Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4. С. 853–860.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КОММЕНТАРИИ. ДИСКУССИЯ. КРИТИКА

Понятие связи в аналитической механике

В. Ф. Журавлёв

Приводится критический обзор таких понятий, как голономная и неголономная связь, неудерживающие и бинарные связи. Рассмотрен вопрос о корректности этих моделей.

1. Голономные связи

$$f(t, q) = 0, \quad q = (q_1, \ldots, q_n). \tag{1.1}$$

Понятие идеальной связи является основным в аналитической механике. Реакции таких связей могут быть исключены при составлении уравнений движения.

Чаще всего определение связи делается для системы N материальных точек $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$, положение которых задается с помощью декартовых координат: $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда, например, голономной, или конечной связью называется такая дополнительная механическая система, которая ограничивает положение введенных точек, понуждая их координаты подчиняться *уравнениям связей*.

С чисто методической точки зрения необязательно начинать с системы N материальных точек для построения понятия голономной связи. Простейшим объектом в механике наряду с материальной точкой является и абсолютно твердое тело. Его положение в пространстве определяется тремя декартовыми координатами какой-либо его точки и тремя углами конечного вращения вокруг этой точки. Совокупность этих переменных представляет собой набор независимых обобщенных координат $q = (q_1, \ldots, q_6)$. Наиболее распространенным объектом интереса в технике является система некоторого числа связанных друг с другом тел, что чаще всего и приводит к уравнениям связей в виде (1.1). При этом функция f может быть векторной: $f = (f_1, \ldots, f_k)$. Если $k < n$, то уравнения (1.1) заведомо разрешимы относительно некоторого числа координат q_i. Оставшиеся координаты будут независимыми обобщенными координатами рассматриваемой системы с наложенными связями [1].

Получено 7 февраля 2012 года

Журавлёв Виктор Филиппович
zhurav@ipmnet.ru
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1

2. Неудерживающие голономные связи

$$f(t, q) \geqslant 0 \tag{2.1}$$

В монографии [2] показано, как с помощью негладких преобразований координат q можно исключить такие связи и движение системы задать регулярными (без особенностей типа δ — функций) дифференциальными уравнениями. При этом показано, что подобное возможно только в записи исходной системы с помощью функции Рауса при специальном подборе лагранжевых и гамильтоновых переменных в этой функции.

3. Кинематические связи

Чаще всего используется следующее определение. Кинематической связью называется такая дополнительная механическая система, взаимодействие которой с исходной системой выражается уравнениями связей вида:

$$a(t, q)\dot{q} + b(t, q) = 0 \tag{3.1}$$

Здесь q и b векторы размерности k, а функция $a(t, q)$ есть матрица размерности $n \times k$. Если не существует такой дифференцируемой функции $f(t, q)$, что $\dfrac{d}{dt}f(t, q) \equiv a(t, q)\dot{q} + b(t, q)$, то связь (3.1) называется неинтегрируемой, или *неголономной*. Условия интегрируемости уравнения связи (3.1) даются теоремой Фробениуса [3].

Существуют и другие определения неголономной связи. Так в [4] дано следующее определение: *связь, не выражаемая уравнением* (1.1), *называется неголономной*. Такое определение представляется менее удобным, поскольку неголономными приходится считать неудерживающие связи (2.1), сервосвязи и пр. Оно становится более удобным при анализе аксиоматических проблем механики, лучше согласуясь с исчислением предикатов.

Заметим, что уравнение (3.1) является линейным по скоростям. Корректных примеров нелинейных идеальных кинематических связей не известно.

4. Неудерживающая кинематическая связь

Напрашивается по аналогии с (2.1) определение ограничения, накладываемого на систему такой связью в виде следующего неравенства [5, 6]:

$$f(t, q, \dot{q}) \geqslant 0, \tag{4.1}$$

Такое определение является формально допустимым, однако, на самом деле оно неудачно. Примеров таких связей нет ни в технике, ни в научной литературе. Между тем реальные неудерживающие кинематические связи очень распространены. В [2] такие связи определяются следующим образом. Кинематическая связь$f(t, q, \dot{q}) = 0$ называется неудерживающей, или односторонней, если она имеет место только при дополнительном условии, накладываемом помимо фазовых переменных еще и на ускорения: $F(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \geqslant 0$. Связь снимается, если это условие не выполнено.

Примером системы с такой связью является качение весомого шара по горизонтальной плоскости с сухим трением (рис. 1). Проскальзывание в точке контакта будет отсутствовать, если горизонтальная реакция не превосходит силы трения трогания: $\mathbf{V}_0 = 0$ при условии

$fN - |\tau| \geqslant 0$, где $\mathbf{V}_0$ — скорость находящейся в контакте с плоскостью точки шара, f — коэффициент сухого трения, N — нормальная составляющая реакции в точке контакта, τ — горизонтальная составляющая реакции (т. е. вектор реакции лежит внутри конуса трения). Сама реакция зависит не только от времени, координат и скоростей, но также и от ускорений.

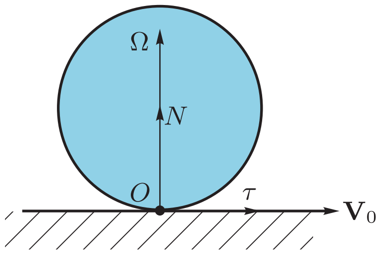

Рис. 1.

Сформулированное определение неудерживающей кинематической связи нуждается в уточнении. В приведенном выше примере с шаром условие отсутствия проскальзывания в точке контакта с плоскостью обеспечивается силами сухого трения. То есть предполагается, что закон сухого трения Кулона может быть применен для точечного контакта и при возможном наличии верчения вокруг нормали в точке контакта, т. е. для условий далеко выходящих за пределы тех условий, в которых закон Кулона был установлен.

Между тем в [7] в результате более точного анализа, с отказом от точечного контакта и заменой его круговым, с последующим применением закона Кулона в дифференциальной форме и интегрированием элемента силы сухого трения, было показано, что при наличии сколь угодно малого верчения обеспечить отсутствие проскальзывания силами сухого трения невозможно. Более того, задача о качении тяжелого шара по горизонтальной плоскости с сухим трением оказалась *некорректной* в смысле Адамара. Например, при сколь угодно малой площадке контакта, радиус которой $\varepsilon \neq 0$, время проскальзывания $T\big|_{\varepsilon\neq 0} \approx 32mu_0R^2/15\pi F_0\varepsilon^2$ отличается сколь угодно сильно от времени проскальзывания в случае точечного контакта $T\big|_{\varepsilon=0} = 2mv_0/7F_0$, (рис. 2). В этих выражениях m — масса шара, R — его радиус, u_0, v_0 — начальная угловая скорость верчения и начальная скорость проскальзывания в точке контакта, F_0 — сила трения трогания в законе Кулона.

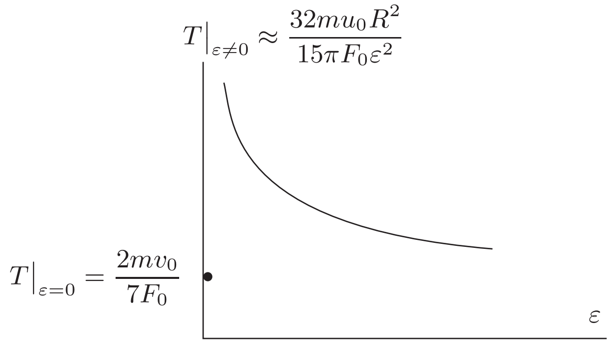

Рис. 2.

В [7] задача о качении шара рассматривалась качественно. Было использовано упрощающее предположение о равномерном распределении нормальных напряжений в пятне контакта.

В [8–10] вопрос о том, в какой форме следует использовать закон сухого трения при контакте движущихся относительно друг друга упругих тел, рассмотрен более детально.

В [8] используя теорию контактных напряжений Герца и закон сухого трения Кулона в дифференциальной форме, получено выражение для главного вектора касательных сил в области контакта в виде двукратного интеграла. Правда, этот интеграл был неосторожно объявлен неберущимся в элементарных функциях. Такое же утверждение можно увидеть и в [6].

В [9] кроме главного вектора вычислен также и главный момент. При этом в отличие от [8] оба двукратных интеграла найдены в элементарных функциях.

В [9] интегральные выражения для силы трения и момента трения были представлены равномерно сходящимися во всей области изменения переменных u и v (модули угловой скорости верчения и линейной скорости скольжения) разложениями Паде. В частности, для силы сухого трения было получено выражение

$$\mathbf{F} = \frac{fN\mathbf{v}}{v + (8\pi/3)u} \tag{4.2}$$

переходящее в обычный закон Кулона при $u = 0$. Переменные u и v имеют одинаковую размерность поскольку $u = \varepsilon\Omega$, где через ε обозначен радиус пятна контакта, а Ω — «физическая» угловая скорость верчения. На это выражение можно смотреть, как на обобщение одномерного закона на двумерный случай, вытекающее из эксперимента, в котором кроме традиционного прямолинейного скольжения имеется и верчение. Недавно такие эксперименты были выполнены в МФТИ [12]. Графический вид зависимости силы трения от скорости скольжения, совпадающий во всех трех случаях: в точном интегральном представлении, в первом приближении разложений Паде (4.2) и в эксперименте представлен на рис. 3.

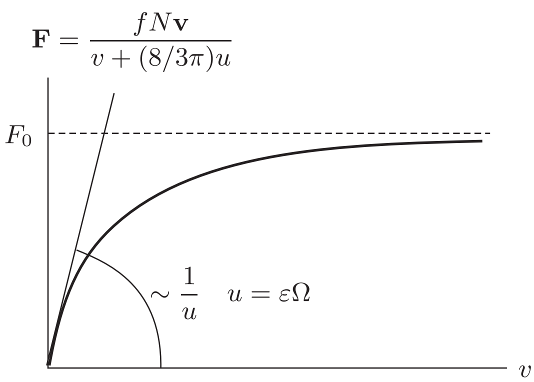

Рис. 3.

Из этого графика и из формулы (4.2) видно, что характерный для одномерного сухого трения порог, определяемый величиной силы трения трогания, в общем случае отсутствует. Какой бы малой ни была угловая скорость верчения u, график начинается в нуле, так что силами сухого трения обеспечить отсутствие проскальзывания (неголономное условие) можно только при дополнительном ограничении $\Omega = 0$ ($u = 0$).

Таким образом, в приведенном выше примере с шаром, иллюстрирующим понятие неудерживающей неголономной связи, условие принадлежности реакции связи конусу трения необходимо сопроводить еще одним условием: $\Omega = 0$. Полное определение неудерживающей неголономной связи должно быть таким: *неголономная связь* $f(t, q, \dot{q}) = 0$ *называ-*

ется неудерживающей, если она сохраняется при условии $F(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \geqslant 0$ *на многообразии* $G(t, q, \dot{q}) = 0$.

Как уже отмечалось выше, пример неудерживающей неголономной связи в виде катящегося по горизонтальной плоскости шара, является некорректным. Для анализа решений некорректных задач можно применять метода Тихонова.

Так и сделано в [11], где было предположено, что круговое пятно контакта, имеет малый радиус ε. Было показано, что при стремлении $\varepsilon \to 0$ ряд характеристик движения стремится к таким же для точечного контакта. К выполненному в этой работе анализу уместно сделать следующее замечание. Как показывает график на рис. 3, закон сухого трения при $\varepsilon \to 0$ стремится к одномерному закону Кулона, поскольку и $u = \varepsilon\Omega \to 0$. Однако, необходимо иметь ввиду, что подобный предел не является *равномерным* по отношению к угловой скорости верчения Ω. Так что, каким бы малым ни взять ε всегда найдется такое Ω, что отличие закона сухого трения от закона Кулона будет конечным. Поскольку это так, то и нет нужды ассоциировать приближение, доставляемое неголономным подходом с малостью площадки контакта. Тем более, что предел $\varepsilon \to 0$ [13] означает, что рассматривается не конкретная задача, а семейство задач (ε — параметр семейства). Гораздо удобнее предел $u \to 0$ связывать с условием $\Omega \to 0$. Такое оправдание неголономной постановки задачи вполне уместно, например, в задачах о мобильных роботах [14].

5. Бинарные связи

Некорретными в смысле Адамара могут быть и попытки реализации голономных связей (1.1). На рис. 4 изображен пример реализации движения материальной точки по плоской кривой. Шарик может двигаться по гладкой направляющей, осуществляющей заданную голономную связь. Если устремить к нулю размеры шарика, при сохранении его массы, размеры зазора между шариком и направляющей, а также и величину коэффициента сухого трения, то в пределе следует ожидать реализацию идеальной голономной связи вида (1.1), наложенной на материальную точку в плоскости. В технике подобные связи встречаются в разнообразных механизмах, в которых подвижные элементы движутся по направляющим.

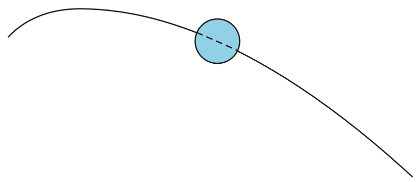

Рис. 4.

При изучении статики и динамики таких систем могут возникнуть трудности, отмеченные в [15] (пример на стр. 57). Математически эти трудности связаны с тем, что указанный выше предельный переход по совокупности трех отмеченных параметров не существует. Физически это сводится к эффекту «заклинивания».

Динамика таких систем не может рассматриваться в предельном случае, поскольку соответствующего предела нет. Изучение же динамики в малой окрестности предельного случая и приводит к представлению о *бинарных связях*. Бинарные связи это две односторонние голономные связи, зависящие от малого параметра Δ, превращающиеся в единственную связь, если $\Delta = 0$:

$$\begin{cases} f_+(t,q,\Delta) \geqslant 0 \\ f_-(t,q,\Delta) \leqslant 0 \end{cases} \underbrace{\rightarrow}_{\Delta\to 0} f(t,q) = 0$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий понятие некорректности по Адамару бинарных связей и правила по которым следует работать с подобными объектами.

Пример. На рис. 5 изображен упругий невесомый стержень, нагруженный на правом конце грузом и вставленный с зазором Δ без трения левым концом в горизонтальную щель. У системы одна степень свободы, ее положение определяется координатой x.

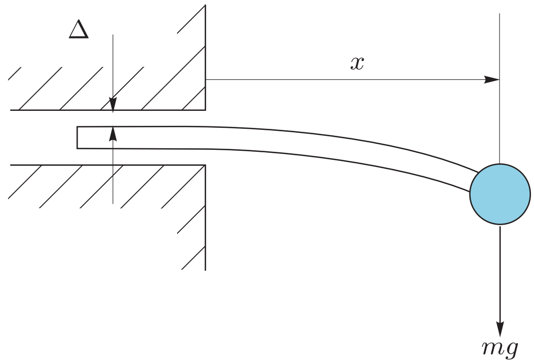

Рис. 5.

Пусть $\Delta = 0$. Требуется узнать, будет ли находится стержень с грузом в равновесии.

Решение. Воспользуемся двумя подходами. Первый подход условно назовем «Ньютон». В этом подходе исходим из уравнений равновесия. Поскольку сил трения в заделке нет, то горизонтальная компонента реакции связи равна нулю: $R_x = 0$, а результирующая вертикальная компонента уравновешивается весом $P = mg$. Стержень с грузом находится в безразличном положении равновесия: $x = \mathrm{const}$.

Второй подход условно назовем «Лагранж». Вычислим потенциальную энергию системы, состоящую из энергии упругого деформирования стержня $\Pi_1 = (mg)^2x^3/6EJ$ и из потенциальной энергии груза в поле сил тяжести: $\Pi_2 = -(mg)^2x^3/3EJ$. Полное выражение для потенциальной энергии системы получается таким $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -(mg)^2x^3/6EJ$, где E — модуль Юнга, а J — момент инерции поперечного сечения стержня. Эта функция является строго монотонно убывающей функцией переменной x, стержень не может находиться в равновесии, на него со стороны заделки действует в положительном направлении выталкивающая сила $R_x = -d\Pi/dx = (mgx)^2/2EJ$. Противоречие.

Чтобы разобраться в противоречии рассмотрим в первом подходе («Ньютон») допредельную ситуацию, когда $\Delta \neq 0$ (рис. 6). Реакция связи в угловой точке перпендикулярна поверхности стержня (трения нет), поэтому она содержит горизонтальную составляющую $R_x(\Delta)$. Устремляя $\Delta \to 0$, находим: $\underbrace{\lim}_{\Delta\to 0} R_x(\Delta) = (mgx)^2/2EJ$, что в точности совпадает с результатом, полученным во втором подходе («Лагранж»).

Рассмотрена задача статики для стержня с грузом. Точно такие же выводы получаются и при динамическом рассмотрении, когда, например, стержень с распределенной массой совершает изгибные колебания. Колеблющийся стержень будет выдавливаться из щели

$(\Delta \neq 0)$

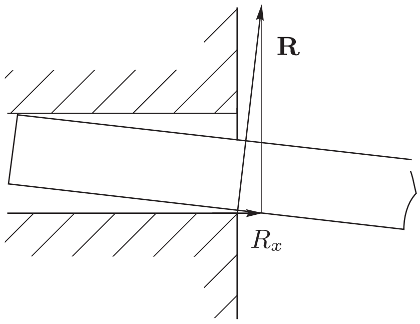

Рис. 6.

с нулевым зазором под действием силы «волнового давления». Вычисление этой силы будет правильным только после перехода к пределу $\Delta \to 0$ в силовом подходе, или, исходя из принципа Гамильтона.

Вопрос о существовании «волнового давления» был в истории предметом дискуссии. В ней участвовали Максвелл, Релей, Бриллюэн, Зоммерфельд и др.

Список литературы

[1] Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.

[2] Журавлёв В. Ф., Фуфаев Н. А. Механика систем с односторонними связями. М.: Наука, 1993. 240 с.

[3] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

[4] Голдстейт Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.

[5] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

[6] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 335 с.

[7] Фуфаев Н. А. Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения // ПММ, 1966, т. 30, № 1, с. 67–72.

[8] Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии: Сб. научн. ст. / Г. Циглер (ред.). М.: Мир, 1967. С. 60–77.

[9] Журавлёв В. Ф. Момент трения вращающейся цапфы при движении по подвижному основанию // Вопросы оборонной техники, Сер. 9, 1969, вып. 2.

[10] Журавлёв В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, № 5, с. 762–767.

[11] Иванов А. П. Сравнение моделей трения в динамике шара на плоскости // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 907–912.

[12] Киреенков А. А., Семендяев С. В., Филатов В. В. Экспериментальное исследование связанных моделей трения скольжения и верчения // МТТ, 2010, № 6, с. 192–202.

[13] Козлов В. В. Замечание о сухом трении и неголономных связях // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 903–906.

[14] Белотелов И. Н., Мартыненко Ю. Г. Управление пространственным движением перевернутого маятника, установленного на колесной паре // МТТ, 2006, № 6, с. 10–28.

[15] Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.

Notion of constraint in analytical mechanics

Viktor F. Zhuravlev

A. Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101, block 1, Moscow, 119526, Russia
zhurav@ipmnet.ru

A critical review of such notions as holonomic and non-holonomic, unilateral and binary constraints is given. The correctness of these models is considered.

Received February 7, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 853–860 (Russian)