Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4 (Мобильные роботы). С. 705–712.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.46
MSC 2010: 70F40

# Модель трения в случае плоского эллиптического контакта тела с опорной плоскостью

**М. А. Муницына**

Модель Контенсу – Журавлева [1, 2] распространяется на случай плоского эллиптического контакта выпуклого тела с горизонтальной плоскостью. Строятся аппроксимации Паде выражений, определяющих силу и момент трения. Полученная модель применяется к численному исследованию динамики однородного эллипсоида вращения на горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: сухое трение, закон Кулона

## 1. Модель трения

Рассмотрим задачу о взаимодействии гладкого выпуклого тела с горизонтальной плоскостью. Заменим точечный контакт тела с плоскостью пятном контакта, которое, согласно теории Герца, представляет собой эллипс с полуосями, определяемыми значениями главных кривизн тела в точке контакта и упругими свойствами материала тела [3].

Введем правый ортонормированный репер $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, орт $\boldsymbol{e}_1$ которого направлен вдоль скорости скольжения $\boldsymbol{U}$ точки первоначального контакта тела и плоскости, совпадающей с центром пятна контакта, а орт $\boldsymbol{e}_3$ — вдоль восходящей вертикали. Рассмотрим произвольную точку пятна контакта $P$ с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$ относительно центра пятна контакта. Компоненты скорости скольжения $\boldsymbol{U}_p = U_1\boldsymbol{e}_1 + U_2\boldsymbol{e}_2$ такой точки можно представить в виде

$$U_1 = U - \rho\Omega\sin\varphi, \quad U_2 = \rho\Omega\cos\varphi,$$

Получено 17 мая 2012 года
После доработки 24 июля 2012 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (10-01-00292, 11-01-00354).

Муницына Мария Александровна
munitsyna@gmail.com
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

где $U = |\boldsymbol{U}|$, $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$, $\varphi$ — угол между вектором $\boldsymbol{\rho}$ и ортом $\boldsymbol{e}_1$, $\Omega$ — проекция угловой скорости тела на восходящую вертикаль (скорость верчения).

Будем считать, что сила трения $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_p$, действующая на элементарную площадку $\mathrm{d}\sigma$ пятна контакта и приложенная в точке $P$, удовлетворяет закону Кулона. Тогда

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_p = -kp\frac{\boldsymbol{U}_p}{|\boldsymbol{U}_p|}\,\mathrm{d}\sigma,$$

где $k$ — коэффициент трения, $p$ — давление в точке $P$. Результирующая сила трения, приложенная в центре пятна контакта, и момент трения относительно последнего определяются как

$$\boldsymbol{F} = \int\limits_{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_p = -F_1\boldsymbol{e}_1 - F_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{M} = \int\limits_{\sigma} [\boldsymbol{\rho}, \mathrm{d}\boldsymbol{F}_p] = -M\boldsymbol{e}_3. \tag{1.1}$$

Согласно теории Герца [3], закон распределения давления по пятну контакта имеет вид

$$p = \frac{3}{2}\frac{N}{\pi\alpha\beta}\sqrt{1 - \frac{\rho^2\cos^2(\psi+\varphi)}{\alpha^2} - \frac{\rho^2\sin^2(\psi+\varphi)}{\beta^2}}, \tag{1.2}$$

где $N$ — величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, $\alpha$ и $\beta$ — бóльшая и меньшая полуоси пятна контакта соответственно, $\psi$ — угол отклонения орта $\boldsymbol{e}_1$ от большей полуоси пятна контакта.

Компоненты силы и момента трения, соответствующие (1.1), имеют вид

$$F_1 = k\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r(\varphi)} p\,\frac{(U - \rho\Omega\sin\varphi)\rho}{\sqrt{U^2 - 2U\rho\Omega\sin\varphi + \rho^2\Omega^2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi, \tag{1.3}$$

$$F_2 = k\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r(\varphi)} p\,\frac{\rho^2\Omega\cos\varphi}{\sqrt{U^2 - 2U\rho\Omega\sin\varphi + \rho^2\Omega^2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi, \tag{1.4}$$

$$M = k\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r(\varphi)} p\,\frac{(\rho\Omega - U\sin\varphi)\rho^2}{\sqrt{U^2 - 2U\rho\Omega\sin\varphi + \rho^2\Omega^2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi, \tag{1.5}$$

где $r(\varphi) = \alpha\beta/\sqrt{\alpha^2\sin^2(\psi+\varphi) + \beta^2\cos^2(\psi+\varphi)}$. Полученные выражения имеют вид эллиптических интегралов. С учетом закона (1.2), они определяют зависимость силы и момента трения от величин скоростей скольжения и верчения, а также от параметра $\psi$, определяющего ориентацию пятна контакта относительно скорости проскальзывания.

## 2. Аппроксимации Паде

Функции (1.3)–(1.5) являются однородными фукнциями переменных $U$ и $\Omega$. Они удовлетворяют следующим свойствам:

$$F_1\Big|_{U=0} = F_2\Big|_{U=0} = F_2\Big|_{\Omega=0} = 0,$$

$$F_1\Big|_{\Omega=0} = F_0, \quad M\Big|_{\Omega=0} = 0, \quad M\Big|_{U=0} = \frac{3}{32}\alpha F_0\delta_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}U}\Big|_{U=0} = -\Omega\,\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}U^2}\Big|_{U=0} = \frac{3}{8}\frac{F_0}{\alpha|\Omega|}\delta_1, \quad \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}U}\Big|_{U=0} = \frac{3}{16}\frac{F_0}{\alpha|\Omega|}\delta_2,$$

$$-\left.\frac{\mathrm{d}^2F_1}{\mathrm{d}\Omega^2}\right|_{\Omega=0}=\frac{1}{U}\left.\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\Omega=0}=\frac{1}{5}\frac{F_0\alpha^2}{U^2}\delta_3,\ \left.\frac{\mathrm{d}^2F_2}{\mathrm{d}\Omega^2}\right|_{\Omega=0}=\frac{1}{5}\frac{F_0\alpha^2}{U^2}\delta_4. \tag{2.1}$$

Здесь $F_0=kN$, а $\delta_i$ $(i=\overline{1,5})$ — безразмерные выражения вида

$$\delta_0=\mu^2I_1,\quad \delta_1=\left(I_2\cos 2\psi+I_3\sin^2\psi\right),\quad \delta_2=\sin 2\psi\left(-2I_2+I_3\right). \tag{2.2}$$
$$\delta_3=(1-\mu^2)\cos^2\psi+\mu^2,\qquad \delta_4=\sin 2\psi(1-\mu^2),$$

содержащие параметр $\mu=\beta/\alpha$, который определяет степень сжатости пятна контакта к большей полуоси ($0<\mu<1$, при $\mu=1$ пятно — круг), и эллиптические интегралы $I_1$, $I_2$ и $I_3$, зависящие только от эксцентриситета пятна контакта $x=\sqrt{1-\mu^2}$ вида

$$I_1=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2\cos^2(\varphi)}\right)^3}\mathrm{d}\varphi,\quad I_2=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi,\quad I_3=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi. \tag{2.3}$$

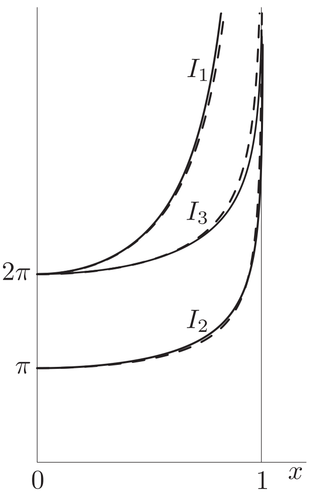


Рис. 1.

На рисунке 1 представлены зависимости от $x$ выражений (2.3) (сплошные кривые), а также и их аппроксимаций (пунктирные кривые) вида

$$I_1=\frac{2\pi}{(1-x^2)^{3/4}},\quad I_2=\frac{\pi}{(1-x^2)^{3/8}},\quad I_3=\frac{2\pi}{(1-x^2)^{1/4}}. \tag{2.4}$$

Учитывая значения (2.1) функций (1.3)–(1.5) при чистом верчении ($U=0$) и чистом скольжении ($\Omega=0$), можно построить их аппроксимации Паде [4] первого порядка,

$$F_1=F_0\frac{U}{U+a_0\alpha|\Omega|},\quad F_2=0,\quad M=M_0\frac{\alpha\Omega}{b_0U+\alpha|\Omega|},$$

или второго порядка

$$F_1=F_0\frac{U^2+a_1U\alpha|\Omega|}{U^2+a_1U\alpha|\Omega|+a_2\alpha^2\Omega^2},\quad M=M_0\frac{b_1U\alpha\Omega+\alpha^2\Omega|\Omega|}{b_2U^2+b_1U\alpha|\Omega|+\alpha^2\Omega^2}, \tag{2.5}$$
$$F_2=-F_0\frac{U\alpha\Omega}{U^2+a_3U\alpha|\Omega|+a_4\alpha^2\Omega^2}.$$

Максимальное значение момента трения $M_0$ и коэффициенты аппроксимаций второго порядка определяются уравнениями (2.1), аппроксимации первого порядка строятся с сохранением значений только первых производных соответствующих функций. Таким образом, учитывая аппроксимации (2.4), получим

$$M_0 = \frac{3\pi}{16}\mu^{1/2}\alpha F_0, \quad a_0 = \frac{8}{3\pi}\frac{\mu^{3/4}}{\delta_5}, \quad b_0 = \frac{15\pi}{16}\frac{\mu^{1/2}}{\delta_3}, \tag{2.6}$$

$$a_1 = \frac{3\pi\delta_3\delta_5}{80\mu^{3/4}}, \quad a_2 = \frac{\delta_3}{10}, \quad a_3 = -\frac{\delta_4}{10}, \quad a_4 = -\frac{8}{3\mu^{3/4}\pi\delta_6}, \quad b_1 = -\frac{16\delta_3\delta_5}{15\mu^{7/4}\pi}, \quad b_2 = \frac{\delta_5}{\mu^{5/4}}, \tag{2.7}$$

$$\delta_5 = (1-\mu^{1/4})\cos 2\psi + \mu^{1/4}, \quad \delta_6 = (1-\mu^{1/4})\sin 2\psi.$$

Полученная модель трения не применима при одновременно малых значениях скоростей скольжения и верчения, и ее следует дополнить соответствующими зонами застоя. На рисунке 2 представлены абсолютные значения точных выражений компонент сил и момента трения (1.2),(1.3) (жирные кривые), а также их аппроксимации первого порядка (тонкие пунктирные кривые) и второго порядка (тонкие сплошные кривые) при $\mu = 0.6$, $\psi = \pi/6$ в зависимости от отношения скорости скольжения к модулю скорости верчения. На рисунке 3 представлены соответствующие области застоя.

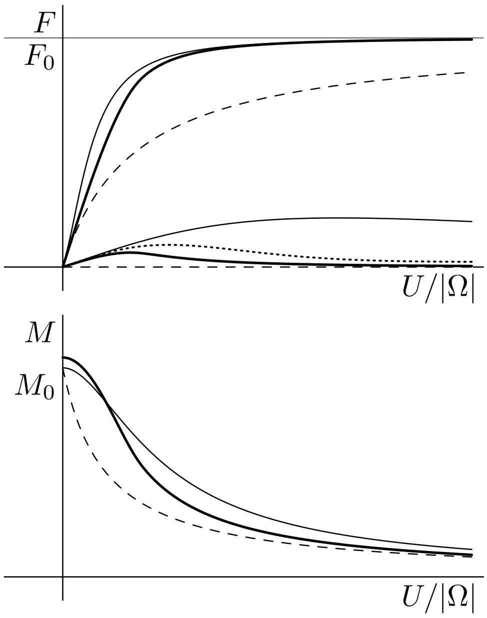


Рис. 2.

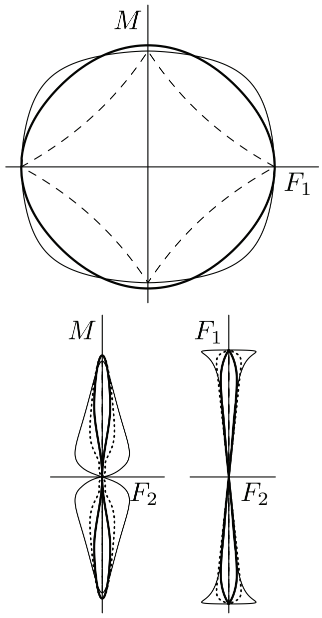


Рис. 3.

Заметим, что по характеру точности аппроксимацию Паде второго порядка компоненты силы трения $F_2$ следует отнести к аппроксимациям первого порядка силы $F_1$ и момента трения. Аппроксимации компоненты $F_2$ более высокого порядка, сохраняющие свойства (2.1), можно принять в виде

$$F_2 = -F_0\frac{U(\alpha\Omega)^{2n-1}\alpha_4^{n-1} + U^{2n-1}\alpha\Omega/n}{(U^2 + a_3U\alpha|\Omega| + a_4\alpha^2\Omega^2)^n}. \tag{2.8}$$

Соответствующие кривые при $n = 4$ изображены на рисунках 2 и 3 точками.

Положив в формулах (2.6) $\mu = 1$, $\psi = 0$ ($\delta_3 = \delta_5 = 1$, $\delta_4 = \delta_6 = 0$), получим коэффициенты аппроксимаций Паде в случае кругового пятна контакта [2, 5]. В общем случае при $\mu \neq 0$ сила трения имеет составляющую, перпендикулярную скорости скольжения тела [6, 7], что является отличием от модели плоского кругового контакта тела с опорной плоскостью [2, 4, 5]. Этим же свойством обладают модели кругового сферического контакта тела с опорной плоскостью [8] и модели, учитывающие смещение центра давлений пятна контакта вдоль скорости скольжения [9].

Поскольку теория Герца определяет зависимость параметров пятна контакта от упругих свойств соприкасающихся тел, полученная модель трения применима к исследованию динамики любых выпуклых гладких тел. При этом компоненты момента и силы трения предложенной модели зависят не только от скорости скольжения и верчения тела, но и от геометрических параметров пятна контакта и его ориентации, которые в свою очередь зависят от ориентации тела в пространстве.

## 3. Эллипсоид вращения на горизонтальной плоскости

Применим предложенную модель трения к задаче о движении однородного эллипсоида вращения, вытянутого вдоль оси динамической симметрии, по горизонтальной упругой плоскости.

Введем подвижную систему координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$, с началом в центре масс эллипсоида и осями, направленными по его главным центральным осям инерции. Пусть $a$ и $c$ — экваториальный и, соответственно, осевой радиусы эллипсоида. Тогда уравнение его поверхности имеет вид $f(\boldsymbol{r}) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)/a^2 + \xi_3^2/c^2 = 0$. Обозначим вектор восходящей вертикали $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда

$$\boldsymbol{\gamma} = -\operatorname{grad} f(\boldsymbol{r})/||\operatorname{grad} f(\boldsymbol{r})||, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки касания эллипсоида с опорной плоскостью.

В подвижной системе координат теоремы об изменении количества движения и момента количества движения эллипсоида, условие постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ и уравнение движения нижней точки эллипсоида вдоль вертикали имеют вид

$$m\dot{\boldsymbol{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\boldsymbol{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + N\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{F}, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = [\boldsymbol{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{F}] + \boldsymbol{M}, \tag{3.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \tag{3.4}$$

$$\dot{\varepsilon} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}). \tag{3.5}$$

Здесь $m$ — масса эллипсоида, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — векторы скорости центра масс и, соответственно, угловой скорости тела, $g$ — ускорение свободного падения, $N$ — величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, $\mathbb{J} = \operatorname{diag}(\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_1, \mathrm{J}_3)$ — центральный тензор инерции эллипсоида, $\varepsilon$ — высота нижней точки эллипсоида над плоскостью, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{M}$ — сила и момент трения, действующие на эллипсоид со стороны опорной плоскости.

Будем считать опорную плоскость слабо деформируемой, и для значения нормальной составляющей ее реакции примем модель Герца

$$N = \begin{cases} \lambda|\varepsilon|^{3/2}, & \varepsilon < 0, \\ 0, & \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $\lambda$ — постоянная, определяемая свойствами материалов эллипсоида и плоскости. Таким образом, система (3.2)–(3.5) с учетом соотношения (3.6) является замкнутой системой дифференциальных уравнений относительно $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\varepsilon$. Для численного интегрирования полученных уравнений определим зависимость силы и момента трения от указанных переменных.

В рамках предложенной модели трения, с учетом возможности отрыва эллипсоида от опорной плоскости, справедливы равенства

$$\boldsymbol{F} = \begin{cases} -F_1\boldsymbol{e}_1 - F_2\boldsymbol{e}_2, & \varepsilon < 0, \\ 0, & \varepsilon > 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{cases} -M\boldsymbol{\gamma}, & \varepsilon < 0, \\ 0, & \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $\boldsymbol{e}_2 = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{u}]/|\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{e}_1 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{\gamma}]$, а величины $F_1$, $F_2$ и $M$ определяются равенствами (2.5), (2.7), (2.8), в которых следует положить $U = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1)$ — скорость проскальзывания, $\Omega = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ — скорость верчения.

Поскольку зависимость полуосей пятна контакта от значений главных кривизн эллипсоида в точке контакта определяется в теории Герца трансцендентным уравнением, введем гипотезу о совпадении параметров пятна контакта с параметрами сечения эллипсоида горизонтальной плоскостью, проходящей через точку $\boldsymbol{r} + \varepsilon\boldsymbol{\gamma}$ ($\varepsilon < 0$). Тогда, считая, что размеры пятна контакта малы по сравнению с размерами эллипсоида и $\sqrt{|\varepsilon|/S} \ll 1$, получим

$$\alpha = a^2\nu\sqrt{\frac{2|\varepsilon|}{S^3}}, \quad \mu = \sqrt[4]{\frac{a\nu}{S}}, \quad \sin\psi = \frac{u_1\gamma_2 - u_2\gamma_1}{|\boldsymbol{u}|\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \quad \cos\psi = \frac{-u_1\gamma_1\gamma_3 - u_2\gamma_2\gamma_3 + u_3(1-\gamma_3^2)}{|\boldsymbol{u}|\sqrt{1-\gamma_3^2}}. \tag{3.8}$$

Здесь $\nu = c/a > 1$ — параметр, определяющий степень вытянутости эллипсоида, $S = a\sqrt{\sin^2\theta + \nu^2\cos^2\theta}$ — высота центра масс эллипсоида над опорной плоскостью.

Численные эксперименты проводились для вытянутого вдоль оси симметрии эллипсоида с параметрами $m = 2$ кг, $a = 0.05$ м, $c = 0.1$ м ($\nu = 2$). Коэффициент трения и параметр модели Герца были приняты следующими: $k = 0.1$, $\lambda = 10^7$ кг/(с$^2$·м$^{1/2}$). На рисунке 4 представлены зависимости косинуса $\gamma_3$ угла нутации эллипсоида от квадрата его угловой скорости при следующих начальных условиях:

$$(a)\ \omega_{10} = 65\ c^{-1}, \quad (b)\ \omega_{10} = 77\ c^{-1}, \quad (c)\ \omega_{10} = 90\ c^{-1}, \quad (d)\ \omega_{10} = 115\ c^{-1}.$$

Во всех случаях $\varepsilon_0 = -0.3 \cdot 10^{-4}$ м, $\omega_{30} = 10\ c^{-1}$, $\omega_{20} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\gamma_{30} = 0.05$, значение $\gamma_{10}$ определялось геометрическим интегралом, начальная скорость проскальзывания — равенством $\boldsymbol{v} = 0$.

Численные эксперименты показывают, что если эллипсоид, ось симметрии которого почти горизонтальна, закрутить с достаточно большой угловой скоростью вокруг почти вертикальной оси (начальные условия $(a)$), то угловая скорость эллипсоида сначала увеличивается, а ось его симметрии поднимается до тех пор, пока не начинаются квазипрецессионные движения тела, на которых его центр масс неподвижен, а ось симметрии медленно опускается к горизонтали; затем эллипсоид замедленно вращается вокруг вертикально расположенного экваториального диаметра до полной остановки.

При увеличении начальной угловой скорости (начальные условия $(b)$) ось симметрии эллипсоида поднимается до вертикали, и некоторое время эллипсоид замедленно вращается вокруг нее; затем происходит резкий переход к прецессионному движению, и далее движение аналогично предыдущему случаю.

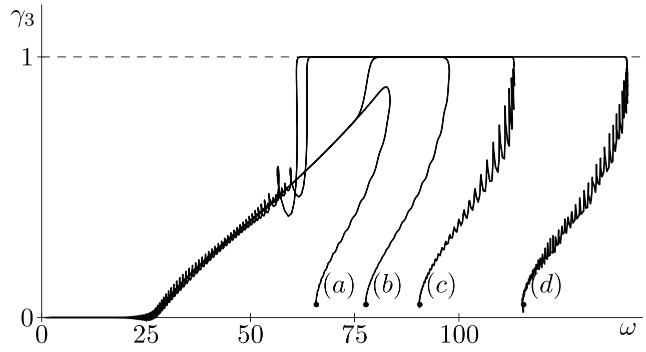


Рис. 4.

При начальной угловой скорости (начальные условия $(c)$) поведение эллипсоида аналогично предыдущему случаю с тем только отличием, что увеличивается длительность вертикальных вращений и уменьшается угловая скорость перехода на прецессию. При дальнейшем увеличении начальной угловой скорости эллипсоида (например, начальные условия $(d)$) характер его движения и угловая скорость перехода на прецессию не меняются. Однако на первом интервале движения наблюдается серия ударов об опорную плоскость.

На рисунке 5 представлены зависимости от времени косинуса угла нутации эллипсоида, модулей силы и момента трения, большей полуоси пятна контакта, отношения меньшей полуоси пятна контакта к большей и отношение силы реакции опорной плоскости к весу эллипсоида при движении с начальными условиями $(c)$. В ходе эксперимента компонента силы трения, перпендикулярная скорости проскальзывания, принимала отличные от нуля значения только во время переходных процессов, а ее максимальное значение имело порядок $10^{-5}$ по сравнению с максимальным значением модуля силы трения.

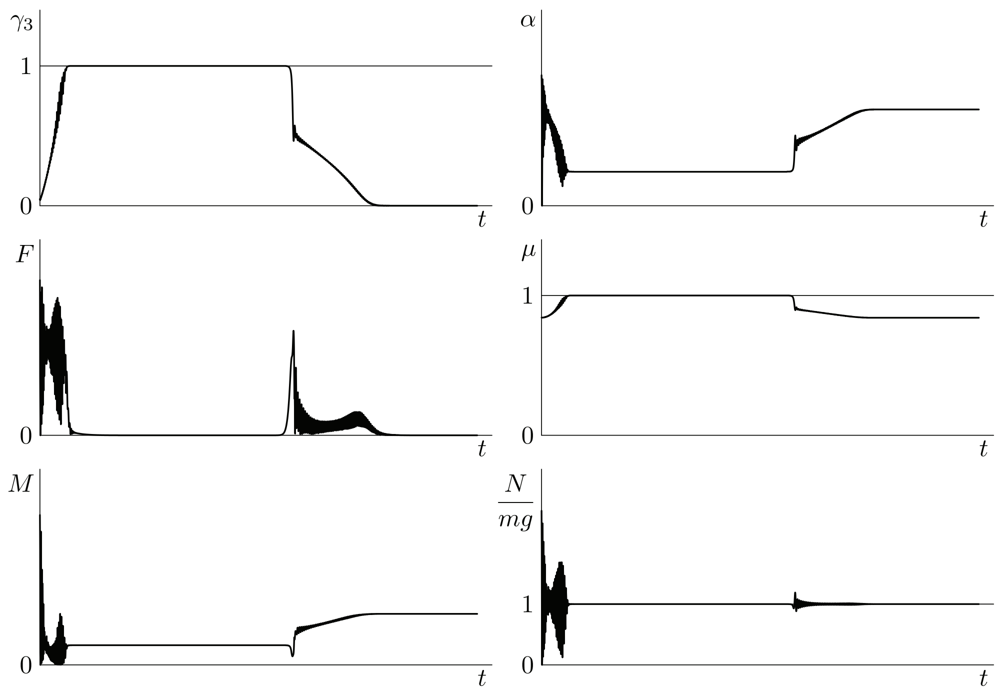


Рис. 5.

Заметим, что численная реализация модели трения для эллиптического контакта соприкасающихся тел проведена также в работе [7]. В отличие от [7], построенные в данной работе аппроксимации силы и момента трения, а также гипотеза о совпадении формы пятна контакта с сечением движущегося тела позволяют избавиться от вычисления эллиптических интегралов при численном моделировании, что упрощает алгоритм интегрирования и увеличивает скорость вычислений. Кроме того, в данном эксперименте при движении тела меняются как размеры, так и форма пятна контакта.

## Список литературы


[1] Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии: Сб. научн. ст. / Г. Циглер (ред.). М.: Мир, 1967. С. 60–77.

[2] Журавлёв В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, № 5, с. 762–767.

[3] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1980. 513 с.

[4] Журавлёв В. Ф., Кириенков А. А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновском трении // МТТ, 2005, № 2, с. 3–14.

[5] Журавлёв В. Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // МТТ, 2003, № 4, с. 81–88.

[6] Kireenkov A. A. About the motion of the symmetric rigid solid alone the plane // Proc. of the 8th Conf. on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 12–15, 2005, Łódź, Poland): Vol. 1 / J. Awrejcewicz (Ed.). Łódź: Left Grupa, 2005. P. 95–102.

[7] Косенко И. И., Александров Е. Б. Реализация модели Контенсу–Эрисмана касательных сил в контактной задаче Герца // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 499–517.

[8] Карапетян А. В. Двухпараметрическая модель трения и ее свойства // ПММ, 2009, т. 73, № 5, с. 515–519.

[9] Кириенков А. А. Трехмерные модели трения // Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н. Н. Лобачевского, 2011, № 4(2), с. 174–176.


### The friction model in the case of a planar elliptic contact of a body with the supporting surface


Mariya A. Munitsyna

M. V. Lomonosov Moscow State University
Leninskie gory 1, Moscow, 119991, Russia
munitsyna@gmail.com



The Contensou – Zhuravlev model [1, 2] is extended to include the case of planar elliptic contact of a convex body with a horizontal plane. The Padé approximations of expressions for determining the friction force and friction torque are constructed. The resulting model is applied to the numerical investigation of the dynamics of a homogeneous ellipsoid of revolution on a horizontal plane.



MSC 2010: 70F40
Keywords: dry friction, Coulomb law

Received May 17, 2012, accepted July 24, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 705–712 (Russian)