Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 617–628.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 512.77 517.912
MSC 2010: 70Hxx, 70G65

Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с точечным вихрем, в поле силы тяжести

С. В. Соколов, С. М. Рамоданов

Рассмотрена задача о движении под действием силы тяжести твердого тела, имеющего форму кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. Циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается отличной от нуля. Уравнения, описывающие систему, имеют гамильтонову форму и очевидный первый интеграл (горизонтальная компонента импульса), с помощью которого удается понизить порядок системы и тем самым получить систему с двумя степенями свободы. Получены частные решения, которые позволяют указать возможные типы движений системы. Найдены относительные равновесия и исследована их устойчивость при различных значениях параметров.

Ключевые слова: точечные вихри, гамильтоновы системы, редукция, устойчивость стационарных решений

1. Введение

Задача о падении твердого тела в жидкости рассматривалась давно, например, в классических работах [1–3]. Из современных работ отметим [4, 16]. Некоторые эффекты, описанные в этих статьях, как, например, авторотация твердого тела, имеют место только в вяз-

Получено 11 августа 2012 года
После доработки 14 сентября 2012 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039. Работа С. М. Рамоданова поддержана грантом поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

Соколов Сергей Викторович
sokolovsv72@mail.ru
Рамоданов Сергей Михайлович
ramodanov@mail.ru
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

кой жидкости, и, следовательно, их строгое рассмотрение должно опираться на уравнение Навье – Стокса с граничными условиями на подвижных границах. Решение таких задач обычно получают численно, а аналитические исследования содержат дополнительные феноменологические предположения. Например, в работе [17] вводятся феноменологические выражения для подъемной силы и силы лобового сопротивления, а также предположения о независимости трансляций и вращений. Естественно, что вопрос о применимости такого рода допущений и адекватности получаемых результатов, остается открытым.

Влияние вязкости на падение тела состоит в наличии сопротивления движению, а сопротивление — это не только внутреннее трение жидкости, но и затраты энергии на генерацию вихрей. Чтобы попытаться с одной стороны учесть хотя бы качественно некоторые из возникающих в этой связи эффектов, а с другой — получить более или менее удобоваримую с аналитической точки зрения модель, поступают следующим образом: жидкость предполагают идеальной, а присутствие завихренности (например, циркуляция, точечные вихри, вихревая пелена) постулируют. Простейший эффект завихренности — это наличие циркуляции при обтекании тела. Падение тела с циркуляцией рассмотрено, например, в работах [7–9]. В [9] показано, что при наличии циркуляции возникающая подъемная сила приводит к тому, что тело движется в некоторой горизонтальной полосе. Дальнейшим развитием представлений о влиянии завихренности на тела является задача о движении тела при наличии точечных вихрей. Гамильтонов формализм для точечных вихрей первоначально был развит Кирхгофом [18]. В работах [10–13] этот формализм был распространен на случай движения цилиндрического твердого тела и точечных вихрей в отсутствие тяжести. В работе [10] и затем в работе [13] были получены *точные* уравнения движения, в статье [11] доказана интегрируемость задачи о движении цилиндра и вихря. В работе [12] указаны некоторые частные решения и исследована качественная картина движения цилиндра и вихря.

Следующим этапом в развитии послужила возникшая в 60-х годах XX века модель Брауна – Майкла, где сход вихрей с острой кромки тела постулируется (поскольку, как известно, возникать в идеальной жидкости вихри не могут), а их интенсивность меняется со временем. Движение твердого тела и вихрей исследуется с помощью модели Брауна – Майкла, например, в работе [6].

Падение тела в присутствии распределенной завихренности («вихревая пелена») изучено в работе [5]. Хотя в работах [5, 6] уравнения получены строго, система из-за своей сложности исследуется авторами численно.

Отметим в заключение работу [14], где исследовано движение вихря в предположении поступательного движения цилиндра. Таким образом, рассмотрение в [14] носит кинематический характер, что не позволяет учесть влияние вихря на движение цилиндра. Основное внимание в работе [14] сконцентрировано на исследовании возможности хаотических режимов движения вихря при возмущении движения цилиндра.

В данной работе влияние завихренности на падение тела в жидкости рассмотрено на примере простейшей задачи о движении массивного цилиндра и вихря в поле тяжести. Циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается, вообще говоря, отличной от нуля.

2. Постановка задачи

Пусть твердое тело, имеющее форму кругового цилиндра, движется под действием силы тяжести в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное движение и покоящейся на бесконечности. Образующие цилиндра ортогональны при этом плоскости потока. В жидкости движется прямолинейная вихревая нить, параллельная образующим цилиндра, имеющая интенсивность Γ_1. Жидкость обтекает цилиндр с циркуляцией Γ, в общем случае отличной от нуля (рис. 1). Требуется качественно исследовать движение системы.

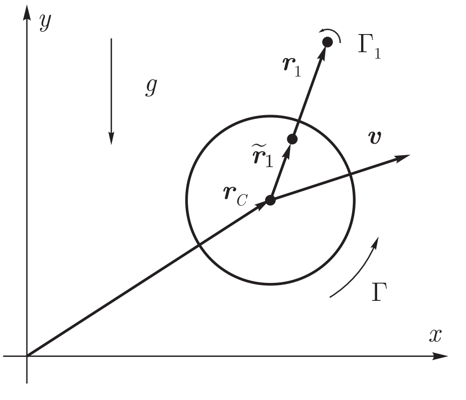

Рис. 1. Круговой цилиндр и точечный вихрь в поле силы тяжести.

3. Уравнения движения

Следуя [10], уравнения движения цилиндра и точечного вихря в поле силы тяжести запишем в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{r}}_1 = -\boldsymbol{v} + \operatorname{grad} \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{r})\big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{v}, \\ &a\dot{v}_1 = \lambda v_2 - \lambda_1(\dot{\widetilde{y}}_1 - \dot{y}_1), \quad a\dot{v}_2 = -\lambda v_1 + \lambda_1(\dot{\widetilde{x}}_1 - \dot{x}_1) - ag, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{r}_c = (x_c,\, y_c)$ — радиус-вектор центра цилиндра относительно неподвижной системы координат Oxy, $\boldsymbol{v} = (v_1,\, v_2)$ — скорость цилиндра, $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,\, y_1)$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с вихрем, $\widetilde{\boldsymbol{r}}_1 = (\widetilde{x}_1,\, \widetilde{y}_1) = \dfrac{R^2\boldsymbol{r}_1}{r_1^2}$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с инверсным образом вихря (рис. 1), R — радиус цилиндра, a — константа, включающая массу и присоединенную массу цилиндра, ag — величина силы тяжести, действующей на цилиндр, λ и λ_1 — постоянные, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и интенсивностью вихря соотношениями $\lambda = \dfrac{\Gamma}{2\pi}$, $\lambda_1 = \dfrac{\Gamma_1}{2\pi}$. Плотность жидкости полагается равной 2π. Функция $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{r})$ является потенциалом течения $\varphi(\boldsymbol{r})$ идеальной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1$:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{v}) - \lambda \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \lambda\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y-\widetilde{y}_1}{x-\widetilde{x}_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\right). \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) отличаются от приведенных в [10] слагаемым, учитывающим действие силы тяжести.

Аналогично [11] можно заметить, что конечномерная система (3.1), описывающая движение цилиндра и вихря в поле силы тяжести, сохраняет инвариантную меру и может быть представлена в гамильтоновой форме.

Предложение. *Уравнения движения* (3.1) *можно представить в виде*

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \tag{3.3}$$

где ζ_i *— координаты фазового вектора системы* (3.1)

$$\zeta = \{x_1, y_1, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

H *— гамильтониан, а компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры* $J_{ij}(\zeta) = \{\zeta_i, \zeta_j\}$ *удовлетворяют тождеству Якоби*:

$$\sum_l \left(J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial \zeta_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \zeta_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial \zeta_l} \right) = 0, \quad \forall i, j, k.$$

Доказательство. Несложно непосредственной проверкой показать, что система (3.1) обладает первым интегралом, имеющим смысл интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2} a v^2 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda \ln r_1^2 + a g y_c. \tag{3.4}$$

Считая H гамильтонианом системы, подберем компоненты J_{ij}, чтобы уравнения движения (3.3) совпали с системой (3.1). Отличные от нуля компоненты, аналогично [11], имеют вид

$$\begin{gathered}
\{v_1, x_1\} = \frac{1}{a} \frac{r_1^4 - R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, \quad \{v_1, y_1\} = -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, \\
\{v_2, x_1\} = -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, \quad \{v_2, y_1\} = \frac{1}{a} \frac{r_1^4 + R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, \\
\{v_1, v_2\} = \frac{\lambda}{a^2} - \frac{\lambda_1}{a^2} \frac{r_1^4 - R^4}{r_1^4}, \quad \{x_1, y_1\} = -\frac{1}{\lambda_1}, \\
\{x_c, v_1\} = \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что компоненты структурного тензора (3.5) удовлетворяют тождеству Якоби. ■

Таким образом, гамильтоновость уравнений (3.1) позволяет применить хорошо развитый формализм для качественного анализа, исследования устойчивости и пр.

4. Первые интегралы и редукция

Наличие выделенного направления, задаваемого силой тяжести, нарушает симметрию относительно поворотов системы. Тем не менее, у системы существует два первых интеграла, отвечающие трансляциям, — автономный интеграл P, соответствующий горизонтальному импульсу системы, и неавтономный интеграл Q, соответствующий вертикальному импульсу:

$$\begin{aligned}
Q &= a(v_2 - gt) + \lambda x_c - \lambda_1(\widetilde{x}_1 - x_1), \\
P &= a v_1 - \lambda y_c + \lambda_1(\widetilde{y}_1 - y_1).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

По-видимому, других первых интегралов у системы нет, что подтверждается хаотическим поведением решений на сечении Пуанкаре. Неинтегрируемость задачи падения цилиндрического тела произвольной формы с циркуляцией показана в работе [19]. Используя автономный интеграл P, можно понизить порядок исходной системы (3.1), обладающей тремя степенями свободы, на одну степень.

Для этого положим $P = 0$. Очевидно, что в случае $\lambda \neq 0$ этого всегда можно добиться выбором начала системы координат (случай $\lambda = 0$ требует отдельного рассмотрения). Выразим y_c из равенства $P = 0$ и подставим в гамильтониан (3.4). Исключив из (3.1) уравнения на $\boldsymbol{r}_c$, получим редуцированную систему

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = -v_1 + \left.\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{r}=\overline{r}_1}, \quad \dot{y}_1 = -v_2 + \left.\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{r}=\overline{r}_1}, \\ a\dot{v}_1 = \lambda v_2 - \lambda_1(\dot{\widetilde{y}}_1 - \dot{y}_1), \quad a\dot{v}_2 = -\lambda v_1 + \lambda_1(\dot{\widetilde{x}}_1 - \dot{x}_1) - ag\end{gathered} \tag{4.2}$$

с гамильтонианом

$$H_c = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2\ln(r_1^2 - R^2) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda\ln r_1^2 + \frac{ag}{\lambda}(av_1 + \lambda_1(\widetilde{y}_1 - y_1))$$

и пуассоновой структурой, определяемой компонентами структурного тензора, получаемого из (3.5) вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих переменным x_c и y_c.

5. Классификация возможных движений

Найдены частные решения, позволяющие сказать о том, что существует три возможных типа движений системы «цилиндр – вихрь» (рис. 2):

1) цилиндр и вихрь движутся вместе в ограниченной полосе изменений координаты y (рис. 2a);

2) цилиндр покидает вихрь и движется в ограниченной полосе изменений координаты y (рис. 2b);

3) цилиндр покидает вихрь и движется в направлении действия силы тяжести (рис. 2c).

По поводу приведенной классификации стоит отметить, что в системе наблюдаются движения с захватом вихря цилиндром, аналогичные описанным в работе [14], а также движения в ограниченной полосе, как в работах [8, 9].

В качестве гипотезы заметим, что во время движения цилиндр всегда *остается в ограниченной горизонтальной полосе, то есть «не падает», за исключением, быть может, случая $\lambda = \lambda_1$. При падении цилиндра (неограниченном убывании функции $y_c(t)$) вихрь не может быть захвачен цилиндром.*

6. Относительные равновесия и их устойчивость

Будем искать стационарные решения редуцированной системы (4.2). Эти решения представляют собой относительные равновесия исходной системы (3.1).

Для определения положений равновесия приравняем правые части (4.2) к нулю, откуда находим $v_2 = 0$, $v_1 = -\dfrac{ag}{\lambda}$. Из гидродинамических соображений легко понять, что

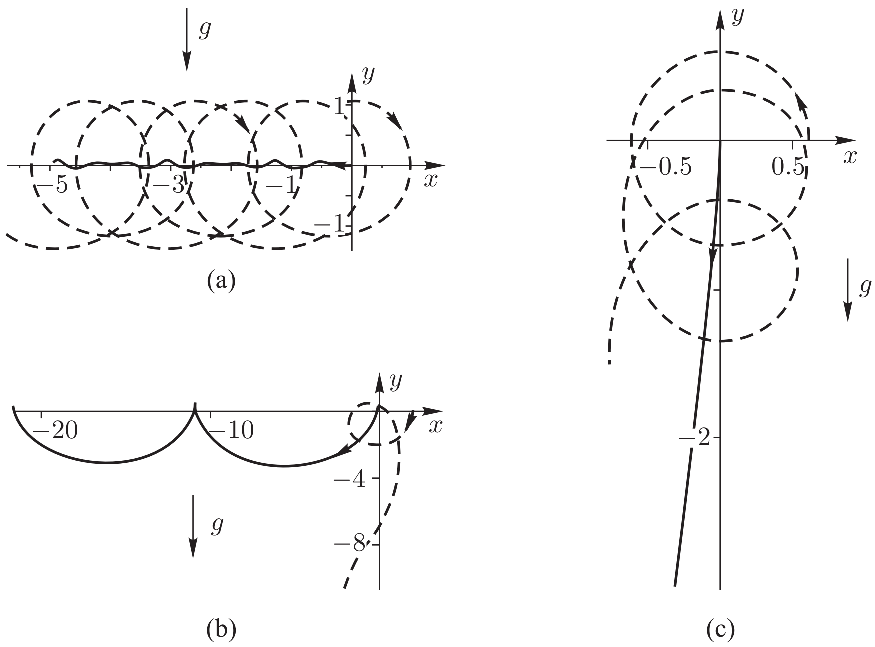

Рис. 2. Движение цилиндра (сплошная линия) и вихря (пунктир) в поле силы тяжести: (a) цилиндр и вихрь движутся вместе в ограниченной полосе, вихрь захвачен цилиндром; (b) цилиндр движется в ограниченной полосе, вихрь покидает цилиндр; (c) цилиндр покидает вихрь и движется в направлении действия силы тяжести ($\lambda = \lambda_1$).

единственным решением системы, получаемой подстановкой v_1 и v_2 в вышеупомянутые уравнения из правых частей (4.2), будет $x_1 = 0$, что соответствует положению вихря на одной вертикальной прямой с центром цилиндра. Наконец, подставляя x_1, v_1, v_2 в правую часть первого уравнения (4.2), имеем для положения вихря уравнение

$$\overline{y}_1^4 + (\widetilde{\lambda}^2 - \widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}_1)\overline{y}_1^3 - \widetilde{\lambda}^2\overline{y}_1 - 1 = 0, \tag{6.1}$$

где введены обозначения $\overline{y}_1 = \dfrac{y_1}{R}$, $\widetilde{\lambda} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{agR}}$, $\widetilde{\lambda}_1 = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{agR}}$. Интересно отметить, что подобное уравнение было получено в [14] при исследовании задачи адвекции вихря в поле осциллирующего цилиндра.

Таким образом, единственными стационарными решениями системы (4.2) являются $(x_1, y_1, v_1, v_2) = \left(0, y_1, -\dfrac{ag}{\lambda}, 0\right)$, где $y_1 = \overline{y}_1 R$, $\overline{y}_1$ — корень (6.1). Эти решения описывают режимы, при которых цилиндр и вихрь движутся горизонтально, прямолинейно с постоянной скоростью. Для гидродинамически несимметричного тела при отсутствии вихря устойчивость подобного прямолинейного горизонтального движения исследовалась в [8].

Легко понять, что движение цилиндра по горизонтальной прямой с постоянной скоростью возникает при равенстве нулю суммы всех сил, приложенных к нему, то есть в случае, когда сила тяжести уравновешивается подъемной силой, обусловленной наличием циркуляции. Вихрь, помещенный в точку C (рис. 6), скорость жидкости в которой равна скорости центра цилиндра, будет неподвижным относительно цилиндра. Следовательно, инверсный образ вихря внутри цилиндра также будет неподвижным относительно него. Тогда, как показано в [10], сила, действующая со стороны вихря на цилиндр, будет равна нулю. В результате такое движение вихря не будет вызывать возмущений прямолинейного равномерного движения цилиндра. Линии тока, соответствующие описанному случаю, изображены на рисунке 6.

Из (6.1) следует, что положение относительного равновесия вихря определяется двумя параметрами $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{\lambda}_1$, приведенными циркуляцией и интенсивностью вихря. В общем случае для фиксированных $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}_1)$ может существовать до 4 положений равновесия (см. рис. 4). Единственным ограничением служит условие $|y_1| > R$, так как в противном случае вихрь окажется внутри цилиндра. Без ограничения общности можем считать $\widetilde{\lambda} > 0$. Общий вид многолистной поверхности (6.1) изображен на рисунке 4. Рассмотрим основные особенности этой поверхности.

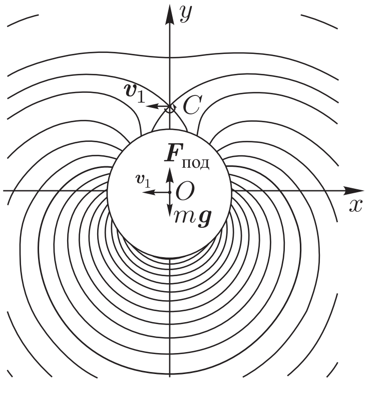

Рис. 3. Относительное равновесие цилиндра и вихря.

1. Во второй четверти плоскости $(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda})$, соответствующей $\widetilde{\lambda}_1 < 0$, $\widetilde{\lambda} > 0$, имеется только одно положение равновесия вихря, расположенное ниже цилиндра (нижний лист поверхности (6.1)).

2. В первой четверти ($\widetilde{\lambda}_1 > 0$, $\widetilde{\lambda} > 0$) имеется положение равновесия над цилиндром (верхний лист поверхности (6.1)). Нижний лист поверхности (6.1) имеет особенность типа «складка», в результате в этой области, соответствующей, например, точкам, лежащим на вертикальной прямой, отрезок которой выделен на рисунке 4, возникает три положения равновесия при фиксированных $(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda})$: два ниже цилиндра и одно выше цилиндра.

3. Верхний лист поверхности (6.1) «обрезается» по оси $\widetilde{\lambda}_1 = 0$ условием $y_1 > R$, то есть положение равновесия вихря достигает границы цилиндра сверху.

4. Аналогично предыдущему пункту, нижний лист поверхности (6.1) и сшитая с ним «складка» «обрезается» условием $y_1 < -R$, то есть положения равновесия вихря достигают границы цилиндра снизу.

5. Вид поверхности (6.1) в третьей и четвертой четвертях ($\widetilde{\lambda} < 0$), в силу симметрии (6.1) относительно преобразования $\widetilde{\lambda}_1 \to -\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda} \to -\widetilde{\lambda}$, находится с помощью поворота поверхности, изображенной на рисунке 4, относительно оси $\overline{y}_1$ на 180°.

6. На рисунке 4 устойчивые решения (6.1) расположены на среднем листе и выделены темно-серым цветом, неустойчивые решения, расположенные на верхнем и нижнем листе, изображены светло-серым цветом, наконец, неустойчивые решения, расположенные на среднем листе, указаны штриховкой.

Обсудим устойчивость найденных относительных равновесий, следуя, например, [15]. Как известно, для исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем необходимо вычислить два инварианта неподвижных точек:

1. индекс квадратичной формы d^2H_c $\left(\text{то есть симметричной } (4\times4)\text{-матрицы } \left\|\dfrac{\partial^2 H_c}{\partial\zeta_k\,\partial\zeta_j}\right\|\right)$, который принимает значения от 0 до 4;

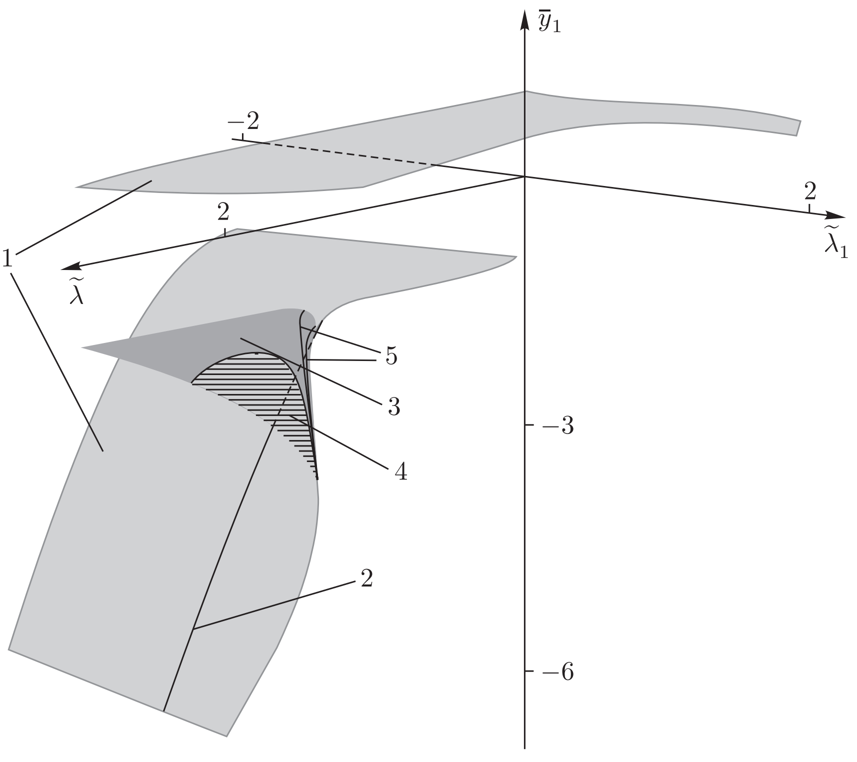

Рис. 4. Положения равновесия вихря $\overline{y}_1$ в зависимости от параметров $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\lambda}_1$: 1 — неустойчивые точки (ind = 1), 2 — неустойчивые точки (форма d^2H_c вырождена, система первого приближения удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости), 3 — устойчивые точки (ind = 2, тип точки — центр–центр), 4 — неустойчивые точки (ind = 2, тип точки фокус–фокус), 5 — резонансные кривые.

2. тип особой точки в зависимости от собственных чисел линеаризации векторного поля $\left(\text{то есть симплектической } (4\times 4)\text{-матрицы } \left\|\sum\limits_k J_{ik}\dfrac{\partial^2 H_c}{\partial\zeta_k\,\partial\zeta_j}\right\|\right)$, который принимает одно из следующих значений: центр–центр, седло–центр, седло–седло, фокус–фокус.

Следуя [15], собственные числа линеаризации векторного поля, то есть корни характеристического полинома

$$\chi(\mu) = \det\left(\sum_k J_{ik}\frac{\partial^2 H_c}{\partial\zeta_k\,\partial\zeta_j} - \mu E\right) = \mu^4 + a\mu^2 + b, \tag{6.2}$$

будем изображать на плоскости коэффициентов характеристического полинома. На рисунке 5а, заимствованном из работы [15], изображены области устойчивости и неустойчивости, указаны соответствующие значения индекса квадратичной формы d^2H_c, а также типы неподвижных точек.

Возвращаясь к рисунку 4, мы видим, что нижний и верхний листы поверхности (6.1) состоят из неустойчивых неподвижных точек типа седло–центр, так как в них индекс квадратичной формы d^2H_c равен 1. Эти точки соответствуют области $b < 0$ на рисунке 5а. Средний лист состоит из неустойчивых точек типа фокус–фокус и устойчивых точек типа центр–центр. В этих точках индекс d^2H_c равен 2.

Рассмотрим более подробно область первой четверти плоскости $(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda})$, в которой имеется три положения равновесия. Этот фрагмент поверхности (6.1) изображен на рисунке 5b.

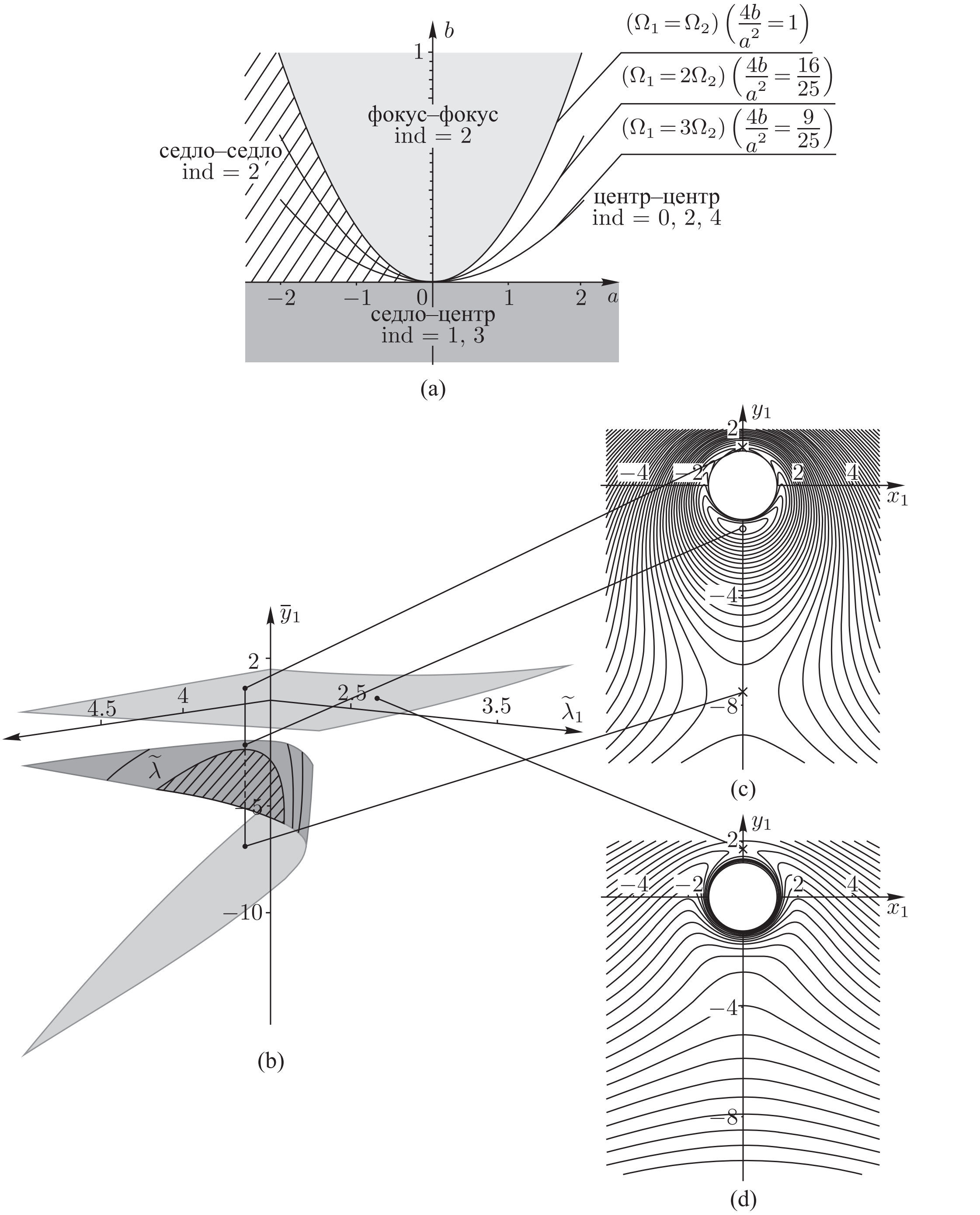

Рис. 5. Положения равновесия и их устойчивость. (a) Области устойчивости и неустойчивости и соответствующие типы неподвижных точек на плоскости коэффициентов характеристического полинома. Указаны кривые, соответствующие резонансам третьего и четвертого порядков. (b) Положения относительного равновесия вихря в зависимости от параметров $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\lambda}_1$. Отмечены три положения равновесия (два из которых неустойчивы, одно устойчиво), соответствующие фиксированным значениям $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\lambda}_1$. При другом значении $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\lambda}_1$ указано единственное положение равновесия. (c) Область Хилла для случая трех положений равновесия. (d) Область Хилла для случая единственного положения равновесия. На (c), (d) крестиком отмечены неустойчивые точки, кружком — устойчивая неподвижная точка.

Как и на рисунке 4, мы видим, что верхний и нижний листы поверхности (6.1) состоят из неустойчивых положений равновесия с $\mathrm{ind} = 1$, типа седло–центр, соответствующих области $b < 0$ на рисунке 5a. Средний лист поверхности (6.1) состоит из точек двух типов: устойчивых точек типа центр–центр и неустойчивых типа фокус–фокус. Индекс $d^2 H_c$ в точках обоих типов $\mathrm{ind} = 2$. Устойчивым точкам соответствует область $\left(a > 0,\ 0 < b < \dfrac{a^2}{4}\right)$ на рисунке 5a. Неустойчивым точкам соответствует область $b > \dfrac{a^2}{4}$ на рисунке 5a. На рисунках 5a и 5b изображены кривые, отвечающие резонансам третьего и четвертого порядка, соответственно в $b = \dfrac{4a^2}{25}$ и $b = \dfrac{9a^2}{100}$, которые лежат в области устойчивых положений равновесия. Для определения устойчивости точек, лежащих на границах $b = 0$, $b = \dfrac{a^2}{4}$, на резонансных кривых третьего и четвертого порядка требуется дополнительное исследование.

Наконец, рассмотрим положения равновесия, соответствующие фиксированным значениям $\widetilde{\lambda}_1 = 2,1$ и $\widetilde{\lambda} = 4$. Области Хилла в окрестности данных положений изображены на рисунке 5c. Очевидно, что верхнее и нижнее положение неустойчивы, а среднее положение устойчиво.

При увеличении циркуляции вокруг цилиндра и неизменной интенсивности вихря, вертикальная прямая, параллельная оси $\overline{y}_1$, точки пересечения которой с поверхностью (6.1) указывают положения равновесия, будет двигаться вдоль оси $\widetilde{\lambda}$. Когда эта прямая пересечет границу, являющуюся образом параболы $b = \dfrac{a^2}{4}$, тип неподвижной точки сменится с центр–центр на фокус–фокус. Области Хилла в окрестности данных положений равновесия будут аналогичными изображенным на рисунке 5c. Среднее положение равновесия при этом становится неустойчивым.

Рассмотрим поведение системы при неизменной циркуляции и увеличении интенсивности вихря. При этом вертикальная прямая, параллельная оси $\overline{y}_1$, движется вдоль оси $\widetilde{\lambda}_1$. Устойчивая точка типа центр–центр сближается с неустойчивой точкой типа фокус–фокус и на кривой, являющейся образом границы $b = 0$, сливается с ней. При дальнейшем увеличении интенсивности вихря остается только неустойчивое положение равновесия типа седло–центр, расположенное на верхнем листе поверхности (6.1), то есть над цилиндром. Соответствующая область Хилла будет иметь вид, изображенный на рисунке 5d. Изменение числа положений равновесия при изменении $\widetilde{\lambda}_1$, очевидно, носит бифуркационный характер.

Следует отметить, что расположение границы, отделяющей устойчивые и неустойчивые неподвижные точки $\mathrm{ind} = 2$, зависит от параметров задачи (массы и радиуса цилиндра), так как собственные числа линеаризации векторного поля существенным образом зависят от a и R. Напротив, вид поверхности (6.1) от a и R не зависит. Тип неподвижных точек, отображенный на рисунках 4 и 5, определялся для значений $a = R = 1$.

7. Заключение

В данной работе рассмотрена задача о движении под действием силы тяжести массивного кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. Приведена гамильтонова форма уравнений движения. Указаны возможные типы движений системы. Найдены относительные равновесия системы и исследована их устойчивость. Следует отметить, что верхнее положение равновесия всегда является неустойчивым, нижнее положение равновесия также всегда неустойчиво. Наконец, среднее положение равновесия может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от параметров задачи.

В дальнейшем планируется обобщение задачи на случай N вихрей. Также необходимо рассмотреть движение цилиндрического тела произвольной формы. В рассмотренной задаче кругового цилиндра и вихря необходимо исследование на наличие периодических решений в окрестности найденных стационарных решений. Интерес представляет также вопрос о существовании хореографий. Среди нерешенных задач отметим еще вопрос о нахождении границы режимов движения цилиндра и вихря, изображенных на рисунке 2, как функции параметров, а также исследования бифуркационного характера смены числа положений равновесия редуцированной системы.

Авторы выражают благодарность за плодотворные обсуждения А. В. Борисову и И. С. Мамаеву.

Список литературы

[1] Maxwell J. K. On a particular case of descent of a heavy body in a resisting medium // Cambridge and Dublin Math. Journ., 1854, vol. 9, pp. 145–148.

[2] Жуковский Н. Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья первая // Собр. соч.: В 7 тт. М.–Л.: Глав. ред. авиац. лит., 1937. Т. 5, с. 72–80.

[3] Жуковский Н. Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья вторая // Собр. соч.: В 7 тт. М.–Л.: Глав. ред. авиац. лит., 1937. Т. 5, с. 100–115.

[4] Козлов В. В. К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ., 1990, № 1, с. 79–86.

[5] Jones M. A., Shelly M. J. Falling cards // J. Fluid Mech., 2005, vol. 540, pp. 393–425.

[6] Michelin S., Smith S. G. L. Falling cards and flapping flags: Understanding fluid-solid interaction using an unsteady point vortex model // Theor. Comput. Fluid Dyn., 2010, vol. 24, pp. 195–200.

[7] Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. М.–Л.: АН СССР, 1933. Т. 1, с. 133–150.

[8] Козлов В. В. О падении тяжелого цилиндрического твердого тела в жидкости // МТТ, 1993, № 4, с. 113–117.

[9] Рамоданов С. М. О влиянии циркуляции на характер падения тяжелого твердого тела в жидкости // МТТ, 1996, № 5, с. 19–24.

[10] Ramodanov S. M. Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 1, pp. 33–38.

[11] Borisov A. V., Mamaev I. S. An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 2, pp. 163–166.

[12] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2005, vol. 5, no. 1, pp. 35–50.

[13] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D. The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices // Phys. Fluids, 2002, vol. 14, pp. 1214–1227.

[14] Kadtke J. B., Novikov E. A. Chaotic capture of vortices by a moving body: 1. The single point vortex case // Chaos, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 543–553.

[15] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Бифуркационный анализ и индекс Конли в механике // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 649–681.

[16] Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S. Asymptotic stability and associated problems of failing rigid body // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 5, pp. 531–565.

[17] Tanabe Y., Kaneko K., Behavior of a falling paper // Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 73, no. 10, pp. 1372–1375.

[18] Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962. 404 с.

[19] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos, 2006, vol. 16, no. 1, 013118, 7 pp.

Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex

Sergey V. Sokolov[1], Sergey M. Ramodanov[2]

[1,2]Institute of Computer Science,
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia
[1]ramodanov@mail.ru, [2]sokolovsv72@mail.ru

We consider a system which consists of a heavy circular cylinder and a point vortex in an unbounded volume of ideal liquid. The liquid is assumed to be irrotational and at rest at infinity. The circulation about the cylinder is different from zero. The governing equations are Hamiltonian and admit an evident integral of motion – the horizontal component of the momentum. Using the integral we reduce the order and thereby obtain a system with two degrees of freedom. Most remarkable types of partial solutions of the system are presented and stability of equilibrium solutions is investigated.

MSC 2010: 70Hxx, 70G65
Keywords: point vortices, Hamiltonian systems, reduction, stability of equilibrium solutions

Received August 11, 2012, accepted September 14, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 617–628 (Russian)