Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 549–568.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531+532.527
MSC 2010: 70Hxx

Расширенный метод Гамильтона – Якоби

В. В. Козлов

Развивается метод точного интегрирования канонических дифференциальных уравнений Гамильтона, основанный на поиске семейств вихревых инвариантных многообразий определенного вида. Случай потенциальных (лагранжевых) многообразий отвечает классическому методу Гамильтона – Якоби.

Ключевые слова: обобщенные уравнения Ламба, вихревые многообразия, потенциалы Клебша, скобки Лагранжа

1. Потенциалы Клебша

В [1] развит вихревой метод интегрирования дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.1}$$

Гамильтониан H — гладкая функция от координат $x = (x_1, \ldots, x_n)$, импульсов $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и времени t. Этот метод связан с поиском полного решения системы обобщенных уравнений Ламба

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) v_j = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.2}$$

Здесь

$$u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t))$$

— ковекторное поле на конфигурационном пространстве $M^n = \{x\}$,

$$v_j(x,t) = \left. \frac{\partial H}{\partial y_j} \right|_{y=u(x,t)}$$

Получено 2 сентября 2011 года
После доработки 28 декабря 2011 года

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

— компоненты векторного поля на M^n,

$$h(x,t) = H(x, u(x,t), t).$$

Уравнения (1.2) представляют замкнутую нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $u_1, \ldots, u_n$. Решения системы (1.2) и только они порождают инвариантные n-мерные многообразия уравнений Гамильтона

$$\Sigma_t = \{x, y\colon y_1 = u_1(x,t), \ldots, y_n = u_n(x,t)\},$$

которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство.

Напомним, что полное решение системы (1.2) — это семейство решений $u(x,t,c)$, гладко зависящее еще от n параметров $c = (c_1, \ldots, c_n)$, такое, что

$$\det \left\| \frac{\partial u_i}{\partial c_j} \right\| \neq 0. \tag{1.3}$$

Геометрическая теория полных решений обобщенного уравнения Ламба развита в [1]. Мы рассмотрим аналитический аспект этой теории применительно к задаче точного интегрирования дифференциальных уравнений Гамильтона.

Будем искать решение системы (1.2) следующего вида:

$$\omega = \sum u_i\, dx_i = \alpha_1\, d\beta_1 + \ldots + \alpha_k\, d\beta_k + dS. \tag{1.4}$$

Здесь $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ — функции от $x_1, \ldots, x_{2k}$, времени и параметров $c_1, \ldots, c_n$, причем матрица скобок Лагранжа

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & [x_1, x_2] & \ldots & [x_1, x_{2k}] \\ [x_2, x_1] & 0 & \ldots & [x_2, x_{2k}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [x_{2k}, x_1] & [x_{2k}, x_2] & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

невырожденна. Напомним определение скобки Лагранжа:

$$[x_i, x_j] = \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial x_j} \frac{\partial \beta_s}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} \frac{\partial \beta_s}{\partial x_j} \right).$$

В определенном смысле скобки Лагранжа двойственны скобкам Пуассона (обсуждение см., например, в [2]).

В (1.4) дифференцирований по t и c нет. Формула (1.4) эквивалентна следующей серии соотношений:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial S}{\partial x_1} + \alpha_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_k \frac{\partial \beta_k}{\partial x_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{2k} &= \frac{\partial S}{\partial x_{2k}} + \alpha_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x_{2k}} + \ldots + \alpha_k \frac{\partial \beta_k}{\partial x_{2k}}, \\ u_{2k+1} &= \frac{\partial S}{\partial x_{2k+1}}, \ldots, u_n = \frac{\partial S}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

По аналогии с гидродинамикой функции

$$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k \text{ и } S$$

будем называть потенциалами Клебша. В типичном случае (когда дифференциальная 1-форма ω имеет постоянный класс) потенциалы Клебша всегда существуют. Подчеркнем, что функция S может зависеть от всех координат $x_1, \ldots, x_n$.

Положим еще

$$h' = \frac{\partial S}{\partial t} + h. \tag{1.6}$$

Предложение 1. *В указанных предположениях функция h' не зависит от $x_{2k+1}, \ldots, x_n$, а переменные*

$$(x_1, \ldots, x_{2k}) = x'$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \Omega \dot{x}' = -\frac{\partial h'}{\partial x'}, \tag{1.7}$$

где

$$u' = \left(\sum \alpha_i \frac{\partial \beta_i}{\partial x_1}, \ldots, \sum \alpha_i \frac{\partial \beta_i}{\partial x_{2k}}\right).$$

Ясно, что матрица Ω совпадает с матрицей ротора ковекторного поля u':

$$\Omega = \frac{\partial u'}{\partial x'} - \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Системы вида (1.7) часто называются системами Биркгофа [3, 4]. Если функции ξ и η не зависят явно от времени, то $\partial u'/\partial t = 0$ и уравнение (1.7) совпадает с обычным уравнением Гамильтона, но представленным не в канонических переменных. Симплектическая структура определяется кососимметрической матрицей Ω, а гамильтонианом служит функция h'.

В переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(n-2k)$-мерные вихревые многообразия матрицы ротора поля u задаются равенствами

$$x_1 = \gamma_1, \ldots, x_{2k} = \gamma_{2k}, \quad \gamma_j = \mathrm{const}.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7) — это система на $2k$-мерном пространстве, которая получается из конфигурационного пространства факторизацией по вихревым многообразиям. Такая система названа в [1] фактор-системой. Ее конструкция тесно связана с многомерными обобщениями классических теорем Бернулли и Гельмгольца из гидродинамики идеальной жидкости.

Подчеркнем еще, что предложение 1 справедливо при каждом фиксированном значении папараметра c.

Доказательство предложения 1. Матрица ротора ковекторного поля (1.5) имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} \Omega & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Далее, при всех $j > 2k$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_j\, \partial t}.$$

Поэтому последние $n - 2k$ уравнений системы Ламба (1.2) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = 0, \quad j > 2k.$$

Остается проверить, что первые $2k$ уравнений системы (1.2) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям (1.7).

2. Основная теорема

Через $b_1, \ldots, b_n$ обозначим начальные координаты гамильтоновой системы (1.1):

$$x_i(0) = b_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \quad x'(0) = (b_1, \ldots, b_{2k}) = b'.$$

Напомним, что система Биркгофа (1.7) зависит еще от n параметров $c_1, \ldots, c_n$. Пусть

$$x' = X(t, b', c) \tag{2.1}$$

— общее решение замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7):

$$X(0, b', c) = b'$$

при всех значениях $c = (c_1, \ldots, c_n)$.

Теорема 1. *Пусть* $u(x, t, c)$ *— полное решение системы уравнений Ламба* (1.2) *вида* (1.5)*, причем*

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial c_i\, \partial x_j} \right\| \neq 0, \quad i, j = 2k+1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Если известно общее решение (2.1) *системы* (1.7)*, то остальные канонические переменные*

$$x_{2k+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$$

в системе уравнений Гамильтона (1.1) *находятся из соотношений*

$$\left.\frac{\partial S}{\partial c_j}\right|_{x'=X} = \int\limits_0^t \left[\frac{\partial h'}{\partial c_j} + \sum_{i=1}^{2k} \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial c_j}\left(\sum_{s=1}^{k} \alpha_s \frac{\partial \beta_s}{\partial x_i}\right)\right]_{x'=X} dt + a_j, \tag{2.3}$$

$$a_j = \left.\frac{\partial S}{\partial c_j}\right|_{t=0}, \quad j = 2k+1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

и

$$y_1 = u_1(x, t, c), \ldots, y_n = u_n(x, t, c). \tag{2.5}$$

Доказательство. Согласно предложению 1,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n, t) = h'(x_1, \ldots, x_{2k}, t, c_1, \ldots, c_n). \tag{2.6}$$

Вычислим сначала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial c_j}\right)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial c_j} + \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial c_j}\,\dot{x}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial c_j} + \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial c_j}\,\frac{\partial H}{\partial y_i}\bigg|. \tag{2.7}$$

Вертикальная черта обозначает подстановку (2.5). С другой стороны, согласно (2.6),

$$\frac{\partial h'}{\partial c_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial c_j\,\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i}\bigg|\,\frac{\partial u_i}{\partial c_j}.$$

Далее, по формулам (1.5),

$$\frac{\partial u_i}{\partial c_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial c_j\,\partial x_i} + \theta_{ij},$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \frac{\partial}{\partial c_j}\left[\sum_{s=1}^{k}\alpha_s\frac{\partial \beta_s}{\partial x_i}\right], && 1 \leqslant i \leqslant 2k, \\ \theta_{ij} &= 0, && i > 2k. \end{aligned}$$

Ясно, что дополнительные слагаемые θ_{ij} не зависят от $x_{2k+1}, \ldots, x_n$.

Следовательно,

$$\frac{\partial h'}{\partial c_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial c_j\,\partial t} + \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial c_j\,\partial x_i}\,\frac{\partial H}{\partial y_i}\bigg| + \sum_{i=1}^{2k}\theta_{ij}\dot{x}_i. \tag{2.8}$$

Сопоставляя (2.7) с (2.8), приходим к равенству

$$\left(\frac{\partial S}{\partial c_j}\right)^{\cdot} = \frac{\partial h'}{\partial c_j} - \sum_{i=1}^{2k}\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial c_j}\left(\sum_{s=1}^{k}\alpha_s\frac{\partial \beta_s}{\partial x_i}\right). \tag{2.9}$$

Отметим между прочим, что это равенство справедливо при всех $j = 1, \ldots, n$.

Производные $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{2k}$ находятся из (1.7) как функции от $x_1, \ldots, x_{2k}$, времени t и параметров $c_1, \ldots, c_n$. Подставляя в правую часть соотношения (2.9) решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7) и интегрируя по t, получаем искомую формулу (2.3). Конечно, в выражениях для $\partial S/\partial c_j$ также следует сделать подстановку (2.1).

При $t = 0$ решениями $n - 2k$ уравнений (2.3)–(2.4) будут, очевидно,

$$x_{2k+1} = b_{2k+1}, \ldots, x_n = b_n.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции (с учетом условия (2.2)) из (2.3)–(2.4) можно найти координаты $x_{2k+1}, \ldots, x_n$ как функции времени и $2n$ параметров

$$b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n. \tag{2.10}$$

Подстановка координат в формулы (2.5) дает нам импульсы в виде функций времени и параметров (2.10). В результате мы получили общее решение дифференциальных уравнений Гамильтона, так как при $t = 0$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} = \det\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline \bigstar & \dfrac{\partial u}{\partial c} \end{array}\right] = \det\left\|\frac{\partial u_i}{\partial c_j}\right\| \neq 0.$$

Теорема доказана. ■

Рассмотрим некоторые частные случаи.

a) Пусть $k = 0$. Тогда все α, β равны нулю и h' — функция времени и параметров $c_1, \ldots, c_n$. Согласно теореме 1, общее решение системы канонических уравнений Гамильтона определяется по формулам

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} = \int\limits_0^t \frac{\partial h'}{\partial c_j}\,dt + a_j, \quad a_j = \left.\frac{\partial S}{\partial c_j}\right|_{t=0}, \tag{2.11}$$

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Ясно, что

$$\int\limits_0^t \frac{\partial h'}{\partial c_j}\,dt = \frac{\partial}{\partial c_j} \int\limits_0^t h'\,dt.$$

После подстановки

$$\widehat{S} = S - \int\limits_0^t h'\,dt \tag{2.13}$$

соотношения (2.11)–(2.12) принимают вид классических формул Якоби:

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial c_j} = a_j, \quad y_i = \frac{\partial \widehat{S}}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Вторая формула (2.11) при этом не меняется:

$$a_j = \left.\frac{\partial \widehat{S}}{\partial c_j}\right|_{t=0}.$$

Таким образом, теорема 1 является прямым обобщением теоремы Якоби о полном интеграле. Кроме того, формулами (2.11)–(2.12) можно пользоваться, не прибегая к калибровочному преобразованию (2.13).

b) Пусть функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ не зависят от времени t и параметров $c_1, \ldots, c_n$. Тогда условие невырожденности (1.3) полного решения (1.5) принимает привычный вид:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial c_j} \right\| \neq 0. \tag{2.14}$$

Уравнения (1.7) становятся обычной гамильтоновой системой относительно симплектической структуры с матрицей Ω. Общее решение канонической системы Гамильтона (1.1) определяется равенствами

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} = \int\limits_0^t \left.\frac{\partial h'}{\partial c_j}\right|_{x'=X} dt + \left.\frac{\partial S}{\partial c_j}\right|_{t=0}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.15}$$

и (2.5), в которых компоненты ковекторного поля $u(x, t, c)$ выражаются формулами (1.5). С учетом неравенства (2.14) систему уравнений (2.15) можно локально разрешить относительно всех координат $x_1, \ldots, x_n$. Правда, первые $2k$ из них уже найдены как решения гамильтоновой системы (1.7).

c) Пусть теперь $k = 1$, исходная гамильтонова система (1.2) автономная и полное решение (1.5) также не зависит от t. В этом случае вспомогательная гамильтонова система (1.7) легко интегрируется в квадратурах, а после этого решения уравнений Гамильтона (1.2) находятся из алгебраических соотношений (2.3)–(2.5).

Сделаем еще одно замечание. Предположим, что найдено решение системы уравнений Ламба, зависящее не от всех параметров $c_1, \ldots, c_n$, а только от их части. Более точно, пусть имеется решение

$$u(x_1, \ldots, x_n, t, c_{2k+1}, \ldots, c_n),$$

такое, что выполнено условие (2.2). Легко понять, что соотношения (2.3)–(2.4) по-прежнему будут выполняться. Число этих соотношений равно $n-2k$. Первые $2k$ координат $x_1, \ldots, x_{2k}$ находятся как решения замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. А из уравнений (2.3)–(2.4) с учетом неравенства (2.2) находятся остальные $n-2k$ координат $x_{2k+1}, \ldots, x_n$ как функции времени, зависящие еще от $n + (n-2k) = 2(n-k)$ параметров

$$b_1, \ldots, b_n, c_{2k+1}, \ldots, c_n. \tag{2.16}$$

Соотношения (2.5) (вместе с (1.5)) дают нам импульсы в виде функций времени и тех же $2(n-k)$ параметров (2.16). Таким образом, при сделанном выше предположении мы находим $2(n-k)$-параметрическое решение исходной системы дифференциальных уравнений Гамильтона. При $k = 0$ получаем общее решение. Однако в ряде случаев можно показать, что наличие этого $2(n-k)$-параметрического семейства полностью решает задачу интегрирования системы канонических уравнений Гамильтона.

3. Волчок Эйлера

Продемонстрируем развиваемый метод точного интегрирования на примере волчка Эйлера. Без ущерба для общности будем считать вертикальным постоянный кинетический момент твердого тела. Его величину обозначим c ($\in \mathbb{R}$). В качестве обобщенных координат примем обычные углы Эйлера ϑ, φ, ψ. Согласно [1, гл. III, § 2], уравнения движения волчка допускают семейство стационарных инвариантных многообразий, причем форма (1.4) имеет следующий вид:

$$\omega = c\, d\psi + c \cos\theta\, d\varphi. \tag{3.1}$$

Следовательно,

$$S = c\psi, \quad \alpha = c\cos\theta, \quad \beta = \varphi.$$

Первыми $2k = 2$ координатами служат углы ϑ и φ. Легко вычисляется их скобка Лагранжа:

$$[\vartheta, \varphi] = c \sin\vartheta. \tag{3.2}$$

Так что кососимметрическая 2×2-матрица Ω невырожденна, если $c \neq 0$.

Ввиду стационарности функция Бернулли h' совпадает с h — ограничением кинетической энергии твердого тела на инвариантное многообразие. Нетрудно проверить, что

$$h = \frac{c^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{I_1} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{I_2} + \frac{\cos^2\theta}{I_3}\right). \tag{3.3}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции твердого тела.

Используя (3.2) и (3.3), получаем систему дифференциальных уравнений (1.7):

$$\begin{aligned} \dot\theta &= c\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_2}\right)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi, \\ \dot\varphi &= c\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{\sin^2\varphi}{I_1}-\frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Поскольку эта система автономная и допускает непостоянный интеграл (3.3), то она интегрируется в квадратурах.

Соотношение (2.9)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial c}\right)^{\cdot} = \frac{\partial h}{\partial c} - \left[\frac{\partial}{\partial c}\left(c\cos\theta\right)\right]\dot\varphi \tag{3.5}$$

с учетом (3.3) и (3.4) определяет угол прецессии ψ. После элементарных преобразований получаем уравнение

$$\dot\psi = c\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_1}+\frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right). \tag{3.6}$$

Уравнения (3.4) и (3.6), конечно, хорошо известны в теории волчка Эйлера [2]. Отметим еще, что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\psi\,\partial c} = 1.$$

Следовательно, условие (2.2) теоремы 1 заведомо выполнено.

Хотя решение (3.1) содержит всего один параметр (а не три), мы фактически получили общее решение уравнений свободного вращения твердого тела с неподвижной точкой, поскольку выбор направления кинетического момента не имеет никакого значения.

4. Ларморовское движение

В качестве иллюстративного примера рассмотрим еще задачу Лармора о движении заряженной частицы в постоянном магнитном поле. Ее движение описывается уравнением Ньютона

$$\ddot x = \dot x \times H, \quad x \in E^3. \tag{4.1}$$

Мы положили для простоты записи массу частицы, ее заряд и скорость света равными единице. В любом случае эти параметры можно «включить» в магнитное поле

$$H = (H_1, H_2, H_3).$$

Уравнения (4.1) допускают очевидное семейство стационарных трехмерных инвариантных многообразий

$$\begin{gathered} \dot x_1 = H_3x_2 - H_2x_3 + c_1, \quad \dot x_2 = H_1x_3 - H_3x_1 + c_2, \\ \dot x_3 = H_2x_1 - H_1x_2 + c_3. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Чтобы применить развитый выше метод, эти многообразия следует представить в канонических переменных. Уравнение (4.1), очевидно, эквивалентно уравнению Лагранжа с лагранжианом

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\left(\dot x_1^2+\dot x_2^2+\dot x_3^2\right) + \frac{1}{2}\big[&(H_2x_3-H_3x_1)\dot x_1 + (H_3x_1-H_1x_3)\dot x_2 + \\ &+(H_1x_2-H_2x_1)\dot x_3\big]. \end{aligned}$$

Зная лагранжиан, можно вычислить обобщенные импульсы $y_i = \partial L/\partial \dot{x}_i$ и представить инвариантные многообразия (4.2) в канонических переменных:

$$\begin{gathered} y_1 = \frac{1}{2}(H_3x_2 - H_2x_3) + c_1, \quad y_2 = \frac{1}{2}(H_1x_3 - H_3x_1) + c_2, \\ y_3 = \frac{1}{2}(H_2x_1 - H_1x_2) + c_3. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Условие невырожденности (1.3) здесь, конечно, выполнено.

Можно ли формулы (4.3) представить в виде (1.5)? В общем случае это затруднительно. Однако можно обойти эту трудность, считая, что магнитное поле направлено, скажем, вдоль оси x_3. Такое предположение, конечно, не уменьшает общности рассмотрения. Отметим, что специальный выбор переменных — обычный прием и в классическом методе Гамильтона–Якоби.

Итак, пусть

$$H_1 = H_2 = 0, \quad H_3 = H \tag{4.4}$$

— компоненты магнитного поля. Тогда формулы (4.3)

$$y_1 = \frac{H}{2}x_2 + c_1, \quad y_2 = -\frac{H}{2}x_1 + c_2, \quad y_3 = c_3$$

уже допускают представление (1.5), если положить

$$S = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad \alpha = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}H, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}.$$

Мы, следовательно, имеем частный случай b) из § 2.

Скобка Лагранжа $[x_1, x_2]$ равна H. Следовательно, при $H \neq 0$ матрица Ω невырождена. Легко вычисляется функция Бернулли:

$$h = \frac{1}{2}(Hx_2 + c_1)^2 + \frac{1}{2}(-Hx_1 + c_2)^2 + \frac{c_3^2}{2}. \tag{4.5}$$

Очевидно, $h \geqslant c_3^2/2$. Вспомогательная гамильтонова система (1.7) принимает вид

$$\dot{x}_1 = Hx_2 + c_1, \quad \dot{x}_2 = -Hx_1 + c_2.$$

Она совпадает с системой из двух первых уравнений (4.2) после подстановки (4.4). Линии уровня первого интеграла (4.5) дают окружности Лармора радиуса

$$\sqrt{2h - c_3^2}/H.$$

Из формулы (2.15) с учетом (4.5) получаем простой закон изменения третьей координаты:

$$x_3 = c_3t + x_3(0).$$

5. Некоммутативное интегрирование

Предыдущее рассмотрение касалось n-параметрических семейств решений уравнений Ламба и основывалось на теории n-мерных инвариантных многообразий уравнений Гамильтона, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство. Однако возможны и другие расширения метода Гамильтона–Якоби, в которых фигурируют инвариантные многообразия меньшего числа измерений. Начала теории таких инвариантных многообразий содержатся в работе [5]. Решения соответствующих обобщенных уравнений Ламба будут зависеть от бо́льшего числа параметров.

Итак, предположим, что гамильтонова система (1.1) с n степенями свободы допускает $m \geqslant n$ интегралов

$$F_1(x,y,t), \ldots, F_m(x,y,t), \tag{5.1}$$

независимых почти всюду. Пусть $2q$ — ранг кососимметрической матрицы их скобок Пуассона

$$\|\{F_i, F_j\}\|. \tag{5.2}$$

Мы рассматриваем область фазового пространства, где этот ранг принимает максимальное значение. Числа n, m и q связаны неравенством

$$n + q \geqslant m. \tag{5.3}$$

Согласно классической теореме Пуассона, все скобки

$$\{F_i, F_j\} \tag{5.4}$$

также будут первыми интегралами системы (1.1). В силу этого замечания естественно рассматривать *замкнутые* наборы первых интегралов (5.1), когда их попарные скобки Пуассона (5.4) функционально выражаются через $F_1, \ldots, F_m$. Согласно Э. Картану, любой набор первых интегралов можно дополнить до замкнутого; нужные для этого вычисления требуют только дифференцирований [6].

Рассмотрим теперь интегральные инвариантные многообразия Σ_t^{2n-m} дифференциальных уравнений Гамильтона размерности $2n - m \leqslant n$, которые определяются следующей системой алгебраических уравнений:

$$F_1(x,y,t) = c_1, \ldots, F_m(x,y,t) = c_m. \tag{5.5}$$

Предположим, что

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k)} \neq 0.$$

Здесь

$$k = m - n \geqslant 0. \tag{5.6}$$

Тогда из (5.5) можно найти (по крайней мере локально) импульсы системы и первые k обобщенных координат как функции от остальных обобщенных координат, времени и параметров $c = (c_1, \ldots, c_m)$:

$$\begin{aligned} &y_1 = u_1(x_{k+1}, \ldots, x_n, t, c), \qquad \ldots, \quad y_n = u_n(x_{k+1}, \ldots, x_n, t, c), \\ &x_1 = u_{n+1}(x_{k+1}, \ldots, x_n, t, c), \quad \ldots, \quad x_k = u_{n+k}(x_{k+1}, \ldots, x_n, t, c). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Локальными координатами на Σ_t^{2n-m} служат переменные $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Ограничим фундаментальную 1-форму

$$\sum_{j=1}^{n} y_j\,dx_j$$

на инвариантное многообразие Σ_t^{2n-m}:

$$\omega = u_1\,du_{n+1} + \ldots + u_k\,du_{n+k} + u_{k+1}\,dx_{k+1} + \ldots + u_n\,dx_n. \tag{5.8}$$

Хорошо известно, что если $m = n$ и функции (5.1) попарно находятся в инволюции, то

$$\omega = dS,$$

причем функция $S(x,t,c)$ будет полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби (см., например, [2]). Наша ближайшая цель — обобщить этот классический результат на случай $m > n$.

Дифференциальная 1-форма (5.8) имеет вид

$$\omega = U_{k+1}\,dx_{k+1} + \ldots + U_n\,dx_n. \tag{5.9}$$

Ее коэффициенты — гладкие функции от $x_{k+1},\ldots,x_n$; они еще зависят от t и $c_1,\ldots,c_m$ как параметров. Эти коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&U_{k+1} = u_1\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_{k+1}} + \ldots + u_k\frac{\partial u_{n+k}}{\partial x_{k+1}} + u_{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_n = u_1\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_n} + \ldots + u_k\frac{\partial u_{n+k}}{\partial x_n} + u_n.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Пусть $2s$ — ранг внешней 2-формы $d\omega$. Иными словами, $2s$ — это ранг кососимметрической матрицы

$$\left\|\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right\|, \quad k+1 \leqslant i,\, j \leqslant n.$$

Наша задача — оценить ранг этой матрицы.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$s = n - m + q. \tag{5.11}$$

Согласно неравенству (5.3), $s \geqslant 0$.

Следствие 1. *Если*

$$n + q = m, \tag{5.12}$$

то $k = q$ и дифференциальная форма ω замкнута: локально $\omega = dS$, где S — гладкая функция от $x_{k+1},\ldots,x_n$, t и $c_1,\ldots,c_m$.

Следствие 2. *Если $m = n$, то $\omega = dS(x,t,c)$. В частности, при этом условии функции* (5.1) *находятся попарно в инволюции.*

Равенство (5.12) известно как условие *некоммутативной интегрируемости* гамильтоновой системы (1.1). Обсуждение этого круга вопросов и соответствующие ссылки можно найти, например, в [7].

Доказательство предложения 2. Так как набор функций (5.1) замкнутый, то по *теореме Ли–Картана* [6] найдутся m функций

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_m,$$

которые функционально зависят только от $F_1, \ldots, F_m$, такие, что

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \ldots = \{\Phi_{2q-1}, \Phi_{2q}\} = 1, \tag{5.13}$$

а остальные скобки Пуассона $\{\Phi_i, \Phi_j\}$ равны нулю. Число $2q$ — это ранг матрицы (5.2).

С учетом неравенства (5.3) и *леммы о наполнении* Каратеодори можно так ввести новые канонические координаты (обозначим их снова $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$), что

$$x_i = \Phi_{2i-1}, \quad y_i = \Phi_{2i},$$

если $i \leqslant q$, и $y_i = \Phi_i$, если $i > 2q$. Ввиду (5.13) такое преобразование координат будет каноническим.

С точностью до дифференциала некоторой функции (что несущественно для анализа дифференциала $d\omega$) 1-форма (5.5) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i, \tag{5.14}$$

где импульсы $y_1, \ldots, y_{m-q}$ $(m-q \leqslant n)$ и координаты $x_1, \ldots, x_q$ следует заменить константами. Следовательно, дифференциал формы (5.14) в новых канонических переменных будет

$$\sum_{i=m-q}^{n} dy_i \wedge dx_i.$$

Ранг этой 2-формы, очевидно, равен

$$2[n - (m-q)] = 2s.$$

Что и требовалось. ■

Воспользуемся теперь уравнением Ламба (см. [5]):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v\, d\omega = -dh. \tag{5.15}$$

Здесь v — векторное поле на Σ_t^{2n-m} с компонентами

$$v_{k+1} = \frac{\partial H}{\partial y_{k+1}}\bigg|, \ldots, v_n = \frac{\partial H}{\partial y_n}\bigg|. \tag{5.16}$$

Вертикальная черта означает подстановку (5.7). В свою очередь,

$$h(x_{k+1}, \ldots, x_n, t, c) = H|.$$

Ограничение гамильтоновой системы (1.1) на инвариантное многообразие Σ_t^{2n-m} (зависящее от параметров $c_1, \ldots, c_m$) имеет вид

$$\dot{x}_{k+1} = v_{k+1}, \ldots, \dot{x}_n = v_n. \tag{5.17}$$

Если эта система будет проинтегрирована, то остальные канонические переменные легко находятся по формулам (5.7).

Пусть выполнено условие некоммутативной интегрируемости (5.12). Тогда (по следствию 1) $d\omega = 0$. Уравнение (5.15) дает нам

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial S}{\partial t} + h\right] = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h = f(t, c).$$

Калибровочное преобразование

$$\widehat{S} = S - \int f(t, c)\, dt$$

приводит нас к обобщенному уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial t} + H(u_{n+1}, \ldots, u_{n+k}, x_{k+1}, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n, t) = 0. \tag{5.18}$$

При $m = n$ оно совпадает с классическим уравнением Гамильтона–Якоби, поскольку в этом случае $k = 0$ и

$$u_j = \frac{\partial \widehat{S}}{\partial x_j}.$$

Теорема 2. *Предположим, что среди m параметров $c_1, \ldots, c_m$ найдутся $n-k$ параметров (обозначим их $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$), таких, что*

1)
$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial x_j}\bigg| \frac{\partial u_{n+j}}{\partial \alpha_p} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_j}\bigg| \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_p} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\bigg| \frac{\partial}{\partial \alpha_p}\left(\sum_{j=1}^{k} u_j \frac{\partial u_{n+j}}{\partial x_i}\right) = 0$$

для всех $k+1 \leqslant p \leqslant n$,

2) *выполнено неравенство*

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_p\, \partial \alpha_q}\right\| \neq 0; \quad k+1 \leqslant p,\, q \leqslant n. \tag{5.19}$$

Тогда полное решение канонических дифференциальных уравнений (1.1) *найдется из $n-k$ алгебраических уравнений*

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \alpha_j} = a_j = \mathrm{const}, \quad k+1 \leqslant j \leqslant n \tag{5.20}$$

и $n+k$ соотношений (5.7).

В условии (5.19) функцию $\widehat{S}$ можно, очевидно, заменить на S. Калибровочное преобразование, связывающее функции S и $\widehat{S}$, имеет еще одну интерпретацию: добавление к функции Гамильтона слагаемого, зависящего явно только от времени, не меняет канонических уравнений Гамильтона.

Роль $2n$ произвольных постоянных играют $2n$ параметров $c_1, \ldots, c_m$ $(m = n + k)$ и $a_{k+1}, \ldots, a_n$. Если $k = 0$ $(m = n)$, то теорема 2 переходит в классическую теорему Якоби о полном интеграле.

Собственно говоря, теорема 2 будет доказана, если мы установим, что производные

$$\partial\widehat{S}/\partial\alpha_j \tag{5.21}$$

суть первые интегралы системы дифференциальных уравнений (5.17). Для этого вычислим полную производную по времени от (5.21) с учетом первого условия теоремы 2 и соотношений (5.10). Из (5.18) имеем:

$$\left(\frac{\partial\widehat{S}}{\partial\alpha_p}\right)^{\cdot} = \frac{\partial^2\widehat{S}}{\partial\alpha_p\,\partial t} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j}\bigg| \frac{\partial^2\widehat{S}}{\partial\alpha_p\,\partial x_j} = 0. \tag{5.22}$$

Учитывая определение (5.16) компонент векторного поля v, из (5.22) получаем окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\widehat{S}}{\partial\alpha_p}\right) + \sum_{j=k+1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\widehat{S}}{\partial\alpha_p} = 0.$$

Что и доказывает теорему 2. ■

Теорема 2 дает способ явного некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем. Дополнительное ограничение — это первое условие теоремы. Можно ли вообще обойтись без него? Успех применения теоремы 2 зависит от удачного выбора канонических переменных. Это замечание характерно вообще для метода Гамильтона–Якоби. В частности, при подходящем выборе канонических переменных условия теоремы 2 заведомо выполнены. Достаточно воспользоваться переменными, введенными выше при доказательстве предложения 2 с помощью теоремы Ли–Картана.

Теорему 2 можно обратить. Справедлива

Теорема 3. *Предположим, что уравнения Гамильтона* (1.1) *допускают m-параметрическое семейство $(2n - m)$-мерных инвариантных многообразий, задаваемых соотношениями* (5.7), *причем выполнены следующие условия:*

1) $\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_{n+k})}{\partial(c_1, \ldots, c_{n+k})} \neq 0$, $n + k = m$,

2) *дифференциальная* 1*-форма* (5.8) *является полным дифференциалом: $\omega = dS$, где S — гладкая функция от $x_{k+1}, \ldots, x_n$, t и c.*

Среди $n+k$ параметров $c_1, \ldots, c_{n+k}$ найдутся $n-k$ параметров (обозначим их $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$), таких, что

3)
$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial x_j}\bigg| \frac{\partial u_{n+j}}{\partial\alpha_p} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_j}\bigg| \frac{\partial u_j}{\partial\alpha_p} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\bigg| \frac{\partial}{\partial\alpha_p}\left(\sum_{j=1}^{k} u_j \frac{\partial u_{n+j}}{\partial x_i}\right) = 0$$

для всех $k + 1 \leqslant p \leqslant n$,

4) $\det \left\| \dfrac{\partial^2 \widehat{S}}{\partial x_p\, \partial \alpha_q} \right\| \neq 0, \quad k+1 \leqslant p,\, q \leqslant n.$

Тогда полное решение канонических дифференциальных уравнений (1.1) *находится из* $n-k$ *алгебраических уравнений* (5.20) *и* $n+k$ *соотношений* (5.7).

Если $k = 0$, то теорема 3 переходит в классическую теорему Якоби о полном интеграле. При этом надо иметь в виду, что решениям уравнения Гамильтона–Якоби отвечают инвариантные лагранжевы многообразия уравнений Гамильтона.

Теоремы 2 и 3 двойственны друг другу в следующем смысле. Согласно первому условию теоремы 3, из соотношений (5.7) можно выразить (хотя бы локально) параметры $c_1, \ldots, c_{n+k}$ через канонические переменные и время. В результате получим $m = n+k$ первых интегралов дифференциальных уравнений Гамильтона, которые удовлетворяют условию некоммутативной интегрируемости (5.12). После этого замечания теорема 3 сводится к теореме 2.

Отметим, что параметры $\alpha = (\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ можно выбирать более общим способом, считая исходные параметры $c_1, \ldots, c_m$ гладкими функциями от α. Это замечание придает развиваемому методу дополнительную гибкость.

6. Автономный случай

Покажем, как выглядит обобщенный метод Гамильтона – Якоби в том случае, когда исходная гамильтонова система (1.1) автономная и первые интегралы (5.1) не зависят явно от времени. Естественно считать, что среди функций (5.1) есть интеграл энергии; пусть $F_1 = H$.

Алгебраическая система (5.5) теперь не содержит времени. Поэтому при условии (5.15)

$$\omega = dS,$$

где S — гладкая функция от $x_{k+1}, \ldots, x_n$ и $c_1, \ldots, c_m$. Ясно, что

$$H| = c_1,$$

и, значит, уравнение (5.18) принимает вид

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial t} + c_1 = 0, \tag{6.1}$$

где (согласно калибровочному преобразованию)

$$\widehat{S} = S - g(t, c).$$

В силу уравнения (6.1),

$$g = -c_1 t + G,$$

где G — некоторая гладкая функция, зависящая только от параметров $c_1, \ldots, c_m$.

Соотношения (5.20) теперь принимают вид

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha_j} t + a_j, \quad k+1 \leqslant j \leqslant n. \tag{6.2}$$

Здесь

$$a_j = a_j' - \frac{\partial G}{\partial \alpha_j},$$

где a'_j — произвольные постоянные. В силу произвольности в выборе постоянных a'_j мы можем положить $G \equiv 0$. Условие невырожденности (5.19) имеет тот же вид, но только функцию $\widehat{S}$ следует заменить на S.

Соотношения (6.2) являются непосредственным обобщением классических формул Якоби. При этом следует иметь в виду, что основное уравнение (6.1) выведено нами из других соображений.

Рассмотрим случай, когда первые $n-k$ функций (5.1) находятся в инволюции со всеми остальными и интегральные многообразия Σ^{n-k} компактны. Тогда, как показано в [8], Σ^{n-k} диффеоморфны $(n-k)$-мерным торам и в окрестности этих торов существуют канонические координаты I, p, $\varphi \bmod 2\pi$, q, такие, что

$$I_s = I_s(F_1, \ldots, F_{n-k}), \quad 1 \leqslant s \leqslant n-k,$$

а p, q зависят от всех F_i. В этих координатах фундаментальная 1-форма принимает вид

$$\sum I_j\, d\varphi_j + \sum p_i\, dq_i,$$

а функция Гамильтона $H = F_1$ зависит только от $I_1, \ldots, I_{n-k}$.

Переменные I, p, φ, q — это «глобализованные» канонические переменные, существование которых вытекает из теоремы Ли–Картана.

Как в этих переменных выглядит заключение теоремы 2? Уравнения (5.1) принимают вид

$$I_j = I_j^0, \quad p_i = p_i^0, \quad q_i = q_i^0, \quad j = 1, \ldots, n-k,\ i = 1, \ldots, k.$$

Следовательно,

$$\omega = \sum I_j^0\, d\varphi_j = dS,$$

откуда

$$S = \sum I_j^0 \varphi_j$$

— многозначная функция в окрестности инвариантных торов Σ^{n-k}.

Далее, функция

$$\widehat{S} = S - f(t, I^0, p^0, q^0)$$

удовлетворяет уравнению (5.18):

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial t} = -H(I^0). \tag{6.3}$$

Следовательно,

$$\widehat{S} = S - H(I^0)t + g(I^0, p^0, q^0).$$

Параметры $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ — это начальные данные переменных действие $I_1^0, \ldots, I_{n-k}^0$. Условия 1 и 2 теоремы 2, очевидно, выполнены. Следовательно, согласно (5.20),

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial I_j^0} = a_j, \quad j = 1, \ldots, n-k,$$

откуда получаем формулы для изменения угловых переменных со временем:

$$\varphi_j = \frac{\partial H}{\partial I_j^0}\, t + a_j + \frac{\partial g}{\partial I_j^0}.$$

Поскольку a_j — произвольные постоянные, то можно положить $g = 0$.

В рассматриваемом случае уравнение (6.3) принимает вид

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial \widehat{S}}{\partial \varphi_{n-k}}\right) = 0.$$

Это — обычное уравнение Гамильтона – Якоби для приведенной гамильтоновой системы с $n - k$ степенями свободы. Этот факт является отражением следующего более общего наблюдения: теоремы о некоммутативно интегрируемых системах сводятся к классической теореме Лиувилля о вполне интегрируемых системах и теореме Ли – Картана о замкнутых наборах первых интегралов.

В качестве иллюстративного примера к теоремам 2 и 3 рассмотрим задачу о движении по инерции материальной частицы по плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$. Ясно, что частица движется по прямой с постоянной скоростью. В этом смысле задача тривиальна. Но с другой стороны, движение частицы по плоскости — простой пример некоммутативно интегрируемой системы, на котором можно проиллюстрировать теорему 2, не прибегая к специальным каноническим переменным I, p, φ, q.

Гамильтонова система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\,(y_1^2 + y_2^2)$$

допускает три первых интеграла:

$$F_1 = y_1, \quad F_2 = y_2, \quad F_3 = x_2 y_1 - x_1 y_2. \tag{6.4}$$

Этот набор интегралов замкнутый, поскольку

$$\{F_1, F_2\} = 0, \quad \{F_1, F_3\} = -F_2, \quad \{F_2, F_3\} = F_1.$$

Если $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, то уравнения (5.1) задают одномерное инвариантное многообразие. В противном случае первые интегралы (6.4) зависимы.

Пусть $c_1 \neq 0$. В качестве координаты на Σ^1 примем x_1. Тогда

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2, \quad x_2 = \frac{c_2 x_1 + c_3}{c_1}$$

и

$$\omega = c_1\, dx_1 + \frac{c_2^2}{c_1}\, dx_1 = dS,$$

откуда

$$S = \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1}\, x_1.$$

Далее,

$$\widehat{S} = \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1}\, x_1 - \frac{c_1^2 + c_2^2}{2}\, t. \tag{6.5}$$

Можно проверить, что первое условие теоремы 2 сводится к равенству

$$c_1 \frac{\partial c_2}{\partial \alpha} - c_2 \frac{\partial c_1}{\partial \alpha} = 0. \tag{6.6}$$

Если в качестве параметра α принять полярный радиус ($c_1 = \alpha \sin\psi$, $c_2 = \alpha\cos\psi$; поскольку $c_1 \neq 0$, то $\sin\psi \neq 0$), то соотношение (6.6) будет автоматически выполнено. Тогда функция (6.5) примет вид

$$\widehat{S} = \frac{\alpha}{\sin\psi}\, x_1 - \frac{\alpha^2}{2}\, t.$$

Второе условие теоремы 2, конечно, выполнено. Следовательно, соотношение (5.20) дает нам закон изменения первой координаты:

$$\frac{x_1}{\sin\psi} - \alpha t = a.$$

Итак, $x_1 = c_1 t + a'$, $a' = \mathrm{const}$.

7. Исторический комментарий

В 1909 году В. А. Стеклов опубликовал три заметки по теории гамильтоновых систем [9–11]. Недавно они переведены на русский язык и помещены в сборнике [12]. К сожалению, в отличие от других работ В. А. Стеклова, сжато написанные статьи [9–11] оказались невостребованными и не попали в орбиту современной аналитической динамики и теории динамических систем. Оказывается, они имеют много общего с содержанием настоящей работы (особенно §§ 5 и 6), и поэтому здесь уместно дать их краткий комментарий.

Отправным пунктом для В. А. Стеклова служат «Лекции по динамике» Якоби, особенно лекция 35, в которой развивается связь метода Гамильтона–Якоби с теорией канонических преобразований, представленной в форме соответствующих свойств скобок Пуассона. В. А. Стеклов рассматривает $m \geqslant n$ алгебраических уравнений (5.1) (не содержащих время) и выражает из них импульсы системы и часть обобщенных координат через другие координаты (как это делается в § 5; см. соотношения (5.7)). На функции из набора (5.1) накладывается условие: ограничение фундаментальной 1-формы $\Sigma y_i\, dx_i$ на интегральные многообразия (5.1) будет замкнутой дифференциальной формой. С локальной точки зрения (принимаемой В. А. Стекловым), это полный дифференциал некоторой гладкой функции, зависящей от части обобщенных координат: $\omega = dS$. Согласно предложению 2, это означает, что набор m функций (5.1) удовлетворяет условию *некоммутативной интегрируемости*.

Таким образом, за 60 лет до работ Н. Н. Нехорошева [8] и А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [13] В. А. Стеклов фактически ввел класс некоммутативно интегрируемых систем и исследовал их локальные свойства. Отправляясь от исходного набора функций (5.1), В. А. Стеклов вводит канонические переменные, сходные по своим свойствам с каноническими переменными Н. Н. Нехорошева (переменные I, p, φ, q из § 6) [11]. Этот результат позволяет В. А. Стеклову прийти к заключению, что общий случай существования некоммутативного набора первых интегралов по существу сводится к классической теореме Лиувилля, примененной к редуцированной гамильтоновой системе [11]. Результаты В. А. Стеклова «поглощаются» более общей теоремой Ли–Картана, которую мы использовали при доказательстве предложения 2.

Стоит отметить, что теорема Ли–Картана установлена Софусом Ли еще в 1873 году. Она изложена им в книге [14] (гл. 9, теорема 23). Конечно, для современного читателя покажется непривычной терминология, которую использовал С. Ли. Теорема Ли передоказана Э. Картаном в [6] без упоминания работы С. Ли. Э. Картан использовал эту теорему для решения задачи о понижении порядка гамильтоновых систем с известными первыми интегралами. В. А. Стеклов в своих заметках [9–11] упоминает результаты Ли и Майера, но без точных ссылок. Вообще, заметки [9–11] — это вариации на темы теоремы Ли–Картана, связанные с точным интегрированием уравнений Гамильтона.

В. А. Стеклов постоянно стремится придать своим построениям конструктивный характер, используя только алгебраические операции и простые квадратуры. Поэтому в [9–11] фактически сформулирована известная теорема А. В. Браилова [15] об интегрируемости в квадратурах гамильтоновых систем с функционально замкнутым набором первых интегралов, удовлетворяющих условию некоммутативной интегрируемости.

Наши результаты, содержащиеся в §§ 5 и 6, следует рассматривать как развитие идей и результатов работ В. А. Стеклова [9–11]. Мы соединяем идеи В. А. Стеклова по некоммутативно интегрируемым системам с идеями классического метода Гамильтона–Якоби и тем самым предлагаем еще один путь явного интегрирования уравнений классической механики, который, конечно, нуждается в дальнейшем изучении и совершенствовании.

Автор признателен А. В. Болсинову и А. В. Борисову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Козлов В. В. Общая теория вихрей. Ижевск: УдГУ, 1998. 238 с.

[2] Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.

[3] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.

[4] Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics: 2. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. New York–Berlin: Springer, 1983. 370 pp.

[5] Козлов В. В. Об инвариантных многообразиях уравнений Гамильтона // ПММ, 2012, т. 76, № 4, с. 528–541.

[6] Картан Э. Интегральные инварианты. М.–Л.: Гостехиздат, 1940. 216 с.

[7] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.

[8] Нехорошев Н. Н. Переменные действие–угол и их обобщения // Тр. Моск. матем. общ-ва, 1972, т. 26, с. 181–198.

[9] Stekloff W. Sur une généralisation d'un théoreme de Jacobi // C. R. Acad. Sci. Paris, 1909, vol. 148, pp. 153–155.

[10] Stekloff W. Application d'un théorème généralisé de Jacobi au problème de S. Lie–Mayer // C. R. Acad. Sci. Paris, 1909, vol. 148, pp. 277–279.

[11] Stekloff W. Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Jacobi–Lie // C. R. Acad. Sci. Paris, 1909, vol. 148, pp. 465–468.

[12] Стеклов В. А. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. 492 с.

[13] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прил., 1978, т. 12, № 2, с. 46–56.

[14] Ли С. Теория групп преобразований: В 3-х частях: Часть 2. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 640 с.

[15] Браилов А. В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами // Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 2, с. 273–276.

An extended Hamilton – Jacobi method

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

We develop a new method for solving Hamilton's canonical differential equations. The method is based on the search of invariant vortex manifolds of special type. In the case of Lagrangian (potential) manifolds, we arrive at the classical Hamilton – Jacobi method.

MSC 2010: 70Hxx
Keywords: generalized Lamb's equations, vortex manifolds, Clebsch potentials, Lagrange brackets

Received September 2, 2011, accepted December 28, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 549–568 (Russian)