Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4 (Мобильные роботы). С. 837–852.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.36
MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 70F25, 70H45

Задача оптимального управления качением шара с роторами

С. В. Болотин

В работе исследуется оптимальное управление с помощью трех гиростатов качением без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара. Уравнения оптимальных траекторий сводятся к уравнениям вакономной механики. С помощью принципа максимума Понтрягина получены гамильтоновы уравнения экстремалей для различных функционалов качества. В случае шаровой симметрии эти уравнения можно проинтегрировать в эллиптических функциях.

Ключевые слова: неголономная связь, вакономная механика, оптимальное управление, принцип максимума, гамильтониан

1. Неголономные уравнения движения управляемого шара с роторами по плоскости

В работах В. В. Козлова [7–10] предложена новая модель механических систем с неинтегрируемыми связями и рассмотрены возможные способы реализации этих связей. В отличие от классической неголономной механики для этой модели (называемой обычно вакономной) справедлив вариационный принцип Гамильтона, а траектории системы являются экстремалями вариационной задачи. Различия между движениями неголономных и вакономных систем обсуждаются в [18]. Уравнения вакономной механики можно использовать для описания движения тел в идеальной жидкости при некоторых предельных соотношениях между

Получено 4 сентября 2012 года
После доработки 9 ноября 2012 года

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (ФГБОУ ВПО «УдГУ», 11.G34.31.0039), а также Программы РАН «Математическая теория управления».

Болотин Сергей Владимирович
bolotin@mi.ras.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

присоединенными массами и моментами, приводящими к появлению неинтегрируемых связей. В настоящей работе уравнения вакономной механики применяются для исследования оптимальных траекторий одной неголономной управляемой системы. Речь идет о задаче управления качением динамически несимметричного уравновешенного шара при помощи роторов, которая недавно была рассмотрена А. В. Борисовым, А. А. Килиным и И. С. Мамаевым [4]. В настоящей работе продолжаются эти исследования. Целью работы является вывод уравнений экстремалей для различных функционалов качества, обычно используемых в механике. В случае шаровой симметрии тензора инерции системы шар + роторы эти уравнения можно проинтегрировать в эллиптических функциях. Синтез оптимального управления является гораздо более трудной задачей, которая в данной работе не рассматривается.

Следуя [4], рассмотрим систему, состоящую из шара, катящегося по плоскости без проскальзывания, и установленных в нем трех роторов. Будем полагать, что

- центр масс системы шар + роторы находится в геометрическом центре шара,
- все роторы одинаковы, осесимметричны и оси вращения совпадают с их осями симметрии. Тогда их вращение не меняет распределение масс системы.

Отметим, что несимметричный уравновешенный шар, каящийся по плоскости, обычно называют шаром Чаплыгина [4, 15]. Подробное описание постановки задачи и обзор литературы содержатся в [4], так что мы отсылаем читателя к данной работе. Напомним только основные обозначения.

Пусть O — центр шара. Выберем подвижную систему координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, жестко связанную с шаром, и неподвижную систему координат $O'\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$, где O' принадлежит опорной плоскости, а вектор $\mathbf{e}_z$ ей перпендикулярен. Обозначим через $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_z + y\mathbf{e}_y$ координаты точки контакта шара и плоскости. Обозначим через $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ орты неподвижных осей $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, спроецированные на подвижные оси $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Их компоненты имеют вид

$$\alpha_i = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_i \rangle, \quad \beta_i = \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_i \rangle, \quad \gamma_i = \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}_i \rangle.$$

Ортогональная матрица $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in SO(3)$ задает ориентацию шара, а вектор $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ — положение центра шара. Пространство положений шара на плоскости имеет вид $\mathcal{M} = SO(3) \times \mathbb{R}^2$.

Обозначим через $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ скорость центра шара и его угловую скорость; здесь и далее (если не оговорено обратное) все векторы проецируются на подвижные оси $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. В точке $q = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}) \in \mathcal{M} = SO(3) \times \mathbb{R}^2$ касательный вектор

$$\dot{q} = (\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{\mathbf{r}}) \in T_q\mathcal{M}$$

задается вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ и вектором скорости $\mathbf{v} = \dot{x}\boldsymbol{\alpha} + \dot{y}\boldsymbol{\beta}$:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Будем считать, что шар катится без проскальзывания. Тогда неголономная связь задается формулой Эйлера

$$\mathbf{v} = R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \qquad \dot{x} = R\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta} \rangle, \quad \dot{y} = -R\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha} \rangle.$$

Обозначим через m_0 и J_0 массу и тензор инерции шара, через m_k и J_k — массы и тензоры инерции роторов, через $\mathbf{n}_k$ — единичные векторы, задающие направление осей вращения роторов. Тогда $J_k\mathbf{n}_k = I\mathbf{n}_k$, где I — осевые моменты инерции роторов. В подвижной системе координат, связанной с шаром, векторы $\mathbf{n}_k$ являются постоянными. Обозначим через ν_k угловые скорости роторов относительно шара. Кинетическая энергия $\widehat{T}$ системы складывается из кинетической энергии оболочки

$$T_0 = \frac{1}{2}m_0|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\omega}, J_0\boldsymbol{\omega}\rangle$$

и кинетической энергии роторов

$$T_k = \frac{1}{2}m_k|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\omega} + \nu_k\mathbf{n}_k, J_k(\boldsymbol{\omega} + \nu_k\mathbf{n}_k)\rangle, \quad k = 1, 2, 3.$$

После приведения подобных получим

$$\begin{aligned}\widehat{T} &= T_0 + \sum_{k=1}^{3} T_k = \\ &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle\boldsymbol{\omega}, \mathbf{K}\rangle + \frac{1}{2I}|\mathbf{K}|^2 = \\ &= T + \langle\boldsymbol{\omega}, \mathbf{K}\rangle + \frac{1}{2I}|\mathbf{K}|^2.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь

$$m = m_0 + \sum_{k=1}^{3} m_k, \quad J = J_0 + \sum_{k=1}^{3} J_k$$

— масса и тензор инерции системы шар + роторы,

$$\mathbf{K} = I\sum_{k=1}^{3}\nu_k\mathbf{n}_k$$

— вектор гиростатического момента роторов, а

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}\rangle \tag{1.2}$$

— кинетическая энергия системы шар + роторы в случае вмороженных роторов.

С учетом связи $\mathbf{v} = R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}$ имеем

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\langle J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle + \frac{D}{2}(\langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}\rangle^2 + \langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}\rangle^2) = \\ &= \frac{1}{2}\langle(J + D)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle - \frac{D}{2}\langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}\rangle^2,\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $D = mR^2$. Для простоты будем писать $D = D \cdot E$, где E — единичная матрица. Обозначим

$$A(\boldsymbol{\gamma}) = J + D - D\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}, \qquad A(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega} = (J + D)\boldsymbol{\omega} - D\langle\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\gamma}.$$

Тогда кинетическая энергия в случае вмороженных роторов примет вид

$$T = T(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\langle A(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle. \tag{1.4}$$

Кинетический момент $\widehat{\mathbf{M}}$ системы шар + роторы относительно точки контакта C имеет вид [4]

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M} + \mathbf{K}, \qquad \mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = A(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{M}$ — кинетический момент шара с вмороженными роторами относительно точки контакта.

По теореме об изменении кинетического момента относительно подвижного полюса [2], кинетический момент $\widehat{\mathbf{M}}$ постоянен в неподвижном пространстве. Значит, как впервые показано А. П. Маркеевым [11],

$$\widehat{\mathbf{M}} = M_x\boldsymbol{\alpha} + M_y\boldsymbol{\beta} + M_z\boldsymbol{\gamma}, \quad M_x, M_y, M_z = \mathrm{const}.$$

При заданных константах M_x, M_y, M_z получим

$$\boldsymbol{\omega} = A^{-1}(\boldsymbol{\gamma})(M_x\boldsymbol{\alpha} + M_y\boldsymbol{\beta} + M_z\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{K}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{K}). \tag{1.5}$$

Если в начальный момент шар неподвижен, то $\widehat{\mathbf{M}} \equiv 0$, так что

$$\boldsymbol{\omega} = -A^{-1}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{K}.$$

Тогда кинетическая энергия системы шар + роторы имеет вид

$$\widehat{T} = \frac{1}{2}\langle \widehat{A}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle, \quad \widehat{A}(\boldsymbol{\gamma}) = I^{-1}A^2(\boldsymbol{\gamma}) - A(\boldsymbol{\gamma}). \tag{1.6}$$

2. Задача управления

Управление качением шара осуществляется путем изменения угловых скоростей вращения роторов или, эквивалентно, гиростатического момента $\mathbf{K}$.

Следуя [4], сначала для простоты рассмотрим случай $\widehat{\mathbf{M}} = 0$. Будем считать, что в каждый момент времени управляющий гиростатический момент роторов $\mathbf{K}$ может принимать произвольные значения в $\mathbb{R}^3$. Тогда в каждый момент времени вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = A^{-1}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{K}$ может принимать произвольные значения в $\mathbb{R}^3$. Значит, можно рассматривать $\boldsymbol{\omega}$ как управление, поскольку имеется взаимно однозначное соответствие $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$.

Если на гиростатический момент наложено ограничение типа $\mathbf{K} \in U$, где U — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^3$, то соответствующее ограничение на $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид $\boldsymbol{\omega} \in -A^{-1}(\boldsymbol{\gamma})U$. Например, если множество U — шар, то есть ограничение имеет вид $|\mathbf{K}| \leqslant c$, то ограничение на вектор угловой скорости — эллипсоид

$$|A(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}| \leqslant c. \tag{2.1}$$

Отметим, что и в случае $\widehat{\mathbf{M}} \neq 0$, если нет ограничения на управляющий гиростатический момент роторов $\mathbf{K}$, можно рассматривать $\boldsymbol{\omega}$ как управление, поскольку при фиксированном $\widehat{\mathbf{M}}$ и заданных $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ соотношение (1.5) дает взаимно однозначное соответствие $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$.

Получим управляемую систему на $\mathcal{M} = SO(3) \times \mathbb{R}^2$ стандартного вида

$$\dot{q} = \mathbf{f}(q, \boldsymbol{\omega}), \quad q = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}) \in \mathcal{M}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3,$$

где $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ является управлением. Векторное поле $\mathbf{f}$ задается формулами

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = R\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad \dot{y} = -R\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega} \rangle. \tag{2.3}$$

Динамика полностью исчезла из постановки задачи — осталась чистая кинематика. Вся динамическая информация нашла отражение в законе сохранения кинетического момента $\widehat{\mathbf{M}}$ относительно точки контакта.

Задача управления состоит в том, чтобы перевести шар из положения $q_0 \in \mathcal{M}$ в положение $q_1 \in \mathcal{M}$ за время $0 \leqslant t \leqslant \tau$, минимизируя некоторый функционал качества

$$\mathcal{A} = \int\limits_0^\tau L(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\omega}(t))\, dt,$$

где L — лагранжиан. Отметим, что лагранжиан L зависит только от $\boldsymbol{\gamma}$ в силу симметрии относительно горизонтальных сдвигов и поворотов относительно вертикали.

Выбор правильного функционала качества зависит от многих параметров. Сначала для простоты будет рассмотрен функционал, имеющий простой механический смысл:

$$\mathcal{A} = \int\limits_0^\tau T(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\omega}(t))\, dt,$$

где T — кинетическая энергия (1.4) шара с вмороженными роторами. С точки зрения механики, смысла в выборе этого функционала не много, но он часто используется (см. например [16, 19]). Иногда $\mathcal{A}$ интерпретируют как затраты энергии, но это, конечно, неверно. Настоящий функционал затрат энергии значительно сложнее для исследования, так что он в данной работе не рассматривается.

Отметим, что с тем же успехом можно взять в качестве лагранжиана L и кинетическую энергию $\widehat{T}$ шара с вращающимися роторами или любую квадратичную форму от угловой скорости.

Также часто рассматривается задача быстродействия, когда $L = 1$ и требуется минимизировать τ при ограничении типа (2.1) на управление $\boldsymbol{\omega}$. Наверное, это наиболее разумная постановка задачи.

Общий вид уравнений оптимального управления обсуждается в следующем разделе.

3. Общие уравнения вакономной динамики или оптимального управления

В этом разделе мы напоминаем общий вид уравнений вакономной механики В. В. Козлова [7–10] в групповых переменных. Аналогичные уравнения возникают в теории оптимального управления [1] или в субримановой геометрии [19].

Рассмотрим механическую систему с n-мерным конфигурационным пространством $\mathcal{M}$ и лагранжианом $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, $\dot{q} \in T_q\mathcal{M}$. Пусть на систему наложена неголономная связь. Это означает, что в каждой точке $q \in \mathcal{M}$ задано k-мерное распределение (линейное подпространство) $\Gamma_q \subset T_q\mathcal{M}$, гладко зависящее от точки q, и ограничение на скорость системы имеет вид $\dot{q} \in \Gamma_q$. Выберем базис гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma_q$ и дополним его до системы образующих в $T_q\mathcal{M}$ гладкими векторными полями $Y_1, \ldots, Y_m$ (возможно, зависимыми, так что $k + m \geqslant n$). Конечно, базис не всегда можно выбрать глобально, но в системах на группах Ли, которые, как правило, возникают в динамике твердого тела, это всегда можно сделать.

Будем предполагать, что распределение Γ не замкнуто относительно коммутаторов, иначе получится интегрируемая связь:

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l(q) X_l + \sum_{l=1}^{m} d_{ij}^l(q) Y_l,$$

где не все коэффиценты d_{ij}^l равны нулю.

Введем квазискорости $\omega_1, \ldots, \omega_k$ по формуле $\dot q = \sum_{i=1}^k \omega_i X_i$ и представим лагранжиан в виде

$$\mathcal{L}(q, \dot q, t) = \mathcal{L}(q, \sum_{i=1}^{k} \omega_i X_i(q), t) = L(q, \boldsymbol{\omega}, t), \qquad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_k).$$

Замечание 1. Если связь неоднородная, то есть имеет вид $\dot q \in a(q,t) + \Gamma_q$, где $a(q,t)$ — гладкое векторное поле, то

$$L(q, \boldsymbol{\omega}, t) = \mathcal{L}(q, a(q,t) + \sum_{i=1}^{k} \omega_i X_i(q), t).$$

Все дальнейшее (кроме замечаний о существовании оптимального управления, которые требуют модификации) без изменений переносится на этот случай.

Поставим задачу найти движение системы $q(t) \in \mathcal{M}$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, с заданными граничными условиями $q(0) = q_0$, $q(\tau) = q_1$, минимизирующее функционал действия

$$\mathcal{A} = \int_0^\tau \mathcal{L}(q(t), \dot q(t), t)\, dt = \int_0^\tau L(q(t), \boldsymbol{\omega}(t), t)\, dt$$

в классе кривых $\Omega(q_0, q_1, \tau)$, удовлетворяющих связи $\dot q(t) \in \Gamma_{q(t)}$. Если такое движение $q(t)$ существует, то оно является экстремалью функционала действия. Если связь интегрируемая, то это обычный принцип Гамильтона в лагранжевой механике. Если связь неинтегрируемая, то экстремали будут траекториями вакономной механики [7], но отличными от траекторий соответствующей неголономной системы [18].

Поскольку нас интересует задача управления шаром, будем рассматривать задачу минимизации $\mathcal{A}$ как задачу оптимального управления с ограничением на управление $\dot q = u \in \Gamma_q$.

Замечание 2. По теореме Рашевского – Чжоу [1, 6], если векторные поля X_i и их всевозможные коммутаторы порождают $T_q\mathcal{M}$ (связь вполне неинтегрируема), то управление, переводящее q_0 в q_1, существует. Если, более того, функция Лагранжа $\mathcal{L}(q, \dot q)$ удовлетворяет сильному условию Лежандра и суперлинейна по скорости (например, положительно определенная квадратичная форма по скорости, как в задаче о качении шара), а $\mathcal{M}$ компактно (или выполнены некоторые условия полноты на бесконечности), то функционал $\mathcal{A}$ достигает минимума на $\Omega(q_0, q_1, \tau)$, так что существует оптимальное управление.

Существуют два типа экстремалей — нормальные и аномальные, или особые [1], отвечающие нулевому множителю Лагранжа. В соответствии с принципом максимума Понтрягина [12], для нахождения нормальных экстремалей функционала действия $\mathcal{A}$ при ограничении $\dot q = u \in \Gamma_q$ следует составить гамильтониан Понтрягина на $T^*\mathcal{M}$:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \max\nolimits_{u \in \Gamma_q}(\langle p, u\rangle - \mathcal{L}(q, u, t)), \quad p \in T_q^*\mathcal{M}. \tag{3.1}$$

Если лагранжиан строго выпуклый и суперлинейный по скорости (например, кинетическая энергия), то $\mathcal{H}$ — гладкая функция. Тогда если $(q(t), p(t))$ — решение соответствующих уравнений Гамильтона на фазовом пространстве $T^*\mathcal{M}$, то $q(t)$ – экстремаль функционала действия.

Если лагранжиан $\mathcal{L}$ имеет механическое происхождение, то уравнения Гамильтона описывают также траектории соответствующей вакономной системы [7].

Замечание 3. Только нормальные экстремали функционала $\mathcal{A}$ описываются гамильтонианом (3.1). Аномальные экстремали [1], отвечающие управлению $u(t)$, являются траекториями гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$\widehat{\mathcal{H}}(q, p, u(t)) = \langle p, u(t)\rangle,$$

удовлетворяющими условиям $p(t) \perp \Gamma_{q(t)}$, $p(t) \neq 0$, $u(t) \in \Gamma_{q(t)}$. Эти экстремали не появляются в вакономной механике, но важны в теории управления: минимум функционала качества может быть достигнут на аномальной экстремали.

В дальнейшем рассматриваются в основном нормальные экстремали (как более часто встречающиеся). Определим координатные функции на фазовом пространстве $T^*\mathcal{M}$ по формулам

$$M_i = \langle p, X_i\rangle, \quad N_i = \langle p, Y_i\rangle.$$

Переменные N_i в общем случае зависимые, поскольку поля Y_i могут быть зависимыми. В силу (3.1),

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(q, p, t) \;&=\; \max\nolimits_{\omega_1, \ldots, \omega_k}\Big(\sum_{i=1}^{k} \omega_i M_i - L(q, \omega_1, \ldots, \omega_k, t)\Big) = \\ &=\; \max\nolimits_{\boldsymbol{\omega}}(\langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}\rangle - L(q, \boldsymbol{\omega}, t)) = H(q, \mathbf{M}, t)\end{aligned}$$

— преобразование Лежандра функции $L(q, \boldsymbol{\omega}, t)$ по переменной $\boldsymbol{\omega}$. Отметим, что гамильтониан H не зависит от переменных $\mathbf{N}$, то есть сильно вырожден.

Если, как часто бывает в приложениях, лагранжиан (кинетическая энергия) — однородная квадратичная форма по скорости

$$L(q, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(q)\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\langle A(q)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle,$$

то гамильтониан Понтрягина имеет вид

$$H(q, \mathbf{M}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(q)M_iM_j = \frac{1}{2}\langle B(q)\mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle, \quad B = A^{-1}. \tag{3.2}$$

Замечание 4. В этом случае экстремали — движения по инерции для вакономной системы, они же субримановы геодезические на $\mathcal{M}$ [19]. Тогда из общих теорем субримановой геометрии следует, что если распределение Γ вполне неинтегрируемо, а $\mathcal{M}$ полно в римановой метрике, то двухточечная граничная задача имеет оптимальное решение, но, возможно, экстремаль будет особой.

Немного по-другому гамильтониан Понтрягина определяется для задачи быстродействия при ограничении $u \in U_q \subset \Gamma_q$, где U_q — замкнутое выпуклое множество. Тогда гамильтониан Понтрягина имеет вид:

$$\mathcal{H}(q, p) = \max\nolimits_{q \in U_q}\langle p, u\rangle.$$

Он однороден первой степени по скорости. Если U_q имеет гладкую строго выпуклую границу, то гамильтониан $\mathcal{H}$ гладкий при $p \neq 0$, и минимизирующие $\mathcal{A}$ кривые являются решениями гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$.

Например, если множество U_q — эллипсоид

$$U_q = \{u = \sum_{i=1}^{K} \omega_i X_i \colon \langle C(q)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle \leqslant 1\},$$

где матрица $C(q)$ положительно определена, то

$$\mathcal{H} = H(q, \mathbf{M}) = \max_{\boldsymbol{\omega}}\{\langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}\rangle \colon \langle C(q)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle \leqslant 1\} = \sqrt{\langle C^{-1}(q)\mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle}. \tag{3.3}$$

Скобки Пуассона на $T^*\mathcal{M}$ задаются обычными формулами

$$\begin{aligned}
\{f, M_i\} &= \{f(q), \langle p, X_i\rangle\} = X_i f,\\
\{f, N_i\} &= \{f(q), \langle p, Y_i\rangle\} = Y_i f,\\
\{M_i, M_j\} &= \{\langle p, X_i\rangle, \langle p, X_j\rangle\} = -\langle p, [X_i, X_j]\rangle\\
\{N_i, N_j\} &= \{\langle p, Y_i\rangle, \langle p, Y_j\rangle\} = -\langle p, [Y_i, Y_j]\rangle\\
\{M_i, N_j\} &= \{\langle p, X_i\rangle, \langle p, Y_j\rangle\} = -\langle p, [X_i, Y_j]\rangle,
\end{aligned}$$

где f — произвольная гладкая функция на M, а $Xf = \langle \frac{\partial f}{\partial q}, X\rangle$ — производная f по направлению векторного поля X.

Уравнения Гамильтона для нормальных экстремалей запишутся в виде уравнений Эйлера–Пуанкаре–Четаева для переменных $q, \mathbf{M}, \mathbf{N}$:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} \omega_i X_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H(q, \mathbf{M}, t)}{\partial M_i} X_i, \tag{3.4}$$

$$\dot{M}_i = \{M_i, H(q, \mathbf{M}, t)\} = -\langle \frac{\partial H}{\partial q}, X_i\rangle + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial M_j}\{M_i, M_j\}, \tag{3.5}$$

$$\dot{N}_i = \{N_i, H(q, \mathbf{M}, t)\} = -\langle \frac{\partial H}{\partial q}, Y_i\rangle + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial M_j}\{N_i, M_j\}. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\{M_i, M_j\} = -\sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l(q) M_l - \sum_{l=1}^{m} d_{ij}^l(q) N_l,$$

$$\{N_i, M_j\} = -\sum_{l=1}^{k} a_{ij}^l(q) M_l - \sum_{l=1}^{m} b_{ij}^l(q) N_l.$$

Если связь интегрируемая, то есть распределение Γ_q замкнуто относительно коммутатора, то

$$\{M_i, M_j\} = -\sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l(q) M_l.$$

Тогда переменные $\mathbf{N}$ не входят в уравнения (3.4)–(3.5), так что переменные $q, \mathbf{M}$ отделяются. Получатся обычные уравнения Пуанкаре–Четаева [5].

В случае аномальных экстремалей гамильтониан Понтрягина при управлении $\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} \omega_k(t) X_i$ имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{k} \omega_i M_i = \langle \boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{M} \rangle.$$

Принцип максимума дает $\mathbf{M} = 0$. Уравнения Гамильтона принимают вид

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \{M_i, M_j\} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \sum_{l=1}^{m} d_{ij}^{l}(q) N_l, \tag{3.7}$$

$$\dot{N}_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \{N_i, M_j\} = -\sum_{j=1}^{k} \omega_j \sum_{l=1}^{m} b_{ij}^{l}(q) N_l. \tag{3.8}$$

4. Вакономная модель качения шара

Применим общие уравнения (3.4)–(3.6) в задаче об управлении качением шара. Отметим, что аналогичная задача при отсутствии верчения, когда шар со сферическим эллипсоидом инерции управлялся не внутренними роторами, а непосредственно угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{\alpha} + \omega_y \boldsymbol{\beta}$, а функционал имел вид

$$\mathcal{A} = \int\limits_{0}^{\tau} |\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \, dt,$$

подробно обсуждается в литературе (см., например, [16, 19]).

Имеем управляемую систему (2.2)–(2.3) на $\mathcal{M} = SO(3) \times \mathbb{R}^2$, где $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ является управлением. Векторные поля X_i, определяющие связь

$$\dot{q} = \mathbf{f}(q, \boldsymbol{\omega}) = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \omega_3 X_3,$$

задаются уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_i, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}_i, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_i, \tag{4.1}$$

$$\dot{x} = R\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_i \rangle, \quad \dot{y} = -R\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_i \rangle. \tag{4.2}$$

Рассмотрим стандартные левоинвариантные векторные поля Z_i на группе $SO(3)$:

$$Z_i \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_i, \quad Z_i \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}_i, \quad Z_i \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_i, \quad Z_i x = Z_i y = 0. \tag{4.3}$$

В компонентах

$$Z_i \alpha_j = \varepsilon_{ijl} \alpha_l, \quad Z_i \beta_j = \varepsilon_{ijl} \beta_l, \quad Z_i \gamma_j = \varepsilon_{ijl} \gamma_l, \tag{4.4}$$

где ε_{ijl} — символ Леви–Чивиты. По повторяющимся индексам здесь и далее производится суммирование. Коммутаторы на $SO(3)$ имеют вид

$$Z_j Z_i - Z_i Z_j = [Z_i, Z_j] = -\varepsilon_{ijl} Z_l. \tag{4.5}$$

Дополним Z_i до полного набора векторных полей на $\mathcal{M}$ векторными полями

$$Y_i = \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_i \rangle \frac{\partial}{\partial x} - \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_i \rangle \frac{\partial}{\partial y} = \beta_i \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Векторные поля Y_i зависимые:

$$\gamma_i Y_i = 0.$$

Очевидно, что $[Y_i, Y_j] = 0$. Используя (4.4), подсчитаем коммутаторы:

$$\begin{aligned}[Z_i, Y_j] &= Y_j Z_i - Z_i Y_j = \\ &= -(Z_i \beta_j) \frac{\partial}{\partial x} + (Z_i \alpha_j) \frac{\partial}{\partial y} = -\varepsilon_{ijl} \beta_l \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon_{ijl} \alpha_l \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= -\varepsilon_{ijl} Y_l.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$[Z_i, Y_j] = -\varepsilon_{ijl} Y_l. \tag{4.6}$$

Конечно, это стандартная формула.

В силу (4.1)–(4.2),

$$X_i = Z_i + R Y_i.$$

Отсюда и из (4.6)

$$[X_i, Y_j] = -\varepsilon_{ijl} Y_l, \quad [X_i, X_j] = -\varepsilon_{ijl} (X_l - R Y_l). \tag{4.7}$$

Будем использовать в качестве (зависимых) образующих в $T_q\mathcal{M}$ векторные поля X_i, Y_i, $i = 1, 2, 3$.

Выпишем гамильтониан Понтрягина для нормальных экстремалей в случае механического лагранжиана $L = T$ (T — кинетическая энергия в случае вмороженных роторов).

Можно сразу использовать формулу (3.2) для гамильтониана Понтрягина, но, для понимания механического смысла, полезно провести вычисление в явном виде.

Отождествим для $q = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}) \in \mathcal{M}$:

$$T_q\mathcal{M} = \mathbb{R}^3\{\boldsymbol{\omega}\} \times \mathbb{R}^2\{\mathbf{v}\}, \quad T_q^*\mathcal{M} = \mathbb{R}^3\{\mathbf{G}\} \times \mathbb{R}^2\{\mathbf{P}\},$$

где $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^3$ — кинетический момент в осях Кёнига, а $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ — полный импульс. Тогда $p = (\mathbf{G}, \mathbf{P})$. По определению, гамильтониан Понтрягина имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{G}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\gamma}) = \max_{\boldsymbol{\omega}} \{\langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \mathbf{P}, \mathbf{v} \rangle - T \mid \mathbf{v} = R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}\}.$$

Максимум достигается при

$$\mathbf{G} + R\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{P} - (J + D)\boldsymbol{\omega} + D\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \rangle \boldsymbol{\gamma} = 0$$

и равен

$$H = \frac{1}{2}\langle (J + D)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle - \frac{D}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \rangle^2 = \frac{1}{2}\langle A(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle = T(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}).$$

Введем матрицу

$$B(\boldsymbol{\gamma}) = A(\boldsymbol{\gamma})^{-1}$$

и обозначим

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{P}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = B(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{G} + R\mathbf{N} = A(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}.$$

Окончательно получим гамильтониан Понтрягина

$$H = \frac{1}{2}\langle B(\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{G} + R\mathbf{N}), \mathbf{G} + R\mathbf{N}\rangle = \frac{1}{2}\langle B(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle. \tag{4.8}$$

Конечно, эта формула сразу следует из (3.2). Действительно,

$$M_i = \langle p, X_i\rangle = G_i + RN_i, \quad G_i = \langle p, Z_i\rangle, \quad N_i = \langle p, Y_i\rangle.$$

Физический смысл переменной $\mathbf{M}$ — кинетический момент шара с вмороженными роторами относительно точки касания C, а переменной $\mathbf{N}$ — момент импульса относительно точки касания.

Отметим, что формула (4.8) остается справедливой в случае неоднородной связи (1.5), поскольку, как и раньше, ограничения на управление $\boldsymbol{\omega}$ нет.

Осталось подсчитать скобки Пуассона на фазовом пространстве:

$$\{\gamma_i, M_j\}, \quad \{M_i, N_j\}, \quad \{M_i, M_j\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\{M_i, M_j\} &= -\langle p, [X_i, X_j]\rangle = -\langle p, -\varepsilon_{ijl}(X_l - RY_l)\rangle = \varepsilon_{ijl}(M_l - RN_l),\\
\{\gamma_i, M_j\} &= X_j\gamma_i = Z_j\gamma_i = -\varepsilon_{ijl}\gamma_l,\\
\{M_i, N_j\} &= -\langle p, [Z_i, Y_j]\rangle = -\langle p, -\varepsilon_{ijl}Y_l\rangle = \varepsilon_{ijl}N_l.
\end{aligned}$$

Отметим, что переменные $\mathbf{N}$ зависимые:

$$\langle \mathbf{N}, \boldsymbol{\gamma}\rangle = \gamma_i N_i = 0.$$

Теперь выпишем уравнения Гамильтона (3.4)–(3.6) для нормальных экстремалей. Пусть $L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$ — лагранжиан, а $H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M})$ — соответствующий гамильтониан. Получим

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_i &= \{\gamma_i, H\} = \{\gamma_i, M_j\}\frac{\partial H}{\partial M_j} = \varepsilon_{ilj}\gamma_l\omega_j,\\
\dot{N}_i &= \{N_i, H\} = \{N_i, M_j\}\frac{\partial H}{\partial M_j} = \varepsilon_{ilj}N_l\omega_j,\\
\dot{M}_i &= \{M_i, H\} = \{M_i, \gamma_j\}\frac{\partial H}{\partial \gamma_j} + \{M_i, M_j\}\frac{\partial H}{\partial M_j} =\\
&= \frac{\partial H}{\partial \gamma_j}\varepsilon_{jil}\gamma_l + \varepsilon_{ilj}(M_l - RN_l)\omega_j.
\end{aligned}$$

В векторной форме

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{4.9}$$

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{4.10}$$

$$\dot{\mathbf{M}} \;=\; \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + (\mathbf{M} - R\mathbf{N}) \times \boldsymbol{\omega}, \tag{4.11}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}$. При $\mathbf{N} = 0$ получим стандартные уравнения Гамильтона на $T^*SO(3)$ [5].

Уравнения (4.9)–(4.10) означают, что векторы $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{N}$ постоянны в неподвижном пространстве. Система имеет очевидные первые интегралы

$$|\boldsymbol{\gamma}| = \mathrm{const}, \quad |\mathbf{N}| = \mathrm{const}, \quad \langle \mathbf{N}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = \mathrm{const}.$$

На самом деле $|\boldsymbol{\gamma}| = 1$ и $\langle \mathbf{N}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = 0$. Есть еще интеграл энергии (гамильтониан) $H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M})$.

Переменные $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ в уравнения (4.9)–(4.11) не входят. Если их добавить, то можно отбросить уравнение (4.10):

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{N} = N_x \boldsymbol{\alpha} + N_y \boldsymbol{\beta}, \qquad N_x, N_y = \mathrm{const}.$$

Отметим, что форма уравнений Гамильтона (4.9)–(4.10) не зависит от выбора лагранжиана $L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$. Предположим теперь, что лагранжиан квадратичен по скорости:

$$L = T(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \langle A(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle,$$

где T — кинетическая энергия (1.4) в случае вмороженных роторов. Тогда

$$H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M}) = \frac{1}{2} \langle B(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle, \quad \boldsymbol{\omega} = B(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{M}.$$

Поскольку $H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M})$ — преобразование Лежандра функции $L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$, в силу (1.4) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = -\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\Big|_{\boldsymbol{\omega} = B(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{M}} = D \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega} \rangle \boldsymbol{\omega} \big|_{\boldsymbol{\omega} = B(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{M}}.$$

Уравнение (4.11) примет вид

$$\dot{\mathbf{M}} \;=\; (D \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega} \rangle \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M} - R\mathbf{N}) \times \boldsymbol{\omega},$$

где

$$\mathbf{M} = A(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\omega} = (J + D) \boldsymbol{\omega} - D \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega} \rangle \boldsymbol{\gamma}.$$

Получим

$$\dot{\mathbf{M}} \;=\; (J \boldsymbol{\omega} - R\mathbf{N}) \times \boldsymbol{\omega},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M} + R\mathbf{N}) = J \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{4.12}$$

Это уравнение изменения кинетического момента в подвижной системе отсчета. В неподвижной системе имеем

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\text{неп}} \mathbf{M} = \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} = (D \omega_z \mathbf{e}_z - R\mathbf{N}) \times \boldsymbol{\omega}. \tag{4.13}$$

Напомним, что из общих теорем субримановой геометрии следует, что двухточечная граничная задача имеет решение, но, возможно, экстремаль будет иметь особые куски, то есть будет негладкой. Уравнения (3.7)–(3.8) для особых (аномальных) экстремалей имеют вид

$$M_i = 0, \quad \varepsilon_{ijl}\omega_j N_l = 0, \quad \dot{N}_i = \varepsilon_{ilj} N_l \omega_j.$$

В векторной форме имеем

$$\mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{N} \times \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \dot{\mathbf{N}} = 0.$$

Значит,

$$\mathbf{N} = \mathrm{const} \neq 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \kappa(t)\mathbf{N}, \quad \mathbf{v} = -R\kappa(t)\mathbf{e}_z \times \mathbf{N}.$$

Шар крутится вокруг неизменной горизонтальной оси и катится по прямой с произвольной скоростью. Отметим, что в общем случае такое движение не удовлетворяет уравнениям вакономной механики (4.11)–(4.10) для нормальных экстремалей.

Однако для оптимальных аномальных экстремалей $\kappa = \mathrm{const}$, так что они являются нормальными.

5. Случай шаровой симметрии

Если тензор инерции J шаровой, то $J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, так что, в силу (4.12),

$$\mathbf{M} + R\mathbf{N} = \mathbf{C} = \mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\omega} = B(\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{C} - R\mathbf{N}),$$

где вектор $\mathbf{C}$ постоянен в подвижной системе отсчета.

В случае шарового тензора инерции уравнения Гамильтона можно явно проинтегрировать. Впервые это сделано П. В. Харламовым [14] для вакономных уравнений движения катящегося шара. Задача управления им не рассматривалась.

Перейдем в неподвижную систему отсчета: неудобно, что вектор $\mathbf{N}$ постоянен в неподвижной системе, а $\mathbf{C}$ — в подвижной. В неподвижной системе

$$\mathbf{N} = N_x\mathbf{e}_x + N_y\mathbf{e}_y = \mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}_z = \mathrm{const}$$

и

$$M_x = (J + D)\omega_x, \quad M_y = (J + D)\omega_y, \quad M_z = J\omega_z.$$

Система (4.13) примет вид

$$\begin{aligned} (J + D)\dot{\omega}_x &= -(D\omega_y + RN_y)\omega_z, \\ (J + D)\dot{\omega}_y &= (D\omega_x + RN_x)\omega_z, \\ J\dot{\omega}_z &= R(-N_x\omega_y + N_y\omega_x). \end{aligned}$$

Эквивалентные уравнения содержатся в работе П. В. Харламова [14]. Решения находятся в эллиптических функциях.

Ограничимся общим описанием структуры решений. Интеграл энергии имеет вид

$$2H = (J + D)(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J\omega_z^2.$$

Если перейти к декартовым координатам центра шара по формуле $\mathbf{v} = R\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\omega}$ и использовать интеграл энергии, то получим уравнение вида

$$a(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = -B\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \mathbf{N},$$

где

$$B = \frac{D}{R^2}, \quad a(\mathbf{v}) = \frac{\mu}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}, \quad c^2 = \frac{2HR^2}{J+D}, \quad \mu = \frac{\sqrt{J(J+D)}}{R}.$$

Таким образом, движение центра шара описывается уравнениями типа Ньютона, описывающими движение материальной точки переменной массы под действием силы типа силы Лоренца

$$\mathbf{F} = -B\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \mathbf{N},$$

действующей на заряд в постоянном электрическом поле $\mathbf{N}$ и магнитном поле $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$.

Если сделать замену времени $dt = a(\mathbf{v})\,ds$, то уравнение

$$\mathbf{v}' = -B\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \mathbf{N}$$

легко решается:

$$\mathbf{v} = e^{iBs}\mathbf{c} - B^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{N}, \quad \mathbf{c} = \mathrm{const}.$$

Затем время

$$t = \int a(\mathbf{v}(s))\,ds$$

находится в эллиптических функциях.

6. Другие функционалы качества

До сих пор в качестве лагранжиана для функционала качества использовалась кинетическая энергия T шара с вмороженными роторами. Предположим для простоты, что $\widehat{\mathbf{M}} = 0$. Если использовать полную кинетическую энергию $L = \widehat{T}$ с учетом вращения роторов, то лагранжиан принимает вид

$$L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\langle \widehat{A}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle, \quad \widehat{A} = I^{-1}A^2 - A.$$

Значит, уравнения Понтрягина для нормальных экстремалей имеют прежний вид уравнений Гамильтона (4.9)–(4.11) с гамильтонианом

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\langle \widehat{B}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle, \quad \widehat{B} = \widehat{A}^{-1}.$$

Как и при $L = T$, можно показать, что в случае шарового тензора инерции уравнения Гамильтона интегрируются в эллиптических функциях.

Другой разумный функционал качества —

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^\tau |\mathbf{K}(t)|^2\,dt = \int_0^\tau L(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\omega}(t))\,dt,$$

где теперь

$$L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\langle A^2(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle.$$

Получатся опять уравнения Гамильтона (4.9)–(4.11) с заменой $A(\boldsymbol{\gamma})$ на

$$A^2(\boldsymbol{\gamma}) = (J+D)^2 - D^2\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\gamma} - D(J\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\otimes J\boldsymbol{\gamma}).$$

После некоторых вычислений получим

$$\dot{\mathbf{M}} = (J+D)^2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + D\langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}\rangle(\boldsymbol{\gamma}\times J\boldsymbol{\omega} - J\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}) - R\mathbf{N}\times\boldsymbol{\omega}.$$

В случае шарового тензора инерции уравнения опять интегрируются в эллиптических функциях. Действительно, уравнение (4.11) примет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = -R\mathbf{N}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M} = (J+D)^2(\omega_x\mathbf{e}_x + \omega_y\mathbf{e}_y) + J^2\omega_z\mathbf{e}_z.$$

Рассмотрим теперь задачу быстродействия при ограничении $|\mathbf{K}| \leqslant c$ на величину гиростатического момента. В переменных $\boldsymbol{\omega}$ ограничение — эллипсоид

$$\{\boldsymbol{\omega}\colon \langle A^2(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle \leqslant c^2\}.$$

Получим гамильтониан Понтрягина (3.3):

$$H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M}) = c\sqrt{\langle A^{-2}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle}.$$

Можно показать, что случае шарового тензора инерции уравнения нормальных экстремалей опять интегрируются в эллиптических функциях. Несложно найти в явном виде простейшие оптимальные управления, например, для движения центра шара по прямой. Однако синтез оптимального управления является гораздо более сложной задачей.

Автор благодарен А. В. Борисову и Д. В. Трещеву за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.

[2] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

[3] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338.

[4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307.

[5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

[6] Каратеодори К. Вариационное исчисление и уравнения в частных производных. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2012. 552 с.

[7] Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями: 1 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1982, № 3, с. 92–100.

[8] Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями: 2 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1982, № 4, с. 70–76.

[9] Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями: 3 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1983, № 3, с. 102–111.

[10] Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 550–554.

[11] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // МТТ, 1986, т. 21, № 1, с. 64–65.

[12] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.

[13] Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Учен. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук, 1938, № 2, с. 83–94.

[14] Харламов П. В. Критика некоторых математических моделей механических систем с дифференциальными связями // ПММ, 1992, т. 56, № 4, с. 692–698.

[15] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 465–483.

[16] Jurdjevich V. Geometric control theory. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 52.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 492 pp.

[17] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.

[18] Lewis A. D., Murray R. M. Variational principles for constrained systems: Theory and experiment // Int. J. Nonlinear Mech., 1995, vol. 30, no. 6, pp. 793–815.

[19] Montgomery R. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. (Math. Surveys and Monogr., vol. 91.) Providence, R. I.: AMS, 2002. 259 pp.

The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors

Sergey V. Bolotin

Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
bolotin@mi.ras.ru

We study the problem of optimal control of a Chaplygin ball on a plane by means of 3 internal rotors. Using Pontryagin maximum principle, the equations of extremals are reduced to Hamiltonian equations in group variables. For a spherically symmetric ball, the solutions can be expressed in by elliptic functions

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 70F25, 70H45
Keywords: nonholonomic constraint, vaconomic mechanics, optimal control, maximum principle, Hamiltonian

Received September 4, 2012, accepted November 9, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 837–852 (Russian)