Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 541–547.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45

О неголономных системах Веселовой и Чаплыгина

А. В. Цыганов

Доказана траекторная эквивалентность задачи Чаплыгина о качении шара, системы Веселовой на алгебре Ли $e^*(3)$ и одной гамильтоновой системы на двумерной сфере с нестандартной метрикой.

Ключевые слова: неголономные системы, скобки Пуассона

1. Задача Чаплыгина о качении шара

Шаром Чаплыгина [8] называют динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью, которое катится без проскальзывания по шероховатой плоскости. Геометрический центр шара совпадает с центром масс, но все три момента инерции различны. Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта имеет вид

$$v + \omega \times r = 0, \tag{1.1}$$

где ω и v — угловая скорость и скорость центра масс тела, r — вектор из центра масс в точку контакта относительно подвижной системы координат, связанной с главными осями шара. В этой системе координат угловой момент шара относительно точки касания имеет вид

$$M = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})\omega - d(x, \omega)x, \quad d = mb^2. \tag{1.2}$$

Здесь m — масса, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции и b — радиус шара, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности шара в точке контакта, а $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Получено 4 марта 2012 года
После доработки 23 апреля 2012 года

Работа выполнена в УдГУ в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, дог. № 11.G34.31.0039.

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

Скобки (a, b) обозначают обычное скалярное произведение, а $a \times b$ — векторное произведение трехмерных векторов.

Уравнения движения, после подстановки в них множителей Лагранжа, найденных с помощью уравнения связи (1.1), имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega, \quad \dot{x} = x \times \omega, \tag{1.3}$$

где

$$\omega = \mathbf{A}_g\, M, \quad \mathbf{A}_g = \Big(\mathbf{A} + d\, g^{-2}\, \mathbf{A}\, \big(x \otimes x\big)\, \mathbf{A}\Big) \tag{1.4}$$

и

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Эти уравнения обладают интегралами движения

$$H_1 = (M, \mathbf{A}_g M), \quad H_2 = (M, M), \quad H_3 = (x, x), \quad H_4 = (x, M) \tag{1.5}$$

и инвариантной мерой

$$\mu_{ch} = g^{-1} \mathrm{d}x \mathrm{d}M, \quad g = \sqrt{1 - d(x, \mathbf{A}x)}. \tag{1.6}$$

Согласно [1, 3], интегралы движения (1.5) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона

$$\{M_i, M_j\}_g = \varepsilon_{ijk} \left(g M_k - \frac{d(M, \mathbf{A}x)}{g} x_k \right), \quad \{M_i, x_j\}_g = \varepsilon_{ijk} g x_k, \quad \{x_i, x_j\}_g = 0, \tag{1.7}$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, а уравнения движения имеют вид

$$\frac{dz}{dt} = g^{-1} \{H, z\}_g, \quad H = \frac{H_1}{2}. \tag{1.8}$$

Эти уравнения после замены времени

$$dt \to g\, dt \tag{1.9}$$

становятся гамильтоновыми относительно скобки Пуассона (1.7).

Таким образом, после замены времени мы получаем гамильтонову систему с нестандартными скобками Пуассона (1.7). Далее мы можем использовать замену переменных

$$\begin{aligned} L_1 &= g^{-1} \left(M_1 - \frac{b x_1}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) \right) + \frac{c x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_2 &= g^{-1} \left(M_2 - \frac{b x_2}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) \right) + \frac{c x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_3 &= g^{-1} \left(M_3 - \frac{b x_3}{(x, x)} \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu} \right) \right), \end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$b = (x, M), \quad c = (x, L), \quad \nu = x_1^2 + x_2^2 - d(x,x)(a_1x_1^2 + a_2x_2^2),$$

которая приводит скобки Пуассона (1.7) к каноническим скобкам Пуассона алгебры $e^*(3)$

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}L_k, \quad \{L_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0. \tag{1.11}$$

Применяя обратное преобразование переменных

$$\begin{aligned}
M_1 &= g\left(L_1 - \frac{cx_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) + \frac{bx_1}{(x,x)}\left(1 + \frac{x_3^2}{\nu}\right),\\
M_2 &= g\left(L_2 - \frac{cx_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) + \frac{bx_2}{(x,x)}\left(1 + \frac{x_3^2}{\nu}\right),\\
M_3 &= gL_3 + \frac{bx_3}{(x,x)}\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu}\right)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

к исходным интегралам движения (1.5), можно легко получить интегрируемую гамильтонову систему на сфере, эквивалентную неголономной системе Чаплыгина. Свойства подобных преобразований и возможности их использования в динамике твердого тела подробно обсуждаются в книге [2].

В случае Чаплыгина при $c = 0$ в преобразовании (1.12) исходные интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) имеют вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_1 &= g^2(L, \mathbf{A}_g L) + \frac{2bg}{\nu}\Big((x, \mathbf{A}L) - a_3x_3L_3\Big) + \frac{b^2(a_1x_1 + a_2x_2)\big(1 - d(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)\big)}{\nu^2},\\
\widetilde{H}_2 &= g^2(L, L) + \frac{2bgx_3L_3}{\nu} + b^2\left(1 + \frac{x_3^2(x_1^2 + x_2^2)}{\nu^2}\right).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Согласно [10], гамильтоновы системы с такими интегралами движения допускают частичное разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Как и для случая Клебша, соответствующие переменные разделения эволюционируют на примиане алгебраической кривой, которая не является гиперэллиптической, в отличие от разделения переменных Чаплыгина [8]. Вопрос о полном разделении переменных для таких двумерных гамильтоновых систем с линейными по моментам слагаемыми в гамильтониане остается открытым.

Напомним, что задачу о качении шара С. А. Чаплыгин проинтегрировал в квадратурах в работе [8], используя линейное по фазовым переменным преобразование с коэффициентами, зависящими от констант первых интегралов. В работе [4] подробно исследуются геометрические свойства преобразования Чаплыгина с точки зрения траекторного изоморфизма двух систем одного и того же типа на различных уровнях интеграла энергии. Обобщение этого преобразования на случай гамильтоновых систем на сфере с линейными по импульсам слагаемыми в гамильтониане, отвечающими гироскопическим силам, позволит проинтегрировать многие аналогичные системы, возникающие в динамике твердого тела [2, 10].

2. Система Веселовой

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с его центром масс при наличии неголономной связи

$$(\omega, x) = 0. \tag{2.1}$$

В данном случае проекция угловой скорости на x равна нулю, что означает отсутствие верчения вокруг вектора x [6, 7]. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega + \lambda x, \quad \dot{x} = x \times \omega. \tag{2.2}$$

Здесь M — момент количества движения, $\omega = \widehat{\mathbf{A}}M$ — угловая скорость тела, x — орт неподвижной оси в подвижной системе координат и $\widehat{\mathbf{A}}$ — диагональная невырожденная матрица

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{a}_3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя уравнения движения в производную от связи (2.1) по времени, мы может исключить из уравнений движения (2.2) множитель Лагранжа λ, который равен

$$\lambda = \frac{(\widehat{\mathbf{A}}M \times M, \widehat{\mathbf{A}}x)}{(\widehat{\mathbf{A}}x, x)}.$$

Задача имеет четыре интеграла

$$\widehat{H}_1 = (M, \widehat{\mathbf{A}}M), \quad \widehat{H}_2 = (M, M) - (x, x)^{-1}(x, M)^2, \qquad \widehat{H}_3 = (x, x), \qquad \widehat{H}_4 = (x, \omega)$$

и инвариантную меру

$$\mu_{ves} = \widehat{g}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}M, \quad \widehat{g}(x) = (x, \mathbf{A}x)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Интегралы движения находятся в инволюции относительно скобок Пуассона

$$\begin{gathered} \{M_i, M_j\}_{ag} = \frac{\varepsilon_{ijk}}{a_i a_j}\left(a_k \widehat{g}^{\,-1} M_k + x_k \sum_{m=1}^{3} a_m M_m \partial_m \widehat{g}^{\,-1}\right), \\ \{M_i, x_j\}_{ag} = \varepsilon_{ijk}\,\widehat{g}^{-1}\,a_i^{-1}\,x_k, \quad \{x_i, x_j\}_{ag} = 0 \end{gathered}$$

при выполнении условия (2.1). Приведение скобок Пуассона $\{.\,,.\}_{ag}$ к каноническим скобкам Ли–Пуассона (1.11) и эквивалентность данной неголономной системы шару Чаплыгина без верчения обсуждается в работе [3].

3. Эквивалентность систем Веселовой и Чаплыгина

В работах [3, 5, 9] «математические» уравнения (2.2) переписаны в более «физической» форме

$$\mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\omega \times \omega + \lambda x, \quad \dot{x} = x \times \omega,$$

где $\mathbf{I} = \widehat{\mathbf{A}}^{-1}$ — тензор инерции тела, а неопределенный множитель Лагранжа выводится из механических соображений

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{I}^{-1}x, \mathbf{I}\omega \times \omega)}{(\mathbf{I}^{-1}x, x)}.$$

Связь между соответствующими динамическими системами подробно обсуждается в [5].

В данном разделе мы продолжим исследовать уравнения движения (2.2) в их первоначальной форме, приведенной в работе [7]. В этом случае легко проверить, что исходные уравнения движения (2.2) остаются интегрируемыми, если вместо (2.1) положить

$$(\omega, x) = b, \quad b \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

(см. [9]). Кроме того, в той же работе Фёдорова [9] было предложено вместо M ввести постоянный в пространстве вектор K по правилу

$$K = M - \frac{\Big((\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{A}})M, x\Big)}{(x,x)}, \quad (x, K) = (x, \omega) = b,$$

так что исходные уравнения движения (2.2) для системы Веселовой примут вид

$$\dot{K} = K \times \omega, \qquad \dot{x} = x \times \omega, \quad \text{где} \quad \omega = \widehat{\mathbf{A}}M. \tag{3.2}$$

Так как якобиан преобразования координат пропорционален множителю Якоби исходной задачи Веселовой

$$\det\left|\frac{\partial(x,M)}{\partial(x,K)}\right| = \widehat{g}^2(x) \equiv \widehat{a}_1x_1^2 + \widehat{a}_2x_2^2 + \widehat{a}_3x_3^2,$$

то преобразование координат $M \to K$ обратимо везде, где существует инвариантная мера μ_{ves} (2.3) и где существует замена времени, позволяющая проинтегрировать уравнения движения в квадратурах [6].

В новых переменных инвариантная мера уравнений движения (3.2) имеет вид

$$\mu = \widehat{g}^{\,-1}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}K, \quad \widehat{g}(x) = (x, \widehat{\mathbf{A}}x)^{1/2}, \tag{3.3}$$

а интегралы движения —

$$\widehat{H}_1 = (K, \widehat{\mathbf{A}}_g K), \quad \widehat{H}_2 = (K, K), \quad \widehat{H}_3 = (x, x), \quad \widehat{H}_4 = (x, K), \tag{3.4}$$

где

$$\widehat{\mathbf{A}}_g = \widehat{\mathbf{A}} - \widehat{g}^{\,-2}\,(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{A}})\,(x \otimes x)\,(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{A}}).$$

Интегралы движения находятся в инволюции относительно скобок Пуассона

$$\begin{aligned} \big\{K_i, K_j\big\}_v &= \varepsilon_{ijk}\,\widehat{g}K_k + \varepsilon_{ijk}\,x_k\left(\sum_{m=1}^{3} K_m\partial_m\widehat{g} - \frac{b}{\widehat{g}}\right), \\ \big\{K_i, x_j\big\}_v &= \varepsilon_{ijk}\,\widehat{g}\,x_k, \quad \big\{x_i, x_j\big\}_v = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

для которых (x, x) и (x, K) являются функциями Казимира. Уравнения движения (3.2)

$$\frac{d}{dt}\,z = \widehat{g}^{\,-1}(x)\,\{H, z\}_v\,, \quad H = \frac{\widehat{H}_1}{2}, \tag{3.6}$$

становятся гамильтоновыми после замены времени $dt \to \widehat{g}\,dt$.

Предложение 1. *Скобки Пуассона* $\{.,.\}_v$ (3.5) *и инвариантная мера* μ (3.3) *для системы Веселовой совпадают со скобками Пуассона* $\{.,.\}_g$ (1.7) *и инвариантной мерой* μ_{ch} (1.6) *для шара Чаплыгина, если* $(x,x)=1$ *и параметры задач связаны соотношением*

$$\widehat{a}_i = 1 - da_i, \tag{3.7}$$

а интегралы движения $\widehat{H}_i$ (3.4) *системы Веселовой выражаются через интегралы движения* H_i (1.5) *системы Чаплыгина*

$$\widehat{H}_1 = H_2 - dH_1, \quad \widehat{H}_2 = H_2, \quad \widehat{H}_3 = H_3, \quad \widehat{H}_4 = H_4. \tag{3.8}$$

Скобки Пуассона $\{.,.\}_v$ для системы Веселовой приводятся к каноническим скобкам Пуассона на алгебре $e^*(3)$ преобразованием (3.9), совпадающим с преобразованием (1.10), с точностью до замены параметров (3.7)

$$\begin{aligned}
L_1 &= \widehat{g}^{-1}\left(K_1 - \frac{bx_1}{(x,x)}\left(1 + \frac{x_3^2}{\nu}\right)\right) + \frac{cx_1}{x_1^2 + x_2^2},\\
L_2 &= \widehat{g}^{-1}\left(K_2 - \frac{bx_2}{(x,x)}\left(1 + \frac{x_3^2}{\nu}\right)\right) + \frac{cx_2}{x_1^2 + x_2^2},\\
L_3 &= \widehat{g}^{-1}\left(K_3 - \frac{bx_3}{(x,x)}\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu}\right)\right), \quad \nu = \widehat{a}_1 x_1^2 + \widehat{a}_2 x_2^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Обратное отображение также совпадает с отображением для системы Чаплыгина (1.12) после замены параметров (3.7).

При c = 0 преобразование (3.9) отображает систему Веселовой в ту же самую интегрируемую систему на сфере что и для задачи Чаплыгина (1.13), а исходные интегралы движения имеют вид

$$\widehat{H}_1 = \widetilde{H}_2 - d\widetilde{H}_1, \quad \widehat{H}_2 = \widetilde{H}_2, \tag{3.10}$$

если параметры этих систем связаны соотношением (3.7).

Таким образом, неголономная система Веселовой эквивалентна и неголономной системе Чаплыгина и соответствующей интегрируемой гамильтоновой системе на сфере. Эти три системы обладают общим слоением совместной поверхности интегралов движения на торы Лиувилля и общими траекториями, если рассматривать их в непараметрической форме.

Заметим, что именно благодаря этой эквивалентности преобразование Чаплыгина [8] практически без изменений переносится и на систему Веселовой [9].

Список литературы

[1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. 296 с.

[3] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338.

[5] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Избранные задачи неголономной механики: Препринт (см.: http://ics.org.ru/doc?book=30&dir=r).

[6] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика: Сб. ст. / В. В. Козлов, А. Т. Фоменко (ред.). М.: МГУ, 1986. С. 64–68.

[7] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Интегрируемые неголономные системы на группах Ли // Матем. заметки, 1988, т. 44, № 5, с. 604–619.

[8] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.)

[9] Фёдоров Ю. Н. О двух интегрируемых неголономных системах в классической динамике // Вестн. МГУ. Сер. Матем. Механ., 1989, № 4, с. 38–41.

[10] Марихин В. Г., Соколов В. В. О приведении пары квадратичных по импульсам гамильтонианов к канонической форме и о вещественном частичном разделении переменных для волчка Клебша // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 313–332.

On the nonholonomic Veselova and Chaplygin systems

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia
andrey.tsiganov@gmail.com

We prove the trajectory equivalence of the Chaplygin sphere problem, the Veselova system on $e^*(3)$ and a Hamiltonian system on two-dimensional sphere with the non-standard metric.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45
Keywords: nonholonomic systems, Poisson brackets

Received March 4, 2012, accepted April 23, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 541–547 (Russian)