



УДК: 531.384
MSC 2010: 70E18

Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости

А. П. Иванов, А. В. Сахаров

Рассматривается твердое тело, движущееся по шероховатой плоскости за счет перемещения внутренних масс. Повороты осуществляются за счет изменения кинетического момента ротора, что обуславливает асимметрию контактных напряжений и появление вертикального момента сил трения.

Ключевые слова: сухое трение, мобильные устройства без внешних движителей

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию механических систем, способных перемещаться без внешних движителей, таких как колеса, гусеницы, ноги и пр. [1–4]. Движение таких систем осуществляется за счет определенных изменений конфигурации тел, составляющих систему и заключенных в жесткий корпус, и обусловлено наличием трения между корпусом и опорной поверхностью. Построенные на этом принципе устройства могут использоваться для очистки трубопроводов, продвижения медицинских приборов по сосудам человека, а также для создания транспортных устройств, способных двигаться в экстремальных условиях.

В работах [1, 2] рассматривалось поступательное движение корпуса за счет периодического перемещения внутренних масс. В случае одной массы, движущейся вдоль продольной оси корпуса, эффект может достигаться за счет анизотропии трения либо за счет остановок корпуса в фазе возврата внутренней массы. При добавлении второй массы, движущейся

Получено 6 июля 2012 года
После доработки 19 сентября 2012 года

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00354-а), ФЦП «Кадры» (гос. контракт № 14.А18.21.0374), грантом Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (ФГБОУ ВПО «УдГУ», дог. 11.G34.31.0039).

Иванов Александр Павлович
apivanov@orc.ru
Сахаров А.В.
aleksandr.s_89@mail.ru

Московский физико-технический институт
141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

вдоль вертикали синхронно с первой массой, асимметрия силы трения при движениях вперед или назад достигается благодаря силам инерции, изменяющим нормальную нагрузку на опору; данную пару масс можно заменить одним или тремя эксцентриками.

В данной работе исследуется возможность маневрирования (поворотов) корпуса при помощи ротора, ориентированного по продольной оси и меняющего направление вращения синфазно с движущимися массами. Такая динамика основана на неравномерности распределения нормальной нагрузки в области контакта корпуса и опоры, обусловленной как движением корпуса, так и моментом, действующим со стороны ротора. Для расчета контактных напряжений в этом случае используется подход, разработанный в [5, 6]. Как показал качественный и численный анализ, поворот вокруг вертикали возможен, при этом угловая скорость примерно пропорциональна максимальной скорости изменения кинетического момента ротора.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тяжелое твердое тело (корпус) массы m в форме параллелепипеда на шероховатой горизонтальной плоскости. Введем системы координат: инерциальную неподвижную $O_1X_1Y_1Z_1$ с началом на плоскости и связанную с телом $OXYZ$ с началом в центре параллелепипеда. Ось OZ направим вертикально вверх, ось OX — параллельно большему ребру основания, а ось OY так, чтобы система образовывала правую тройку. В начальный момент времени соответствующие оси систем параллельны и сонаправлены. Предполагается, что главные оси центрального эллипсоида инерции совпадают с осями системы $OXYZ$, а соответствующие моменты равны A , B и C . Тело содержит полость, в которой располагается ротор с массой m_r и осевым моментом инерции $J_r = \frac{1}{2}m_r r^2$, где r — радиус ротора, а также подвижное тело массы m_1 . Центр масс ротора располагается в центре масс твердого тела G (совпадает с точкой O), а ось его вращения совпадает с осью OX . Если ротор вращается с переменной угловой скоростью ω_r (что обеспечивается установленными на корпусе датчиками), то с его стороны на корпус действует пара с моментом $vecM = -J_r \dot{\omega}_r \vec{e}_1$, где \vec{e}_1 — орт оси OX .

Положение тела определяется координатами x_1 , y_1 точки O в неподвижной системе (аппликата этой точки постоянна и равна h) и углом φ между осями O_1X_1 и OX . Теоремы о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно центра масс выражаются уравнениями

$$M\vec{r}_O = \vec{F} + \vec{N} + \vec{T}, \quad M = m + m_r, \quad (1.1)$$

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{M} + \vec{M}_N + \vec{M}_T, \quad (1.2)$$

где \vec{r}_O — радиус-вектор центра масс системы O , \vec{F} , \vec{N} и \vec{T} — главные векторы внешних сил, нормальной реакции и сил трения соответственно, \vec{K}_O — кинетический момент корпуса относительно центра масс, \vec{M} , \vec{M}_N и \vec{M}_T — главные моменты внешних сил (т. е. воздействие со стороны ротора), нормальной реакции и сил трения относительно центра масс системы соответственно.

Радиус-вектор центра масс системы и направляющие орты связанной с телом системы координат выражаются формулами

$$\vec{r}_O = (x_1, y_1, h), \quad (1.3)$$

$$\vec{e}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \vec{e}_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1). \quad (1.4)$$

Величина \vec{K}_O складывается только из кинетического момента самого тела:

$$\vec{K}_O = (0, 0, C\dot{\varphi}). \tag{1.5}$$

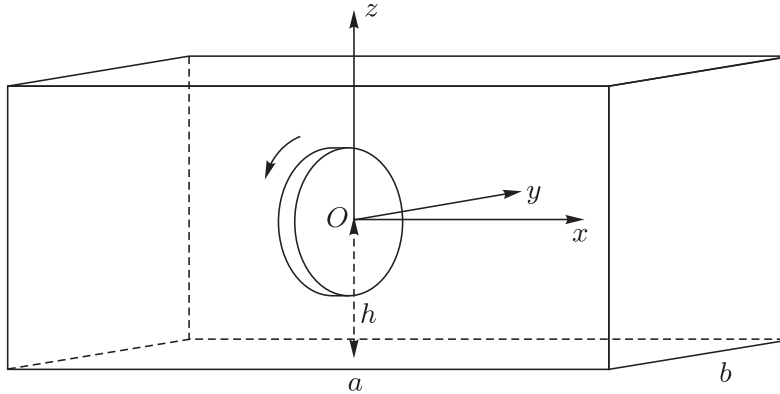


Рис. 1. Ползун с ротором.

Реакция опоры, сила трения, а также соответствующие им моменты определяются следующими формулами:

$$\vec{N} = \vec{k} \iint n(A) ds, \tag{1.6}$$

$$\vec{M}_N = \iint n(A) \vec{r}(A) \times \vec{k} ds, \tag{1.7}$$

$$\vec{T} = \iint \vec{t}(A) ds, \tag{1.8}$$

$$\vec{M}_T = \iint \vec{r}(A) \times \vec{t}(A) ds, \tag{1.9}$$

$$\vec{F} = -Mg\vec{k}, \tag{1.10}$$

$$\vec{M} = -J_r \dot{\omega}_r \vec{e}_1, \tag{1.11}$$

где $n(A)$ и $\vec{t}(A)$ — нормальное и касательное напряжение в точке $A \in D$, $\vec{r}(A) = OA$. Здесь и далее интегрирование ведется по области D , состоящей из точек корпуса, соприкасающихся с опорой. Трение локально описывается законом Амонтона–Кулона:

$$\vec{t}(A) = -\mu n(A) \frac{\vec{v}(A)}{|\vec{v}(A)|}, \tag{1.12}$$

μ — коэффициент трения. Нормальные напряжения будем описывать линейной моделью [5]:

$$n(A) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 y. \tag{1.13}$$

Подставляя выражения (1.12) и (1.13) в формулы (1.6)–(1.9) и далее подставляя все силы и моменты в систему из шести уравнений (1.1), (1.2), получим уравнения движения тела в замкнутой форме, причем в каждый момент времени неизвестными являются обобщенные ускорения \ddot{x}_1 , \ddot{y}_1 и $\ddot{\varphi}$, а также коэффициенты разложения в линейной модели (1.13).



2. Расчет контактных напряжений

Учитывая симметрию области контакта D , получим в интеграле (1.6), распространенном на область $x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$, $y \in \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$, где a и b — длина продольного и поперечного ребра тела, соответственно

$$\vec{N} = \lambda_0 S(D) \vec{k} = \lambda_0 ab \vec{k}, \quad (2.1)$$

где $S(D)$ — площадь контакта. Далее учтем условия контакта, то есть горизонтальность скоростей и ускорений всех точек тела. Они включают уравнение (1.5), выражающее вертикальность угловой скорости, а также равенство

$$\left(\vec{F} + \vec{N}, \vec{k}\right) = 0, \quad (2.2)$$

выражающее горизонтальность скорости центра корпуса.

Используя уравнения (2.1) и (2.2), найдем коэффициент разложения λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{-\left(\vec{F}, \vec{k}\right)}{ab} = \frac{Mg}{ab}. \quad (2.3)$$

Спроектируем уравнение (1.2) на орты \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Левая часть полученных уравнений будет равна нулю, ввиду формулы (1.5). Проекции моментов \vec{M}_N и \vec{M}_T , соответственно, будут иметь вид:

$$\left(\vec{M}_N, \vec{e}_n\right) = \iint n(A) \left(\vec{r}(A) \times \vec{k}, \vec{e}_n\right) ds = \iint n(A) \left(\vec{k}, \vec{e}_n \times \vec{r}(A)\right) ds, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{M}_T, \vec{e}_n\right) &= - \iint \mu n(A) \left(\vec{r}(A) \times \frac{\vec{v}(A)}{|\vec{v}(A)|}, \vec{e}_n\right) ds = \\ &= - \iint \mu n(A) \left(\frac{\vec{v}(A)}{|\vec{v}(A)|}, \vec{e}_n \times \vec{r}(A)\right) ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда, используя разложение (1.13), получим два скалярных уравнения:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\vec{M}, \vec{e}_n\right) + \iint \Psi_n(A) (\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 y) ds, \quad n = 1, 2, \\ \Psi_n(A) &= \left(\vec{k} - \mu \frac{\vec{v}(A)}{|\vec{v}(A)|}, \vec{e}_n \times \vec{r}(A)\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Запишем скорость произвольной точки A основания тела, используя формулу Эйлера:

$$\vec{v}(A) = \vec{v}_O + \dot{\varphi} \vec{k} \times OA = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0) + \dot{\varphi} (x \vec{e}_2 - y \vec{e}_1), \quad (2.7)$$

где $\vec{v}_O = \dot{\vec{r}}_O = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0)$ — скорость начала связанной системы координат, $\dot{\varphi} \vec{k}$ — угловая скорость твердого тела, $OA = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 - h \vec{k}$ — вектор, направленный от точки O к точке A в инерциальной системе координат. Для определения Ψ_n выполним ряд вспомогательных вычислений:

$$\vec{e}_1 \times \vec{r}(A) = y \vec{k} + h \vec{e}_2, \quad (2.8)$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{r}(A) = -x\vec{k} - h\vec{e}_1, \tag{2.9}$$

$$\vec{k} - \mu\tilde{q}\vec{v}(A) = -\mu\tilde{q}(\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0) - \mu\tilde{q}\dot{\varphi}(x\vec{e}_2 - y\vec{e}_1) + \vec{k}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{q} = |\vec{v}(A)|^{-1} = \left((\dot{x}_1 + \dot{\varphi}(-x \sin \varphi - y \cos \varphi))^2 + (\dot{y}_1 + \dot{\varphi}(x \cos \varphi - y \sin \varphi))^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.11}$$

Тогда получаем следующие выражения для Ψ_n :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= y - \mu\tilde{q}h((\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0), \vec{e}_2) - \mu\tilde{q}h\dot{\varphi}x, \\ \Psi_2 &= -x + \mu\tilde{q}h((\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0), \vec{e}_1) - \mu\tilde{q}h\dot{\varphi}y. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Перепишем уравнения (2.6) в виде системы двух линейных уравнений относительно переменных λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 &= a_{10}\lambda_0 - J_r\dot{\omega}_r, \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 &= a_{20}\lambda_0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где коэффициенты уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \iint \Psi_1 x ds, & a_{12} &= \iint \Psi_1 y ds, & a_{10} &= \iint -\Psi_1 ds, \\ a_{21} &= \iint \Psi_2 x ds, & a_{22} &= \iint \Psi_2 y ds, & a_{20} &= \iint -\Psi_2 ds. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Используя метод Крамера, найдем переменные

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(a_{10}\lambda_0 + J_r\dot{\omega}_r)a_{22} - a_{12}a_{20}\lambda_0}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ \lambda_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11}a_{20}\lambda_0 - (a_{10}\lambda_0 + J_r\dot{\omega}_r)a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Момент силы (1.11), создаваемый ротором, присутствует в уравнениях для определения параметров модели контактного напряжения (2.15). В разделе 4 будет показано, что несимметричное распределение контактного напряжения относительно оси, вдоль которой движется ползун, приводит к его повороту вокруг вертикальной оси. Наличие этой асимметрии учитывается в параметре λ_2 (2.15).

3. Расчет моментов реакции

Спроектируем уравнение (1.2) на ось аппликат:

$$C\ddot{\varphi} = (\vec{M}_T, \vec{k}), \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{M}_T &= - \iint (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - h\vec{k}) \times \mu n(A) \tilde{q}((\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0) + \dot{\varphi}(x\vec{e}_2 - y\vec{e}_1)) ds = \\ &= - \iint \mu n(A) \tilde{q} \left[x(\vec{e}_1 \times (\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0)) + x^2\dot{\varphi}\vec{k} + y(\vec{e}_2 \times (\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0)) + \right. \\ &\quad \left. + y\dot{\varphi}y\vec{k} - h(\vec{k} \times (\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0)) + h\dot{\varphi}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \right] ds = \\ &= - \iint \mu n(A) \tilde{q} \left[x\vec{k}(\cos \varphi \dot{y}_1 - \sin \varphi \dot{x}_1) + x^2\dot{\varphi}\vec{k} + y(-\sin \varphi \dot{y}_1 - \cos \varphi \dot{x}_1)\vec{k} + \right. \\ &\quad \left. + y^2\dot{\varphi}\vec{k} - h(-\dot{y}_1, \dot{x}_1, 0) + h\dot{\varphi}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \right] ds. \end{aligned} \tag{3.2}$$



Таким образом, получаем уравнение

$$C\ddot{\varphi} = -\mu \iint n(A) \tilde{q}(x(\cos \varphi \dot{y}_1 - \sin \varphi \dot{x}_1 + x\dot{\varphi}) + y(-\sin \varphi \dot{y}_1 - \cos \varphi \dot{x}_1 + \dot{\varphi}y)) ds. \quad (3.3)$$

Далее, спроектируем уравнение (1.1) на орты \vec{e}_1 и \vec{e}_2 :

$$\begin{aligned} M(\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{y}_1 \sin \varphi) &= -\mu \iint n(A) \tilde{q}(\vec{v}(A), \vec{e}_1) ds = \\ &= -\mu \iint n(A) \tilde{q}((\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0) + \dot{\varphi}(x\vec{e}_2 - y\vec{e}_1), \vec{e}_1) ds = \\ &= -\mu \iint n(A) \tilde{q}(\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{y}_1 \sin \varphi - y\dot{\varphi}) ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} M(-\ddot{x}_1 \sin \varphi + \ddot{y}_1 \cos \varphi) &= -\mu \iint n(A) \tilde{q}(\vec{v}(A), \vec{e}_2) ds = \\ &= -\mu \iint n(A) \tilde{q}((\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0) + \dot{\varphi}(x\vec{e}_2 - y\vec{e}_1), \vec{e}_2) ds = \\ &= -\mu \iint n(A) \tilde{q}(-\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{y}_1 \cos \varphi + \dot{\varphi}x) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим интегралы в правых частях последних трех уравнений следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint n(A) \tilde{q}(x(\cos \varphi \dot{y}_1 - \sin \varphi \dot{x}_1 + x\dot{\varphi}) + y(-\sin \varphi \dot{y}_1 - \cos \varphi \dot{x}_1 + \dot{\varphi}y)) ds, \\ I_2 &= \iint n(A) \tilde{q}(\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{y}_1 \sin \varphi - y\dot{\varphi}) ds, \\ I_3 &= \iint n(A) \tilde{q}(-\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{y}_1 \cos \varphi + \dot{\varphi}x) ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда система дифференциальных уравнений относительно переменных x_1, y_1, φ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} C\ddot{\varphi} &= -\mu I_1, \\ M(\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{y}_1 \sin \varphi) &= -\mu I_2, \\ M(-\ddot{x}_1 \sin \varphi + \ddot{y}_1 \cos \varphi) &= -\mu I_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для того чтобы разрешить уравнения относительно ускорений, сначала умножим второе уравнение на $\cos \varphi$, а третье на $\sin \varphi$, и вычтем. Затем умножим второе уравнение на $\sin \varphi$, а третье на $\cos \varphi$, и сложим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{\mu I_1}{C}, \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{\mu(I_2 \cos \varphi - I_3 \sin \varphi)}{M}, \\ \ddot{y}_1 &= -\frac{\mu(I_2 \sin \varphi + I_3 \cos \varphi)}{M}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Система (3.8) образует замкнутую систему уравнений движения ползуна. Заметим, что они соответствуют ограниченной постановке задачи, так как не учитывают поворот оси ротора вместе с корпусом. Тем самым мы пренебрегаем кинетическим моментом ротора (хотя его угловое ускорение значительно).

4. Качественный анализ

Покажем, что наличие момента силы, создаваемого ротором, приводит к повороту ползуна вокруг вертикальной оси. Примем следующие начальные условия для момента $t_0 = 0$:

$$\varphi(t_0) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = 0, \quad x_1(t_0) = 0, \quad \dot{x}_1(t_0) \neq 0, \quad y_1(t_0) = 0, \quad \dot{y}_1(t_0) = 0. \quad (4.1)$$

Такие условия соответствуют ситуации, когда к покоящемуся телу в начальный момент времени t_0 прикладывается импульс вдоль продольной оси симметрии ползуна, то есть $\vec{v}_0 = (\dot{x}_1, 0, 0)$. Тогда интеграл I_1 упрощается:

$$I_1 = - \iiint n(A) y ds. \quad (4.2)$$

Коэффициенты (2.14) системы линейных уравнений также можно упростить:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= \frac{ab^3}{12}, & a_{10} &= 0, \\ a_{21} &= -\frac{a^3b}{12}, & a_{22} &= 0, & a_{20} &= -\mu hab. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда найдем коэффициенты λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a_{20}}{a_{21}} \lambda_0 = \frac{-\mu hab}{-\frac{a^3b}{12}} \lambda_0 = \frac{12\mu h}{a^2} \lambda_0, \\ \lambda_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{J_r \dot{\omega}_r}{a_{12}} = \frac{12J_r \dot{\omega}_r}{ab^3}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Можно сделать вывод, что наличие момента силы (1.11), создаваемого ротором, приводит к несимметричному распределению контактного напряжения вдоль направляющего орта \vec{e}_2 . Вычислим интеграл в формуле (4.2), используя найденные коэффициенты модели контактного напряжения:

$$I_1 = - \iint \frac{12J_r \dot{\omega}_r}{ab^3} y^2 ds = -\frac{12J_r \dot{\omega}_r}{ab^3} \frac{b^3}{12} a = -J_r \dot{\omega}_r. \quad (4.5)$$

Таким образом, для начальных условий (4.1) получаем угловое ускорение тела вокруг вертикальной оси

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mu J_r \dot{\omega}_r}{C}. \quad (4.6)$$

Заметим, что указанный эффект проявляется и в общем случае, когда поступательное движение ползуна сочетается с вращательным. Однако, в отличие от рассмотренных в настоящем разделе условий (4.1), интегралы (3.6) не могут быть вычислены аналитически.

5. Численный анализ

Для получения зависимости угла поворота ползуна от различных значений углового ускорения ротора было проведено численное моделирование, включающее определение

контактного напряжения в каждый момент времени и численное интегрирование уравнений движения (3.8). Один «период» движения ползуна состоит из двух частей:

1) в процессе скольжения корпуса по поверхности (благодаря импульсу, переданному ему внутренним телом) ротор вращается с постоянным ускорением; при этом, как было обосновано выше, происходит поворот корпуса,

2) сразу после остановки корпуса начинается торможение ротора, что не может привести к обратному вращению корпуса, ввиду его неподвижности.

На рисунке 2 показано изменение угла поворота корпуса за один «период».

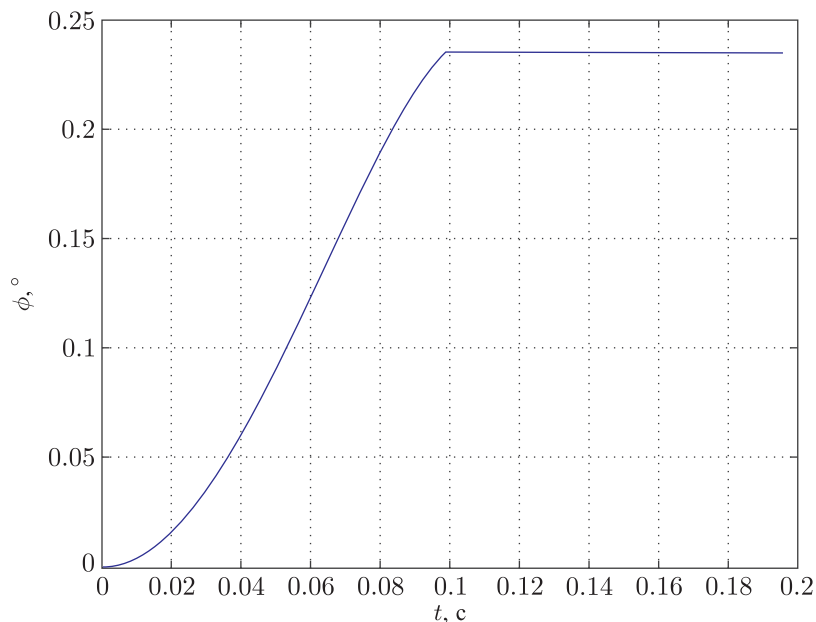


Рис. 2. Изменение угла поворота корпуса за один «период».

На рисунке 3 показаны повороты корпуса для различных значений углового ускорения ротора. Можно сделать вывод, что угол поворота корпуса зависит от выбора углового ускорения ротора линейно.

Численное моделирование показывает, что при выбранных параметрах ($\mu = 0.3$, $b = 2h = a/\sqrt{2}$, $m_r = m/2$) и угловом ускорении ротора на каждом такте $\dot{\omega}_r = 10 \frac{\text{рад}}{c^2}$ за каждый такт ползун будет поворачивать на $\varphi = 0.24^\circ$. Таким образом, разворот на 360° будет совершен за 1500 периодов. При учете, что один период занимает 0.2 с, разворот займет приблизительно 5 минут. Радиус разворота при этом составит $3.58a$.

6. Выводы

Найдены коэффициенты разложения нормального напряжения в области контакта. Составлены уравнения движения ползуна. Показано наличие эффекта поворота тела вокруг вертикальной оси вследствие неравномерности нормального напряжения. При помощи численного интегрирования уравнений получена количественная оценка эффекта.

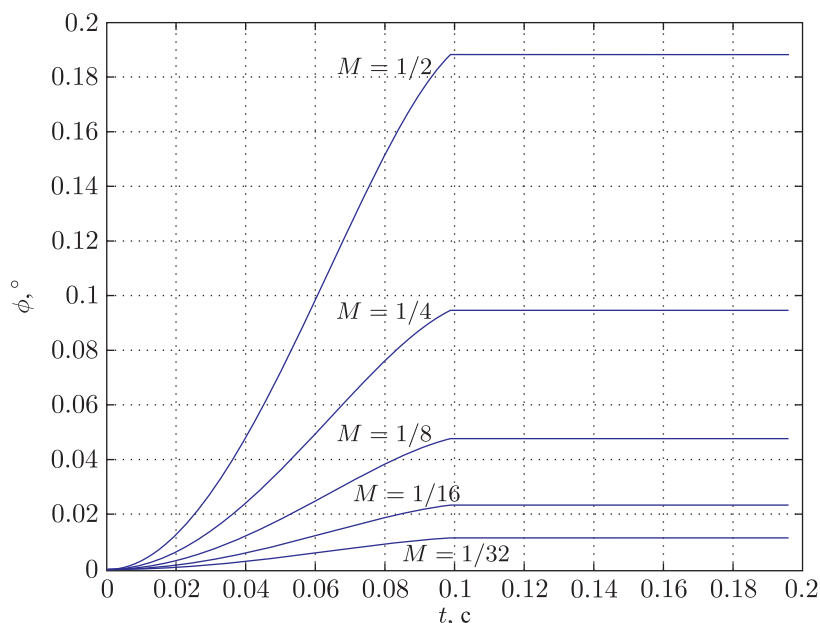


Рис. 3. Угол поворота корпуса при различных значениях момента ротора.

Список литературы

- [1] Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ, 2006, т. 70, № 6, с. 915–941.
- [2] Черноусько Ф. Л. Об оптимизации движения в сопротивляющейся среде тела, содержащего подвижную массу // Проблемы современной механики: К 85-летию со дня рождения академика Г. Г. Чёрного / А. А. Бармин (ред.). М.: Изд-во МГУ, Омега-Л, 2008. С. 609–620.
- [3] Michaud F., de Lafontaine J., Caron S. A spherical robot for planetary surface exploration // Proceeding of the 6th International Symposium on Artificial Intelligence and Robotics & Automation in Space: i-SAIRAS 2001 (Canadian Space Agency, St. Hubert, Quebec, Canada, June 18–22, 2001). 5 pp.
- [4] Bhattacharya S., Agrawal S.K. Design, experiments and motion planning of a spherical rolling robot // Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (San Francisco, CA, April 2000), IEEE, 2000, pp. 1207–1212.
- [5] Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твёрдого тела // ПММ, 2009, т. 73, № 2, с. 189–203.
- [6] Иванов А. П. Основы теории систем с трением. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 304 с.

Dynamics of rigid body, carrying moving masses and rotor, on a rough plane

Alexander P. Ivanov¹, A. V. Sakharov²

^{1,2}Moscow Institute of Physics and Technology

Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

¹apivanov@orc.ru, ²aleksandr.s_89@mail.ru

We consider a rigid body which moves upon a rough plane by means of displacements of internal

masses. To make turns, we change the angular momentum of the rotor. This leads to asymmetry in normal stresses and appearance of vertical momentum of friction forces.

MSC 2010: 70E18

Keywords: dry friction, mobile devices without external drivers

Received July 6, 2012, accepted September 19, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 763–772 (Russian)

