial y_j}\,\partial_l f_i \{x_l, y_j\} = \frac{\partial F}{\partial y_j}\,\partial_l f_i (\delta_{li} - B^{\alpha\beta}\partial_l f_\alpha \partial_i f_\beta)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y_j}\left(\partial_i f_i - \partial_l f_i B^{\alpha\beta}\partial_l f_\alpha \partial_i f_\beta\right) = 0.$$

Покажем теперь, что $\{(y, \mathrm{grad}\ f_i), F(x,y)\} = 0$ для любой функции $F(x,y)$:

$$\{(y, \mathrm{grad}\ f_i), F(x,y)\} = \partial_l f_i \partial_h F\{y_l, x_h\} + y_l \partial_l \partial_h f_i \frac{\partial F}{\partial y_m}\{x_h, y_m\} + \partial_l f_i \frac{\partial F}{\partial y_m}\{y_l, y_m\} =$$
$$= \partial_l f_i \partial_h F\left(-\delta_{hl} + B^{\alpha\beta}\partial_l f_\alpha \partial_h f_\beta\right) + y_l \partial_h \partial_l f_i \frac{\partial F}{\partial y_m}\left(\delta_{hm} - B^{\alpha\beta}\partial_m f_\alpha \partial_h f_\beta\right) +$$
$$+ \partial_l f_i \frac{\partial F}{\partial y_m} B^{\alpha\beta}\left(\partial_l \partial_y f_\alpha \partial_m f_\beta - \partial_m \partial_y f_\alpha \partial_l f_\beta\right) = 0 + y_l \partial_l \partial_m f_i \frac{\partial F}{\partial y_m} -$$
$$- y_l \partial_l \partial_m f_i \frac{\partial F}{\partial y_m} B^{\alpha\beta}\partial_m f_\alpha \partial_h f_\beta + y_l \partial_l \frac{\partial F}{\partial y_m} B^{\alpha\beta}\partial_l \partial_y f_\alpha \partial_m f_\beta -$$
$$- y_l \partial_l \frac{\partial F}{\partial y_m} B^{\alpha\beta}\partial_m \partial_y f_\alpha \partial_l f_\beta = 0.$$

В случае движения точки по гиперповерхности соответствующие формулы будут иметь вид

$$\{x_i, x_k\} = 0б \tag{7}$$

$$\{x_i, y_k\} = \delta_{ij} - \frac{1}{|\,\mathrm{grad}\ f|^2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{8}$$

$$\{y_i, y_k\} = \frac{1}{|\,\mathrm{grad}\ f|^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{\partial(\mathrm{grad}\ f)}{\partial x_i}, y\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(\mathrm{grad}\ f)}{\partial x_k}, y\right)\right). \tag{9}$$

Пример 1. Пусть, например, наша поверхность является сферой, которая задается уравнением $x^2 = 1$. Тогда скобка Пуассона примет вид

$$\{x_m, x_h\} = 0 \quad \{x_m, y_h\} = \delta_{mh} - \frac{x_m x_h}{x^2}, \quad \{y_m, y_h\} = \frac{y_m x_h - y_h x_m}{x^2}.$$

Тогда функциями Казимира будут функции $g_1(x) = x^2$, $g_2 = (x, y)$. В книге [6] приводится пример интегрируемой системы на n-мерной сфере в случае квадратичного потенциала (задача Неймана).

Пример 2. Пусть точка движется по группе $SL(n, \mathbb{R})$. Тогда уравнение, задающее поверхность, имеет вид $\det A = 1$, $A = (x_{ij})$. В этом случае $k = n^2 - 1$ и соответствующие скобки Пуассона вычисляются по формулам (7)–(9).

При $n = 2$ формулы имеют вид

$$\{x_i, x_j\} = 0,$$

$$\{x_1, y_1\} = 1 - \frac{x_4^2}{x^2}, \qquad \{x_2, y_2\} = 1 - \frac{x_3^2}{x^2},$$

$$\{x_3, y_3\} = 1 - \frac{x_2^2}{x^2}, \qquad \{x_4, y_4\} = 1 - \frac{x_1^2}{x^2},$$

$$\{x_1, y_2\} = \{x_2, y_1\} = \frac{x_3 x_4}{x^2}, \qquad \{x_1, y_3\} = \{x_3, y_1\} = \frac{x_2 x_4}{x^2},$$

$$\{x_1, y_4\} = \{x_4, y_1\} = -\frac{x_1 x_4}{x^2}, \qquad \{x_2, y_3\} = \{x_3, y_2\} = -\frac{x_2 x_3}{x^2},$$

$$\{x_2, y_4\} = \{x_4, y_2\} = \frac{x_1 x_3}{x^2}, \qquad \{x_3, y_4\} = \{x_4, y_3\} = \frac{x_1 x_2}{x^2},$$

$$\{y_1, y_2\} = \frac{y_3 x_4 - x_3 y_4}{x^2}, \qquad \{y_1, y_3\} = \frac{y_2 x_4 - x_2 y_4}{x^2},$$

$$\{y_1, y_4\} = \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x^2}, \qquad \{y_2, y_3\} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{x^2},$$

$$\{y_3, y_4\} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x^2}, \qquad \{y_2, y_4\} = \frac{y_1 x_3 - x_1 y_3}{x^2}.$$

Соответствующие функции Казимира: $g_1 = x_1 x_4 - x_2 x_3$, $g_2 = y_1 x_4 - y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_4 x_1$.

Список литературы

[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

[2] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 432 с.

[3] Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1999. 464 с.

[5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Скобки Дирака в геометрии и механике // Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. Ижевск: РХД, 1998. С. 191–226.

[6] Мозер Ю. Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. Ижевск: РХД, 1999. 296 с.

A Poisson's bracket of a point motion on a surface

Mars N. Davletshin

M. V. Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory 1, Moscow, 119992, Russia
marsdavletshin@mail.ru

In this article we deal with equations of a point motion on a surface in the Hamiltonian form in redundant coordinates. We also give explicit formulae of the Poisson's bracket.

MSC 2010: 37J02
Keywords: hamiltonian systems, Poisson's bracket, equations in surplus coordinates

Received September 19, 2011, accepted December 27, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 519–522 (Russian)