



УДК: 531.37

MSC 2010: 70E18; 70F40

## О механической линзе

А. П. Иванов, Н. Н. Ермакова

В данной работе рассмотрена задача о динамике тяжелого однородного шара, движущегося по инерции по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости под действием сил сухого трения. Считая коэффициент трения переменным, построена кривая его «переключения» с одного наперед заданного значения на другое так, что параллельный «пучок» аналогичных шаров, выпущенных из точек некоторого отрезка с одинаковыми линейными и угловыми скоростями, сходится к одной точке.

Ключевые слова: сухое трение, переменный коэффициент трения, динамика шара

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим тяжелый однородный шар, движущийся по инерции по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости. Скорость точки контакта считаем достаточно большой, чтобы пренебречь трением верчения и трением качения, а также их влиянием на закон трения скольжения. Для последнего примем формулу Кулона

$$\mathbf{F} = -\mu P \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \quad (1.1)$$

---

Получено 30 июля 2012 года

После доработки 15 августа 2012 года

---

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0039), гранта президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 Динамические системы классической механики и проблемы управления, Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00354) и ФЦП «Кадры» (14.A18.21.0232).

---

Иванов Александр Павлович

[arivanov@orc.ru](mailto:arivanov@orc.ru)

Московский физико-технический институт

141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

Ермакова Надежда Николаевна

[enn@rcd.ru](mailto:enn@rcd.ru)

Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

где  $F$  — сила трения,  $P$  — вес шара,  $\mu$  — коэффициент трения и  $u$  — скорость точки контакта. Данная система впервые была исследована в 1758 году Иоганном Эйлером (сыном Леонарда Эйлера) [1], полное и подробное решение приведено в [2]. Перечислим основные свойства движения, существенные для последующего изложения:

1.  $e = \frac{u}{u} = \text{const}$ , то есть направление скольжения неизменно;
2. если начальная скорость центра шара  $v_0$  не коллинеарна  $e = \frac{u}{u}$ , то центр шара движется по параболе (вплоть до остановки скольжения)

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} f t^2 e, \quad f = \mu g, \quad (1.2)$$

где  $r, r_0$  — радиус-вектор точки контакта и его начальное значение (при  $t = 0$ ),  $t$  — продолжительность движения,  $g$  — ускорение свободного падения;

3. модуль скорости скольжения уменьшается по закону

$$u = u_0 - f \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) t, \quad (1.3)$$

где  $u_0$  — начальное значение,  $a$  и  $\rho$  — радиус шара и его радиус инерции.

Данные свойства позволяют однозначно построить траекторию центра шара.

В июне 2012 года профессор Энди Руина на симпозиуме под эгидой IUTAM в Ижевске предложил [3] усложнить задачу, считая коэффициент трения переменным, то есть зависящим от  $r$ , и подобрать эту зависимость таким образом, чтобы параллельный «пучок» аналогичных шаров, выпущенных из точек некоторого отрезка с одинаковыми линейными и угловыми скоростями, сходил в одной точке, называемой точкой прицеливания системы. Реализация данного эффекта могла бы оказаться полезной, в частности, для создания тренажеров для боулинга (рис. 1).

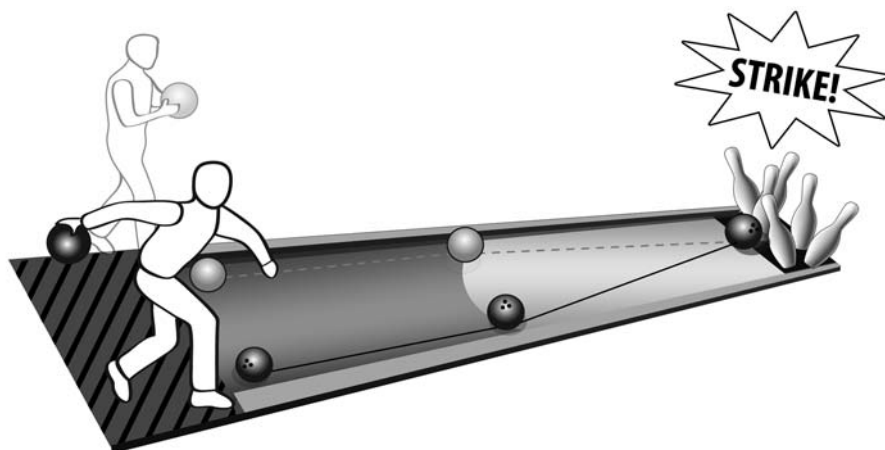


Рис. 1. Гипотетический тренажер для начинающих спортсменов по боулингу.

## 2. Основные предположения и получение уравнения кривой переключений в общем виде

Выберем стартовый отрезок  $[AB]$  (без ограничения общности положим  $[AB] \in Ox$ ) и положим, что для всех траекторий, выходящих из него, векторы  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{e}$  одинаковы и не коллинеарны. Согласно формуле (1.2), при  $t > 0$  этот отрезок движется поступательно. Зависимость коэффициента трения от  $\mathbf{r}$  будем считать бинарной, то есть

$$f(\mathbf{r}) = \begin{cases} f_1, & \text{если } \varphi(\mathbf{r}) < 0, \\ f_2, & \text{если } \varphi(\mathbf{r}) \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $f_1 \neq f_2$ , а функция  $\varphi(\mathbf{r})$ , задающая при  $\varphi(\mathbf{r}) = 0$  кривую переключения, подлежит определению.

Возьмем какую-либо точку  $\mathbf{r}_0^*$  из интервала  $(AB)$  в качестве начального значения и построим выходящую из нее траекторию (1.2). Эту траекторию будем считать опорной и выберем на ней точку «прицеливания»  $C$ , в которую должны попасть все траектории, достаточно близкие к данной. Для этого зафиксируем две величины:  $t_1 > 0$  — время движения в области  $\varphi(\mathbf{r}) < 0$  и  $s > 0$  — время движения в области  $\varphi(\mathbf{r}) > 0$ . Такой выбор достаточно произволен, необходимо лишь убедиться (формула (1.3)), что трение не успеет остановить скольжение шара. Кроме того, величина  $t_1$  не должна быть малой, так как иначе кривая переключений может пересечь стартовый отрезок, что сузит исследуемый пучок шаров. Уравнение опорной траектории вследствие (1.2), (2.1) имеет вид

$$\mathbf{r}^*(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_0^* + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} f_1 t^2 \mathbf{e}, & \text{при } t \leq t_1, \\ \mathbf{r}_1^* + \mathbf{v}_1^* (t - t_1) + \frac{1}{2} f_2 (t - t_1)^2 \mathbf{e}, & \text{при } t_1 \leq t \leq t_1 + s, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_0^* + \mathbf{v}_0 t_1 + \frac{1}{2} f_1 t_1^2 \mathbf{e}, \quad \mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_0 + f_1 t_1 \mathbf{e}.$$

Радиус-вектор точки прицеливания  $\mathbf{r}_C$  определяется по формуле

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_1^* + (\mathbf{v}_0 + f_1 t_1 \mathbf{e}) s + \frac{1}{2} f_2 s^2 \mathbf{e}, \quad (2.3)$$

а кривая переключений проходит через точку  $\mathbf{r}_1^*$ , то есть  $\varphi(\mathbf{r}_1^*) = 0$ .

Рассмотрим теперь другую траекторию из данного пучка. Ее начальная точка  $\mathbf{r}_0$  на интервале  $(AB)$  определится числом  $\delta$  (пропорциональным расстоянию между  $\mathbf{r}_0^*$  и  $\mathbf{r}_0$ ), так что

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^* + \delta \mathbf{i} = \mathbf{r}_0^* + \delta(\alpha \mathbf{v}_0 + \beta \mathbf{e}), \quad (2.4)$$

где  $\alpha, \beta$  — координаты направляющего вектора  $\mathbf{i}$  прямой  $(AB)$  в косоугольном базисе  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{e})$ . По аналогии с (2.2), уравнение этой траектории имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} f_1 t^2 \mathbf{e}, & \text{при } t \leq t_1 + \tau, \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 (t - t_1 - \tau) + \frac{1}{2} f_2 (t - t_1 - \tau)^2 \mathbf{e}, & \text{при } t_1 + \tau \leq t \leq t_1 + \tau + p, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t_1 + \tau) + \frac{1}{2} f_1 (t_1 + \tau)^2 \mathbf{e}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + f_1 (t_1 + \tau) \mathbf{e},$$



где  $\mathbf{r}_0$  определяется по формуле (2.4), момент времени  $t_1 + \tau$  соответствует пересечению траектории с кривой переключений, а величина  $p$  равна времени движения шара в области  $\varphi > 0$ .

Условие попадания траектории в точку  $C$  выражается равенством

$$\mathbf{r}(t_1 + \tau + p) = \mathbf{r}_C, \quad (2.6)$$

Векторное равенство (2.6) равносильно системе двух скалярных уравнений относительно неизвестных  $\tau$  и  $p$ , содержащей также параметр  $\delta$ , определяющий начальное положение траектории из пучка. Отсюда можно выразить две из этих величин как некоторые функции третьей (например,  $p$  и  $\delta$  через  $\tau$ ). Тогда формула

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1^* + \delta(\alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{e}) + \mathbf{v}_0\tau + \frac{1}{2}f_1(2t_1\tau + \tau^2)\mathbf{e} \quad (2.7)$$

представляет собой параметрическое уравнение кривой переключений. В частности, если  $\tau = 0$  и  $\delta = 0$ , то получаем  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1^*$ , что соответствует точке переключения на опорной кривой (2.2). Следовательно, формула (2.7) решает задачу.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** После построения кривой переключения (2.7) необходимо убедиться, что опорная траектория (2.2) действительно ее пересекает: в некоторых вырожденных случаях возможно касание с возвратом в область  $\varphi < 0$ . Кроме того, необходимо убедиться в отсутствии повторных пересечений этих линий.

Подставляя выражения (2.3), (2.4) и (2.7) в уравнение (2.6), получим

$$\begin{aligned} \delta(\alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{e}) + \mathbf{v}_0\tau + \frac{1}{2}f_1(2t_1\tau + \tau^2)\mathbf{e} + (\mathbf{v}_0 + f_1(t_1 + \tau)\mathbf{e})p + \frac{1}{2}f_2p^2\mathbf{e} = \\ = (\mathbf{v}_0 + f_1t_1\mathbf{e})s + \frac{1}{2}f_2s^2\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Приравнявая коэффициенты при базисных векторах  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{e}$  в левой и правой части системы (2.8), получим систему

$$\alpha\delta + \tau + p = s, \quad (2.9)$$

$$\beta\delta + f_1t_1\tau + \frac{1}{2}f_1\tau^2 + f_1(t_1 + \tau)p + \frac{1}{2}f_2p^2 = f_1t_1s + \frac{1}{2}f_2s^2. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) линейно, оно позволяет без труда исключить одну из переменных. Уравнение (2.10) квадратично, и для его использования требуются дополнительные усилия.

### 3. Случай абсолютно гладкой поверхности на одной из фаз движения

Выделим два предельных частных случая, когда уравнение (2.10) упрощается.

1°  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{f}_2 \neq \mathbf{0}$ , то есть шар сначала движется по гладкой части плоскости («лед»), а затем попадает на шероховатую часть.

Уравнение (2.10) примет вид

$$\beta\delta + \frac{1}{2}f_2p^2 = \frac{1}{2}f_2s^2.$$



Если  $\beta \neq 0$  (то есть стартовый отрезок  $[AB]$  не коллинеарен начальной скорости  $\mathbf{v}_0$ ), то

$$\delta = \frac{1}{2}\beta^{-1}f_2(s^2 - p^2), \quad \tau = s - \alpha\delta - p.$$

В формуле (2.7) получаем параметрическое уравнение линии переключения в виде

$$\mathbf{r}(p) = \mathbf{r}_1^* + \delta(\alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{e}) + \tau\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}_1^* + \frac{1}{2}f_2(s^2 - p^2)\mathbf{e} + (s - p)\mathbf{v}_0, \quad (3.1)$$

где значению параметра  $p = s$  соответствует  $\delta = 0$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1^*$ , то есть мы находимся на опорной кривой. Уравнение (3.1) задает кривую второго порядка, которая, очевидно, является параболой, так как она не ограничена и связна.

В случае  $\beta = 0$  все траектории, исходящие из отрезка  $[AB]$ , сливаются в одну (опорную), хотя выход в точку переключения  $\mathbf{r}_1^*$  происходит в разные моменты времени.

2°  $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$ , то есть шар сначала движется по шероховатой части плоскости, а затем попадает на «лед».

Уравнение (2.10) примет вид

$$\beta\delta + f_1t_1\tau + \frac{1}{2}f_1\tau^2 + f_1(t_1 + \tau)p = f_1t_1s.$$

Подставляя сюда равенство (2.9), будем иметь

$$\delta(\beta - \alpha f_1(t_1 + \tau)) - \frac{1}{2}f_1\tau^2 + f_1\tau s = 0. \quad (3.2)$$

В данном случае в качестве параметра удобнее использовать  $\tau$ . Если

$$\beta - \alpha f_1 t_1 \neq 0, \quad (3.3)$$

то в формуле (3.2) коэффициент при  $\delta$  отличен от нуля в достаточно малой окрестности значения  $\tau = 0$ ; тогда

$$\delta = f_1\tau \left( \frac{1}{2}\tau - s \right) (\beta - \alpha f_1(t_1 + \tau))^{-1}. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в формулу (2.7), получим представление линии переключений в виде рациональной параметрической кривой

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_1^* + f_1\tau \left( \frac{1}{2}\tau - s \right) (\beta - \alpha f_1(t_1 + \tau))^{-1} (\alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{e}) + \mathbf{v}_0\tau + \frac{1}{2}f_1(2t_1\tau + \tau^2)\mathbf{e},$$

причем опорной траектории соответствует значение  $\tau = 0$ .

В случае, когда в формуле (3.3) имеет место равенство, формула (3.2) принимает вид

$$f_1\tau \left( \delta\alpha - \frac{1}{2}\tau + s \right) = 0.$$

Это означает, что либо  $\tau = 0$ , а  $\delta$  произвольно, либо  $\delta\alpha - \frac{1}{2}\tau + s = 0$ . В первом из этих случаев формула (2.7) описывает отрезок, параллельный стартовому отрезку  $[AB]$ . Однако при этом оказывается, что при выходе на кривую переключений имеет место касание



траекторией этой кривой, а затем все траектории идут вдоль отрезка переключений, точка прицеливания  $C$  также лежит на этом отрезке.

Во втором случае  $\alpha \neq 0$ , иначе в силу равенства, противоположного (3.3), мы имели бы также  $\beta = 0$ , что невозможно, так как  $\mathbf{i} \neq 0$ . Следовательно,  $\delta$  будет линейной функцией от  $\tau$  и формула (2.7) описывает параболу (по аналогии со случаем 1°). Однако такая кривая не содержит точку опорной траектории  $\tau = 0, \delta = 0$ . Поэтому ее нельзя считать решением задачи.

#### 4. Анализ движения в общем случае

Перейдем к обсуждению общего случая  $0 < f_1 \neq f_2 > 0$ . Дважды воспользовавшись равенством (2.9), приведем (2.10) к виду

$$\delta(\beta - f_1 t_1) + \frac{1}{2} f_1 (\alpha^2 \delta^2 - 2\alpha \delta s) + \frac{1}{2} (f_2 - f_1) p^2 = \frac{1}{2} (f_2 - f_1) s^2,$$

откуда

$$p(\delta) = \left[ s^2 - (2\delta(\beta - f_1 t_1) + f_1 (\alpha^2 \delta^2 - 2\alpha \delta s)) (f_2 - f_1)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (4.1)$$

Искомая кривая иррациональна, она описывается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\delta) &= \mathbf{r}_1^* + \delta(\alpha \mathbf{v}_0 + \beta \mathbf{e}) + \mathbf{v}_0 \tau + \frac{1}{2} f_1 (2t_1 \tau + \tau^2) \mathbf{e}, \\ \tau &= s - p(\delta) - \alpha \delta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $p(\delta)$  выражается формулой (4.1). Заметим, что при  $\delta = 0$  имеем  $p = s$  и  $\tau = 0$ , что соответствует опорной траектории.

Убедимся, что кривая (4.2) пересекает опорную траекторию, то есть вектор  $\mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_0 + f_1 t_1 \mathbf{e}$  не является касательным к этой кривой. Касательный вектор к кривой (4.2) в точке ее пересечения с опорной траекторией определяется формулой

$$\left. \frac{d\mathbf{r}(\delta)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{d\delta}{d\tau} \right|_{\tau=0} (\alpha \mathbf{v}_0 + \beta \mathbf{e}) + \mathbf{v}_0 + f_1 t_1 \mathbf{e}. \quad (4.3)$$

Как следует из формул (4.1), (4.2), производная в правой части равенства (4.3) отлична от нуля при условии  $p \neq 0$ , очевидно выполненном в окрестности опорной траектории (на которой  $p = s$ ). Следовательно, условие отсутствия касания равносильно неколлинеарности векторов  $\mathbf{v}_1^*$  и  $\mathbf{i} = \alpha \mathbf{v}_0 + \beta \mathbf{e}$ , то есть

$$\beta \neq \alpha f_1 t_1. \quad (4.4)$$

Заметим, что условие (4.4) равносильно (3.3).

Суммируя проведенные исследования, сформулируем основной результат в виде теоремы.

**Теорема.** Пусть дан пучок шаров, характеризующийся начальной скоростью центра  $\mathbf{v}_0$  и единичным вектором, противоположным скорости скольжения точки контакта  $\mathbf{e}$ , а также положительные коэффициенты трения  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Начальные положения точек контакта лежат на отрезке прямой с направляющим вектором  $\mathbf{i} = \alpha \mathbf{v}_0 + \beta \mathbf{e}$ . Примем

одну из траекторий, выходящих из этого отрезка, за опорную. Движение по опорной траектории состоит из двух фаз (см. (2.2)). При этом продолжительность первой фазы  $t_1$  определяется в соответствии с (4.4). Точка прицеливания  $C$  лежит на опорной траектории и определяется продолжительностью второй фазы  $s$ , величина которой ограничена условием скольжения (в формуле (1.3)  $u > 0$ ).

Тогда существует единственная кривая переключений, при пересечении которой коэффициент трения меняется с  $\mu_1$  на  $\mu_2$ , такая, что для достаточно малых  $|\delta|$  все траектории пучка проходят через точку  $C$ .

Аналогичное утверждение справедливо в предельных случаях  $\mu_1 = 0$  (при условии  $\beta \neq 0$ ) и  $\mu_2 = 0$ . Если  $\mu_1 = 0$ ,  $\beta = 0$ , то все траектории сливаются в одну (со сдвигом времени), при этом кривая переключения не определена.

## 5. Результаты численного построения кривых переключения и траекторий движения шаров

Положим начальный отрезок  $[AB] \in Ox$ , опорную траекторию — выходящей из точки  $\mathbf{r}^* = \mathbf{i}$ , начальные значения скоростей шара —  $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ , коэффициент трения поверхности в первой фазе движения —  $\mu_1 = 0.2$ . Построим траекторию и вычислим соответствующее время  $t$  движения шара до полной остановки в предположении, что вся поверхность однородна с  $\mu_1 = 0.2$ . Построим согласно (2.2) опорную кривую, для чего выберем на траектории точку  $\mathbf{r}_1^*(t_1 < t)$  изменения значения коэффициента трения с  $\mu_1$  на  $\mu_2$ , определим на траектории второй фазы движения точку прицеливания  $\mathbf{r}_C(s)$ , через которую должны пройти все траектории, выходящие из  $\delta$ -окрестности точки  $\mathbf{r}^*$ . Построим согласно (4.2) кривую переключений и траектории движения шаров, достаточно близкие к опорной. Приведем примеры численного моделирования траекторий шаров для случаев перехода на более гладкую и более шероховатую поверхность.

1. Положим  $\mu_2 = 0.1$ , то есть шар, переходя через кривую переключений, попадает на более гладкую поверхность. Для этого случая опорная траектория, точка прицеливания, кривая переключений и траектории пучка приведены на рисунке 2.
2. Положим  $\mu_2 = 0.5$ , то есть шар, переходя через кривую переключений, попадает на более шероховатую поверхность. Опорная кривая, точка прицеливания, кривая переключений и траектории пучка приведены на рисунке 3.

Численные эксперименты показали, что  $\delta$ -окрестности начальных положений шаров в пучках весьма малы  $|\delta| \sim 10^{-3}$ , а кривые переключения для приведенных случаев имеют качественные различия. Так для пучка шаров, переходящих при скольжении на более гладкую поверхность (см. рис. 2), кривая переключения выходит из оси абсцисс правее опорной траектории и входит в точку прицеливания выше опорной траектории. Для пучка, переходящего при скольжении на более шероховатую поверхность (см. рис. 3), кривая переключения выходит из оси абсцисс левее опорной траектории и входит в точку прицеливания ниже опорной траектории. При увеличении значения  $|\mu_1 - \mu_2|$  кривые переключения качественно не меняются,  $\delta$ -окрестности начальных положений увеличиваются незначительно.

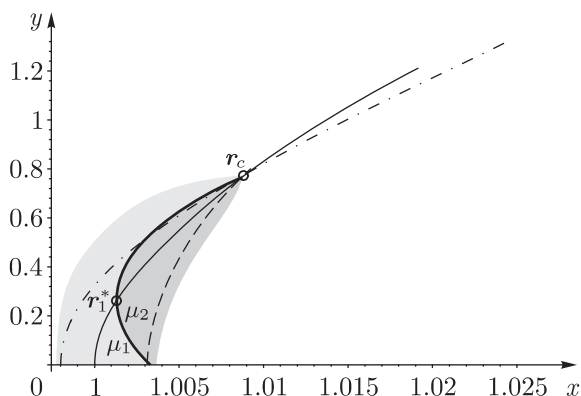


Рис. 2. Опорная траектория (тонкая сплошная линия), кривая переключений (жирная сплошная линия), точка переключения на опорной траектории  $r_1^*$ , точка прицеливания  $r_C$  и пара траекторий из пучка (пунктирная и штрихпунктирная линии) для случая  $\mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.1$ .

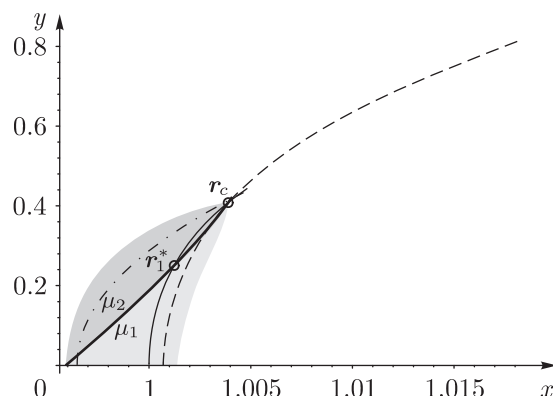


Рис. 3. Опорная траектория (тонкая сплошная линия), кривая переключений (жирная сплошная линия), точка переключения на опорной траектории  $r_1^*$ , точка прицеливания  $r_C$  и пара траекторий из пучка (пунктирная и штрихпунктирная линии) для случая  $\mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.5$ .

## 6. Увеличение области притяжения

Для увеличения области притяжения можно пойти по пути увеличения числа кривых переключения  $\varphi(r)$  в уравнении (2.5). Физически это можно реализовать, наклеивая на пол фигурные полоски из материалов с различными коэффициентами трения. Расчет формы этих полосок можно провести по аналогии с разделами 2–5. При этом надо иметь в виду, что, в отличие от случая единственного переключения, форма полосок не определяется условием (2.6) однозначно и требуется добавить некоторое требование оптимизации, что существенно усложняет задачу.

Оценку максимума области притяжения можно найти, рассматривая пучок парабол (2.4), (2.5) без переключений, причем каждая из парабол характеризуется своим коэффициентом трения  $f(\delta)$ , что соответствует непрерывному изменению коэффициента трения на опорной плоскости. Граничные значения для начальных условий  $(\delta_{\min}, \delta_{\max})$  соответствуют предельным значениям

$$f(\delta_{\min}) = f_{\max}, \quad f(\delta_{\max}) = 0,$$

где значение  $f_{\max}$  соответствует максимально шероховатому используемому материалу. Точку прицеливания  $C$  определим как пересечение предельных траекторий

$$r_0^* + \delta_{\max} i + v_0 t_1 = r_C, \quad r_0^* + \delta_{\min} i + v_0 t_2 + \frac{1}{2} f_{\max} t_2^2 e = r_C, \quad (6.1)$$

где  $\delta_{\min}$  и  $t_2$  задаются произвольно, а  $\delta_{\max}$  и  $t_1$  находим из векторного равенства

$$(\delta_{\max} - \delta_{\min})(\alpha v_0 + \beta e) + v_0 t_1 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} f_{\max} t_2^2 e. \quad (6.2)$$

Для значений  $\delta \in (\delta_{\min}, \delta_{\max})$  величина  $f(\delta)$  подбирается так, чтобы парабола (2.5) с этим коэффициентом попала в точку прицеливания. Таким образом, линии уровня функции  $f$  на опорной плоскости представляют собой параболы (в пределе  $f \rightarrow 0$  — прямая).



Приравнивая в (6.2) коэффициенты при  $e$ , получим

$$(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \beta = \frac{1}{2} \mu_{\max} g t^2. \quad (6.3)$$

Формула (6.3) показывает, что размер области притяжения пропорционален максимальному коэффициенту трения, а также квадрату времени движения шара в точку прицеливания. Если положить  $\mu = 0.3$ ,  $t = 4$  с, то получим 24 метра максимально возможной длины области притяжения.

## Список литературы

- [1] Euler E. A. Recherches plus exactes sur l'effect des moulins à vent // Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin, 1758, vol. 12, pp. 165–234.
- [2] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 335 с.
- [3] Руина Э. Частное сообщение на симпозиуме ИУТАМ «От механических к биологическим системам: интегрированный подход», Удмуртский государственный университет, Ижевск, 2012.

## On a mechanical lens

Alexander P. Ivanov<sup>1</sup>, Nadezhda N. Erdakova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow Institute of Physics and Technology

Institutskii per., 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

<sup>2</sup>Udmurt State University

Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles

Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

<sup>1</sup>apivanov@orcs.ru, <sup>2</sup>enn@rcd.ru

The problem of dynamics of heavy uniform ball moving on the fixed rough plane under its own inertia and forces of dry friction is considered. Assuming that friction coefficient is variable, the switching curve for change the value of friction coefficient is constructed. Using this curve to change the value of friction coefficient we have shown that the bundle of equal balls starting from one interval with equal linear and angular velocities should gather at one point.

MSC 2010: 70E18; 70F40

Keywords: dry friction, variable friction coefficient, ball's dynamics

Received July 30, 2012, accepted August 15, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 773–781 (Russian)