



УДК: 512.77 517.912

MSC 2010: 70Hxx, 70G65

## Самопродвижение в идеальной жидкости тела с твердой оболочкой и переменной циркуляцией

С. М. Рамоданов, В. А. Тененев, Д. В. Трещев

Изучается двумерная задача о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Тело снабжено гироскопом, а также ротором Флеттнера, благодаря которому на тело действует гироскопическая сила (эффект Магнуса). Угловые скорости вращения гироскопата и ротора предполагаются известными функциями времени (управлениями). Уравнения движения представлены в виде уравнений Кирхгофа, и в случае кусочно-постоянных управлений указаны законы сохранения. С их помощью уравнения движения приведены к неавтономной системе дифференциальных уравнений первого порядка на группе перемещений конфигурационного пространства. Численно, с использованием генетических алгоритмов, решена задача оптимального управления телом для различных типов управляющих воздействий.

Ключевые слова: идеальная жидкость, самопродвижение, ротор Флеттнера

Получено 1 сентября 2011 года

После доработки 24 сентября 2011 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.Г34.31.0039. Работа С. М. Рамоданова и Д. В. Трещева поддержана грантом поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

Рамоданов Сергей Михайлович

[ramodanov@mail.ru](mailto:ramodanov@mail.ru)

Институт компьютерных исследований

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

Тененев Валентин Алексеевич

[tenenev@istu.ru](mailto:tenenev@istu.ru)

Ижевский государственный технический университет

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7

Трещев Дмитрий Валерьевич

[treshev@mi.ras.ru](mailto:treshev@mi.ras.ru)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119899, Россия, г. Москва, Ленинские горы



## 1. Введение и исторические комментарии

1. Задача о движении изменяемого тела в жидкости относится к числу классических и давно изучаемых задач гидродинамики, которой в мире посвящено и посвящается огромное число работ. Интерес к ней связан с изучением механизма плавания рыб и конструирования подводных аппаратов. Не претендуя на глубокий и полный исторический анализ, мы упомянем здесь лишь некоторые с нашей точки зрения значимые и ставшие классическими в этой области работы.

Пусть на тело, погруженное в жидкость, не действуют никакие внешние силы, за исключением, возможно, сил гидродинамических реакций (со стороны жидкости). Для того чтобы это тело было способно перемещаться на значительные расстояния, ему необходимо каким-то образом «взаимодействовать» с окружающей его жидкостью. В случае вязкой жидкости это взаимодействие происходит благодаря сходу вихрей с острых кромок поверхностей тела, а также силам вязкого сопротивления. Одними из первых вопрос о движении живых организмов в вязкой жидкости рассмотрели Тейлор [24–26] и Лайтхилл [19]. В работах [24, 25] изучается движение микроорганизмов. Работа [26] посвящена плаванию рыб продолговатой формы (ужей). Здесь вязкость играет решающую роль в создании тяговой силы. С аналитической точки зрения предпочтительнее считать жидкость, в которой движется тело, *идеальной*. Однако в этом случае завихренность потока самопроизвольно возникнуть не может, и ее наличие постулируют. Вопрос о движении рыб в идеальной жидкости изучался в [27] на модельном примере деформирующейся пластины, с края которой сходят вихри, а собственное движение пластины представляет собой бегущую волну. Качественное объяснение механизма движения рыб на основании модели движения в твердом канале дано в [8, 9].

В этой связи возникает вопрос: может ли тело за счет деформации поверхности двигаться в идеальной жидкости, совершая *безвихревое* движение? Положительный ответ был дан еще в 1966 году [11]. Было рассмотрено тело почти сферической формы. Радиус тела представлен в виде ряда по функциям Лежандра. Указано, что тяговая сила возникает при надлежащем выборе коэффициентов ряда. Схожий вопрос обсуждается в [23]. Исследуется возможность прямолинейного движения деформирующегося тела почти сферической формы. В [16] показана возможность создания тяговой силы при движении изменяемого тела бесконечной длины в идеальной жидкости без вихрей.

Наиболее систематически и полно вопрос о движении деформируемого тела в идеальной жидкости освещен в [12–14]. Предполагается, что в результате деформации (в отсутствие жидкости) положение центра масс и главных осей тела не меняется. Отметим также, что в работах [12, 13] задача изучается даже в более общей постановке: жидкость не предполагается покоящейся на бесконечности и при этом изучается движение нескольких тел вблизи жестких границ. Подчеркнем, что, в отличие от вышеупомянутых работ, в работах этих авторов (по-видимому, впервые) уравнения движения деформируемого тела явно приведены в достаточно общей постановке и частично исследованы.

2. Частным случаем общей задачи является вопрос о возможности самопродвижения в идеальной жидкости при условии, что меняется только распределение масс внутри тела, в то время как оболочка тела остается неизменной. Предположим, что в начальный момент времени тело и жидкость покоились. Можно ли за счет подходящего изменения геометрии масс тела (под действием только внутренних сил) переместить его корпус из данного положения в любое наперед заданное? На первый взгляд кажется, что это невозможно, поскольку центр масс системы «тело + жидкость» покоится. Однако данный аргумент нельзя

схесть исчерпывающим: во-первых, центр масс бесконечного объема жидкости не определен, а во-вторых, нас интересует только перемещение корпуса тела, а не жидкости. Так, в [6] показано, что если не все присоединенные массы тела (зависящие лишь от формы границы) равны между собой, то за счет перемещения точек внутри корпуса может быть создана тяговая сила. Более того, при подходящем управлении геометрией масс тело можно переместить из любого положения в любое другое. Заметим, что свойство полной управляемости тела теряется, если все присоединенные массы совпадают.

Недавно предложен еще один простой пример самопродвижения тела с жесткой границей [3]. Форма твердого тела имеет винтообразующую симметрию относительно оси  $x$ . В полость такого тела помещается волчок, у которого ось  $x$  является осью винтовой симметрии. При вращении волчка около оси  $x$  тело будет вращаться в противоположную сторону (закон сохранения кинетического момента), а также двигаться поступательно вдоль оси  $x$ .

3. Следует отметить, что, деформируя границы тела периодическим образом или же изменяя по некоторому периодическому закону распределение масс внутри тела, невозможно получить тяговую силу, среднее значение которой отлочно от нуля. В настоящей работе рассматривается самопродвижение в идеальной жидкости тела с твердой оболочкой, снабженного гиростатом и так называемым *ротором Флеттнера*, представляющим собой вращающийся в жидкости цилиндр, благодаря которому на тело действует подъемная сила Жуковского (эффект Магнуса).

Подобная система была недавно рассмотрена в [15]. Отметим, что авторам этой работы принадлежит идея использования ротора Флеттнера для создания подъемной силы за счет набегающего потока жидкости, в то время как сам Антон Флеттнер (1885–1961) использовал потоки воздуха при конструировании летательных аппаратов, а также как альтернативу обычному парусу: так в 1923 на берлинском озере Ванзее он в обычной шлюпке опробовал модель паруса-ротора, высотой в один метр и 15 см в диаметре. Приводом ротора послужил часовой механизм. Шлюпка пришла в движение под разницей давлений воздуха, то есть был создан парусный движитель, гораздо более легкий и простой в управлении. В настоящее время в эксплуатации находится несколько грузовых кораблей, оборудованных роторами Флеттнера (рис. 1).

Экспериментальная установка, предложенная в [15], представляет собой тело в форме тора с укрепленным в его центре легким стержнем, который благодаря электроприводу может вращаться вокруг своей оси (рис. 2). Тело выполнено из достаточно легкого материала и способно плавать на поверхности жидкости. В процессе движения погруженный в воду стержень вращается вокруг своей оси, в результате чего на тело действует сила, ортогональная набегающему потоку. Один из недостатков этой экспериментальной установки — невозможность начать движение из состояния покоя: для возникновения подъемной силы установке следует сообщить начальную скорость, а затем, как и отмечается в [15], изменяя скорость и направление вращения ротора, можно переместиться в любую наперед задан-



Рис. 1. Грузовое судно E-SHIP 1 с четырьмя роторами Флеттнера.



Рис. 2. Экспериментальная установка из работы [15].

ную точку, двигаясь по дугам окружностей. Кроме того, здесь имеется всего лишь один управляющий параметр — скорость вращения ротора. В нашей работе рассматривается усовершенствованная модель, в которой, помимо ротора Флеттнера, имеется маховик с осью вращения, параллельной оси вращения ротора.

## 2. Уравнения движения

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу о движении в бесконечном объеме идеальной несжимаемой жидкости твердого тела с маховиком и ротором Флеттнера (рис. 3). Жидкость еще предполагается совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности.

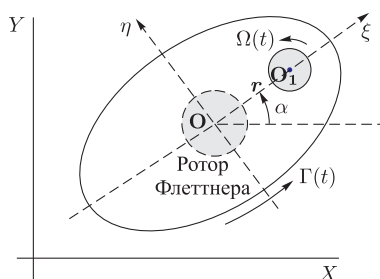


Рис. 3. Тело с ротором Флеттнера и маховиком («вид сверху»).

Из классической гидродинамики известно (см., например, [7]), что со стороны идеальной жидкости на движущееся в ней твердое тело действуют

1. сила и момент, обусловленные эффектом присоединенных масс;
2. подъемная сила Жуковского, равная

$$-\rho\Gamma\mathbf{V} \times \mathbf{e}_3, \quad (2.1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $\mathbf{V}$  — линейная скорость тела,  $\Gamma$  — циркуляция, а единичный вектор  $\mathbf{e}_3$  ортогонален плоскости, в которой происходит движение.

В действительности зависимость подъемной силы от скорости потока более сложная. Экспериментальные исследования силы, действующей на вращающийся цилиндр в набегающем потоке, проводились еще Магнусом [21], а затем и в ряде более поздних работ. Установлено, что в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса подъемная сила пропорциональна скорости вращения цилиндра. В свою очередь, из-за имеющейся в реальных жидкостях вязкости скорость вращения пропорциональна циркуляции жидкости вокруг цилиндра, поэтому в наших исследованиях мы будем считать справедливой формулу (2.1).

Циркуляция жидкости вокруг тела  $\Gamma(t)$  определяется скоростью вращения ротора (собственные масса и момент инерции которого считаются несущественными), которая, как и угловая скорость вращения гиростата  $\Omega(t)$ , считаются известными величинами (управлениями).

Положение тела определяется тремя координатами. Пусть  $X, Y$  — оси неподвижной декартовой системы координат и пусть  $x, y$  — координаты некоторой точки  $O$  тела. Свяжем с телом подвижную декартову систему координат  $O\xi\eta$ . Положение подвижной системы координат относительно неподвижной определяется углом  $\alpha$  между осями  $X$  и  $\xi$ . Пусть  $(u, v)$  — компоненты абсолютной скорости точки  $O$  в подвижных осях. Справедливы следующие (кинематические) соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \alpha - v \sin \alpha, & \dot{y} &= u \sin \alpha + v \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} &= \omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость вращения подвижной системы координат. Ставится задача управления движением тела (то есть функциями  $x(t), y(t), \alpha(t)$ ) посредством надлежащего выбора управлений  $\Omega(t)$  и  $\Gamma(t)$ .

## 2.2. Уравнения движения

Хорошо известно, что количество движения и момент бесконечного объема жидкости представляются, вообще говоря, расходящимися интегралами. Поэтому вывести уравнения движения непосредственно из теорем об изменении импульса и момента для системы «тело + жидкость» не представляется возможным. Однако Томсоном (лордом Кельвином) и Тэтом были предложены некоторые модификации указанных теорем, позволяющие уравнения движения записать в виде, известном как уравнения Кирхгофа. Их рассуждения основаны на следующем наблюдении. Пусть пока циркуляция жидкости вокруг тела  $\Gamma(t)$  равна нулю. Течение жидкости потенциально и описывается однозначным потенциалом скоростей  $\varphi$ . Текущее движение тела и жидкости можно получить мгновенно из состояния покоя с помощью подходящего *динамического винта* (названного Томсоном *импульсом*), приложенного к телу. Это винт, имеющий в плоском случае три компоненты ( $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ), уравновешивает на поверхности тела систему импульсивных давлений с плотностью  $\rho\varphi$ , а также образует имеющее место в данный момент движение всех частиц тела. Его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= \int_C \rho\varphi \mathbf{n} ds + \mathbf{P}_b, \\ \xi_3 &= \int_C \rho\varphi(\mathbf{r} \times \mathbf{n}, \mathbf{e}_3) ds + K_b\end{aligned}\quad (2.3)$$

и не совпадают, вообще говоря, с количеством движения и момента системы «тело + жидкость», однако  $\xi_1$  и  $\xi_2$  изменяются во времени так же, как количество движения, а  $\xi_3$  — как кинетический момент конечной динамической системы. Здесь  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе тела  $C$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точек границы относительно точки  $O$ ,  $\mathbf{P}_b$  — импульс тела,  $K_b$  — кинетический момент тела относительно точки  $O$ . Имеет место следующая теорема (см., например, [20]).

**Теорема 1.** Пусть твердое тело движется в бесконечном объеме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Свяжем с телом декартову систему координат с центром в точке  $O$ . Векторы  $\mathbf{v} = (u, v)$  и  $\boldsymbol{\xi}$  считаем отнесенными к этой системе координат. Обозначим  $\mathbf{F}$  сумму внешних сил (помимо сил гидродинамического давления), действующих на тело, а  $\mathbf{M}$  — их момент относительно точки  $O$ . Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \omega \mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\xi} + \mathbf{F}, \quad \frac{d\xi_3}{dt} = \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_3) + M. \quad (2.4)$$

Таким образом, для получения уравнений движения нашей системы надо выразить компоненты импульса Кельвина  $\xi_i$ , а также силу  $\mathbf{F}$  и момент  $\mathbf{M}$  через  $u, v, \omega, \Gamma(t), \Omega(t)$  и физические параметры задачи, а затем полученные выражения подставить в (2.4).

Условимся далее импульс, кинетический момент и энергию маховика обозначать символами с верхним индексом  $\Omega$ , а тела без маховика — с верхним индексом 0. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_b &= \mathbf{P}_b^0 + \mathbf{P}_b^\Omega, & K_b &= K_b^0 + K_b^\Omega, \\ \mathbf{P}_b^\Omega &= m \begin{pmatrix} u \\ v + \omega r \end{pmatrix}, & K_b^\Omega &= A(\Omega + \omega),\end{aligned}\quad (2.5)$$

где  $m$  и  $A$  — масса и момент инерции маховика относительно его центра  $O_1$ ,  $r = |OO_1|$ . Известно, что при отсутствии маховика полная кинетическая энергия системы «тело + жидкость»

$$T_{b+f}^0 = \frac{1}{2}(a_1^0 u^2 + a_2^0 v^2 + b^0 \omega^2) \quad (2.6)$$

(постоянные коэффициенты  $a_1^0, a_2^0, b^0$  включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции тела) связана с компонентами импульса Кельвина соотношениями

$$\xi^0 = \frac{\partial T_{b+f}^0}{\partial v}, \quad \xi_3^0 = \frac{\partial T_{b+f}^0}{\partial \omega}. \quad (2.7)$$

Полная кинетическая энергия системы «тело + жидкость» имеет вид

$$T = T_{b+f}^0 + \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + \omega^2 r^2) + mr\omega v + \frac{A}{2}(\Omega + \omega)^2. \quad (2.8)$$

Видим, что компоненты импульса Кельвина вычисляются по формуле

$$\xi = \frac{\partial T}{\partial v}, \quad \xi_3 = \frac{\partial T}{\partial \omega}. \quad (2.9)$$

Осталось заметить, что благодаря циркуляции на тело действует еще подъемная сила Жуковского (2.1), главный вектор которой относительно точки  $O$  равен

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\lambda v \\ \lambda u \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda = \varrho \Gamma(t). \quad (2.10)$$

Будем предполагать, что  $O$  — конформный центр контура  $C$  (это, например, так, если тело обладает двумя осями симметрии), а потому момент силы Жуковского равен нулю. Таким образом, обосновано следующее утверждение.

**Утверждение.** Уравнения движения симметричного тела с маховиком и ротором Флеттнера имеют вид уравнений (2.4), дополненных кинематическими соотношениями (2.2), в которых следует положить  $\mathbf{M} = 0$ , а импульсы  $\xi_i$  и силу  $\mathbf{F}$  заменить по формулам (2.9) и (2.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} - \omega \frac{\partial T}{\partial v} &= -\lambda v, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} + \omega \frac{\partial T}{\partial u} &= \lambda u, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} + u \frac{\partial T}{\partial v} - v \frac{\partial T}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь функция  $T$ , совпадающая с полной кинетической энергией системы «тело + жидкость» (2.8), может быть представлена (с точностью до несущественного слагаемого  $A\Omega^2/2$ ) в виде

$$T = \frac{1}{2}(a_1 u^2 + a_2 v^2 + b \omega^2) + mr\omega v + A\Omega\omega, \quad (2.12)$$

где

$$a_1 = a_1^0 + m, \quad a_2 = a_2^0 + m, \quad b = b^0 + mr^2 + A.$$



ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, при нулевой циркуляции уравнения движения могли быть немедленно получены с помощью лагранжева формализма: лагранжиан для нашей системы — это ее полная кинетическая энергия, которую следовало подставить в уравнения (2.11). Однако такой подход следует применять с известной осторожностью и необходимыми обоснованиями (что и было нами предпринято), поскольку «слепое» использование лагранжева формализма (подстановка кинетической энергии системы в уравнения Лагранжа второго рода) может привести к ошибочным уравнениям движения. Упомянем в этой связи задачу о движении тела с отверстиями в идеальной жидкости [17], а также задачу о движении уравновешенного гиростата [1], где, формально в отсутствие внешних сил, лагранжиан вовсе не равен кинетической энергии, а содержит дополнительные линейные по скоростям слагаемые.

### 3. Управление кусочно-постоянными функциями

В случае произвольной зависимости управлений  $\lambda, \Omega$  от времени уравнения движения нашей системы (2.2), (3.2) достаточно сложны и, по-видимому, не имеют глобальных первых интегралов, что существенно затрудняет их исследование и решение задач управления. Поэтому примем следующие упрощающие предположения:

1. Тело гидродинамически симметрично, то есть  $a_1 = a_2 = a$ . Это так, если, например, граница тела  $C$  — окружность.
2. Управления  $\lambda(t)$  и  $\Omega(t)$  являются кусочно-постоянными функциями времени.

При сделанных предположениях (см., например, [5]) уравнения (2.11) представимы в виде уравнений Пуанкаре на группе  $E(2)$  (уравнений Кирхгофа):

$$\left(\frac{\partial L}{\partial w_i}\right)' = \sum_{n,k} c_{ni}^k w_i \frac{\partial L}{\partial w_k} + v^i(L), \tag{3.1}$$

где в качестве координат на группе выбраны  $x, y, \alpha$ , квазискорости  $u, v, \omega$  определяются по формулам (2.2), а векторные поля

$$v^1 = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0), \quad v^2 = (\sin \alpha, \cos \alpha, 0), \quad v^3 = (0, 0, 1)$$

и структурные константы  $c_{jk}^i$  удовлетворяют соотношениям  $\sum_j c_{ik}^j v^j = [v^i, v^k]$ ,  $\mathbf{w} = (u, v, \omega)$ .

Для этого положим  $L = T + \frac{\lambda}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})$ , где  $T$  задана соотношением (2.2), а скорости  $\dot{x}, \dot{y}$  следует заменить по формулам (2.2). Тогда в развернутом виде уравнения движения (3.1) примут вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)' - \omega \frac{\partial L}{\partial v} &= 0, & \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)' + \omega \frac{\partial L}{\partial u} &= 0, \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)' + u \frac{\partial L}{\partial v} - v \frac{\partial L}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Таким образом, гироскопическая добавка  $\lambda(y\dot{x} - x\dot{y})/2$  позволила «убрать» правые части (2.11) в лагранжиан.

Уравнения (3.2) имеют первые интегралы импульса и момента

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial L}{\partial u} \cos \alpha - \frac{\partial L}{\partial v} \sin \alpha + \frac{\lambda y}{2} = c_1, & P_2 &= \frac{\partial L}{\partial u} \sin \alpha + \frac{\partial L}{\partial v} \cos \alpha - \frac{\lambda x}{2} = c_2, \\ K &= xP_2 - yP_1 + \frac{\partial L}{\partial \omega} + \lambda(x^2 + y^2)/2 = c_3, \end{aligned} \tag{3.3}$$



а также интеграл энергии

$$H = L - \frac{\partial L}{\partial \omega}. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Первые интегралы (3.3) имеют место и в случае  $a_1 \neq a_2$ , а для произвольных дифференцируемых  $\lambda(t), \Omega(t)$  их производные в силу уравнений (2.11) и (2.2) имеют вид

$$\dot{P}_1 = \dot{\lambda}y, \quad \dot{P}_2 = -\dot{\lambda}x, \quad \dot{K} = -\frac{\dot{\lambda}}{2}(x^2 + y^2), \quad \dot{H} = -A\omega\dot{\Omega}. \quad (3.5)$$

Поэтому, если в какой-то момент времени значение  $\lambda$  скачкообразно меняется на величину  $\Delta\lambda$ , то, согласно (3.5), величина, например, первого интеграла  $c_1$  меняется на величину  $y\Delta\lambda$ .

Выразив из соотношений (3.3)  $u, v, \omega$  через постоянные первых интегралов  $c_i$  и управления  $\lambda(t)$  и  $\Omega(t)$  и подставив получившиеся выражения в кинематические соотношения (2.2), получим достаточно громоздкую (неавтономную) систему трех дифференциальных уравнений на  $x, y, \alpha$ :

$$\dot{x} = X(x, y, \alpha, \lambda, \Omega, c_i), \quad \dot{y} = Y(x, y, \alpha, \lambda, \Omega, c_i), \quad \dot{\alpha} = \Phi(x, y, \alpha, \lambda, \Omega, c_i). \quad (3.6)$$

Переходом в «гидродинамический центр тяжести» по формулам

$$x_c = x + \frac{rm}{a} \cos \alpha, \quad y_c = y + \frac{rm}{a} \sin \alpha$$

уравнения (3.6) удается существенно упростить:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \frac{c_1}{a} + \frac{mr}{a^2} \lambda \sin \alpha - \frac{\lambda y_c}{a}, \\ \dot{y}_c &= -\frac{c_2}{a} + \frac{mr\lambda}{a^2} \cos \alpha + \frac{\lambda x_c}{a}, \\ \dot{\alpha} &= \varkappa \left[ ac_3 + \frac{m^2 r^2}{2a} \lambda - aA\Omega + a(y_c c_1 - x_c c_2) - \frac{a\lambda}{2}(x_c^2 + y_c^2) \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\varkappa = \frac{1}{ab - m^2 r^2}$ . Эти уравнения имеют интеграл энергии (3.4)

$$\begin{aligned} H &= 1/8 \left( a^2 (-2y_c c_1 + 2c_2 x_c + \lambda (x_c^2 + y_c^2)) + 2b\lambda a - 2a^2 c_3 - 3m^2 r^2 \lambda + 2a^2 A\Omega \right)^2 - \\ &\quad - 1/\varkappa \left[ a\lambda^2 mr (y_c \sin \alpha + x_c \cos \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + amr\lambda (-c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha) + (-a^2(c_2^2 + c_1^2) + \lambda (b\lambda a - 3m^2 r^2 \lambda - 2a^2 c_3 + 2a^2 A\Omega)) / 2 \right], \end{aligned}$$

сохраняют стандартную меру, а потому интегрируемы согласно теории последнего множителя Якоби. Заметим, что поверхности уровня  $H = \text{const}$  компактны, а касающееся их векторное поле (правые части уравнений (3.7)) не имеет в общем случае на них особых точек. Следовательно, эти поверхности — двумерные торы (рис. 4), на которых траектории системы (3.7) замкнуты или всюду плотны. Из компактности поверхностей уровня интеграла энергии следует, что при *постоянных*  $\lambda, \Omega$  траектории движения тела ограничены.



Отметим, что подобные системы в теории управления практически не изучены, поскольку управления в (3.7) кусочно-постоянны, и входящие в эти уравнения константы первых интегралов меняются при изменении управлений (каждый раз получаем, по сути, новую управляемую динамическую систему). Система (3.7) вполне управляема: стартовав из любой точки  $x_c, y_c, \alpha$ , можно попасть в любую другую. Действительно, при движении с постоянной циркуляцией ( $\lambda \neq 0, \Omega = 0$ ) траектория центра тела — окружность, при прохождении части такой окружности меняем циркуляцию на противоположную, тогда движемся по окружности, которая касается предыдущей; перемещаясь таким образом по дугам окружностей, можно привести центр тела в нужное положение с любой наперед заданной точностью, а затем, вращая маховик, сообщить телу требуемую ориентацию. Однако явное нахождение оптимальных управлений пока представляется возможным лишь численно.

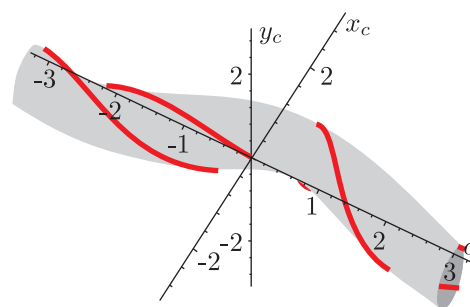


Рис. 4. Траектория системы (3.7) с нулевыми начальными условиями  $x_c(0) = 0, y_c(0) = 0, \alpha(0) = 0$  и  $c_i = 0$ .

#### 4. Численное решение задачи оптимального управления с помощью генетического алгоритма

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Требуется максимизировать перемещение за заданное время  $T_k$ , то есть

$$J(\lambda, \Omega) = ((x(T_k) - x_0)^2 + (y(T_k) - y_0)^2)^{0.5} \rightarrow \max. \quad (4.1)$$

Движение при этом должно происходить в установленном коридоре шириной  $2\delta$  и в направлении, определяемом углом  $\theta$ , что обеспечивается выполнением ограничений:

$$|-x(t) \sin \theta + y(t) \cos \theta| \leq \delta, \quad x(t) \cos \theta + y(t) \sin \theta \geq -\delta. \quad (4.2)$$

Дополнительно заданы ограничения на величины  $\lambda, \dot{\Omega}$ :

$$|\lambda(t) \leq \Lambda^{\max}|, \quad |\dot{\Omega}(t) \leq \dot{\Omega}^{\max}|. \quad (4.3)$$

Задача оптимального управления (4.1), (4.2), (4.3) сводится к задаче нелинейной условной оптимизации и решается с применением гибридного генетического алгоритма [2]. В общем случае дифференциальные уравнения заменяются дискретным аналогом и организуется последовательный процесс минимизации некоторой вспомогательной, изменяемой от шага к шагу функции многих переменных.

Задача решалась при следующих характеристиках движущегося объекта: форма тела — цилиндр с радиусом 1; плотность тела равна плотности жидкости; радиус маховика  $r = 0.5$ ; масса маховика равна массе тела;  $T_k = 10$ ;  $\theta = 1$ ;  $A = 100$ . Варьировалась ширина заданного коридора движения  $\delta$ . Малая величина  $\delta$  накладывает жесткие ограничения на продолжение движения, поэтому в расчетах могут реализовываться меньшие времена окончания движения, чем  $T_k$ . Управляющими функциями являются скорость вращения ротора, определяющая величину циркуляции вокруг тела, и скорость вращения маховика. Рассмотрены три вида управляющих воздействий: 1) непрерывные управления, задаваемые тригонометрическими функциями, 2) периодические управления с почти постоянной амплитудой, 3) кусочно-постоянные (дискретные) управления и 4) управления смешанного типа.



#### 4.1. Управления, задаваемые тригонометрическими функциями

Система уравнений (2.11), (2.2) с начальными условиями

$$u(0) = v(0) = \omega(0) = \alpha(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

решается численно по явной схеме Адамса с четвертым порядком точности на промежутке времени  $t \in [0, T_k]$  на сетке  $\left\{ t^n = n\Delta t, n = \overline{0, N}, \Delta t = \frac{T_k}{N} \right\}$ .

Для нахождения управляющих функций промежутки времени  $[0, T_k]$  делится на  $K$  сегментов длиной  $\tau$ . В реальном управлении движением рассматриваемого объекта скорости вращения ротора и маховика должны изменяться непрерывно. Поэтому управляющие функции целесообразно взять из класса тригонометрических функций. Функция вида

$$\lambda(t) = Z_j \sin \left( \pi \frac{t - j\tau}{\tau} \right), \quad j = \overline{0, K}, \quad (4.4)$$

обеспечивает увеличение циркуляции от нуля до значения  $Z_j$  на каждом сегменте с последующим замедлением к концу сегмента. Амплитуда  $Z_j$  является искомым управляющим параметром по циркуляции. Аналогично поступим со скоростью вращения маховика

$$\Omega(t) = W_j \frac{\tau}{\pi} \sin \left( \pi \frac{t - j\tau}{\tau} \right), \quad j = \overline{0, K}. \quad (4.5)$$

Кроме того, этим достигается конечное значение скорости вращения маховика, так как уравнения движения (2.11) содержат только ускорение  $\dot{\Omega}(t) = W_j \cos \left( \pi \frac{t - j\tau}{\tau} \right)$ , и при неперриодическом изменении управления  $\dot{\Omega}(t)$  возможно возрастание  $\Omega(t)$ .

Оптимальная траектория движения для  $\delta = 0.1$  приведена на рисунке 5. На врезке показан участок траектории в начале движения. Видно, что после выполнения разворота в заданном направлении траектория движения становится почти прямолинейной. Это достигается применением управлений  $\lambda(t)$ ,  $\Omega(t)$ , представленных на рисунке 6.

#### 4.2. Управление периодическими функциями с почти постоянной амплитудой

Увеличение ширины коридора до  $\delta = 10$  приводит к более широким возможностям по управлению объектом. Пройденная траектория представлена на рисунке 7 (линия 1), а оптимальные управляющие функции показаны на рисунке 8.

На приведенных рисунках видно, что траектория движения принимает упорядоченный вид и управления становятся близкими к периодическим с постоянной амплитудой. Тем не менее, замена управлений функциями  $\lambda(t) = Z \sin \left( 2\pi \frac{t}{\tau} \right)$ ,  $\Omega(t) = w \sin \left( 2\pi \frac{t}{\tau} \right)$  с постоянными амплитудами  $Z$ ,  $w$  приводит к тому, что рассчитанная траектория (линия 2 на рис. 7) не вписывается в заданный коридор движения. Разница между оптимальным управлением по циркуляции и управлением с постоянной амплитудой  $\Delta(t) = 10 \left( Z_j \sin \left( \pi \frac{t - j\tau}{\tau} \right) - Z \sin \left( 2\pi \frac{t}{\tau} \right) \right)$ ,  $j = \overline{0, K}$ , приведена на рисунке 8.

Значения составляющих скорости движения  $(u, v)$ , соответствующие оптимальной траектории, представлены на рисунке 9.

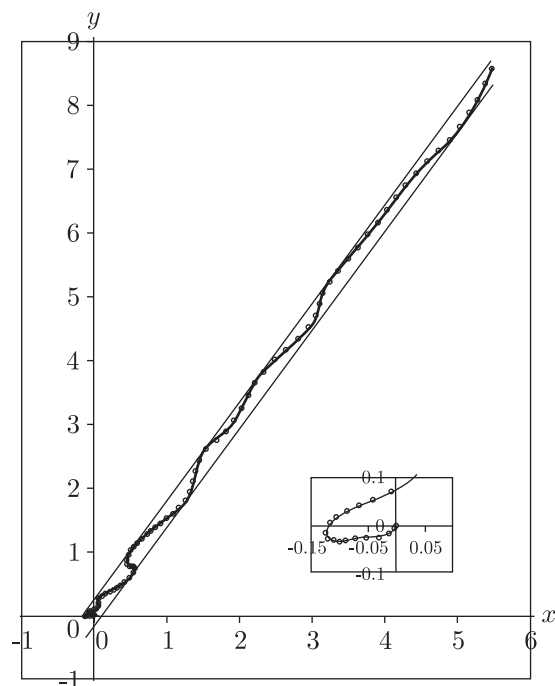


Рис. 5. Оптимальная траектория движения тела для управлений вида (4.4), (4.5). Ширина коридора  $2\delta = 0.2$ .

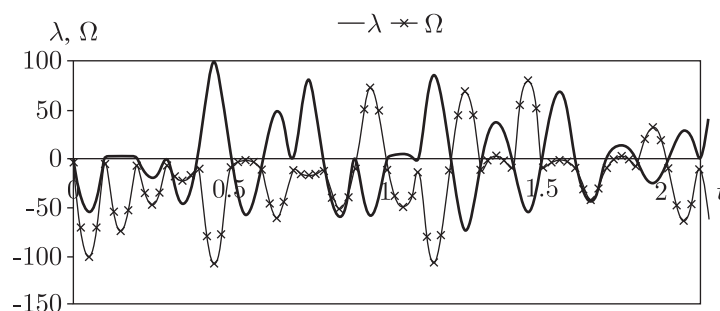


Рис. 6. Вид оптимального управления для траектории на рис. 5 (для выравнивания масштабов здесь приведен график функции  $\frac{\pi}{7}\Omega$ ).

Амплитуда скоростей увеличивается со временем. Здесь же показано изменение во времени модуля скорости  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$  и осредненного по времени модуля  $\langle V \rangle = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V dt$ . Среднее значение ускорения движения или тяги равно 10.1.

### 4.3. Кусочно-постоянное управление

Для оценки влияния способа задания управляющих функций рассмотрим дискретное (кусочно-постоянное) управление. В этом случае можно воспользоваться редуцированными уравнениями (3.7), что существенно упрощает анализ. Управляющие функции принимаются постоянными на каждом сегменте  $\Omega(t) = W_j$ ,  $\lambda(t) = Z_j$ ,  $j = \overline{0, K}$ , и оптимизация состоит в выборе констант  $Z_j$ ,  $W_j$ . Для полуширины коридора движения  $\delta = 0.5$  получены оптимальные управления для управляющих функций вида (4.4), (4.5) а затем для

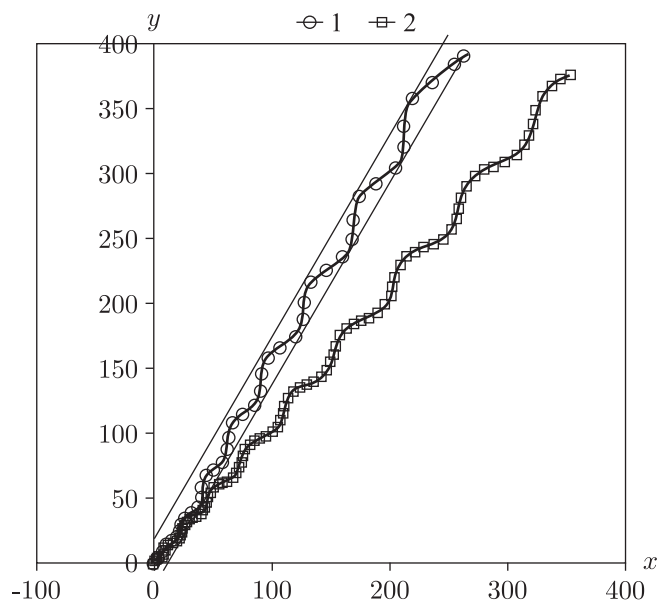


Рис. 7. Движение с управлением с небольшим изменением амплитуды (линия 1) и с постоянной амплитудой (линия 2), ширина коридора  $2\delta = 20$ .

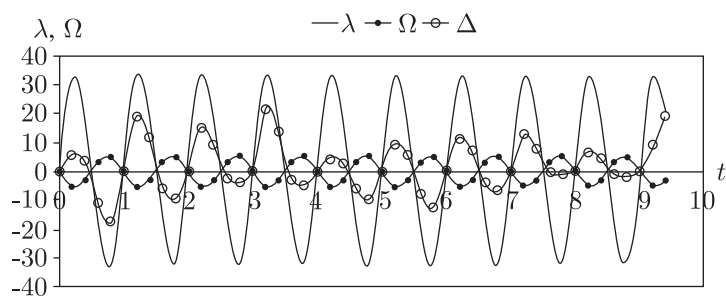


Рис. 8. Управления  $\lambda(t)$  и  $\Omega(t)$ , обеспечивающие движение в коридоре  $2\delta = 20$ . Линия  $\Delta(t)$  показывает разность между оптимальным управлением циркуляцией и управлением с постоянной амплитудой.

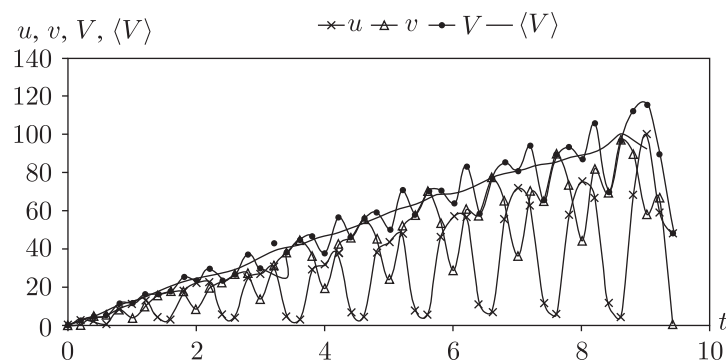


Рис. 9. Кинематические характеристики движения по оптимальной траектории в коридоре  $2\delta = 20$ .

кусочно-постоянных управлений. На рисунке 10 представлены зависимость 1, соответствующая циркуляции по первому варианту, и зависимость 2 для дискретного способа.

Соответствующие траектории показаны на рисунке 11.

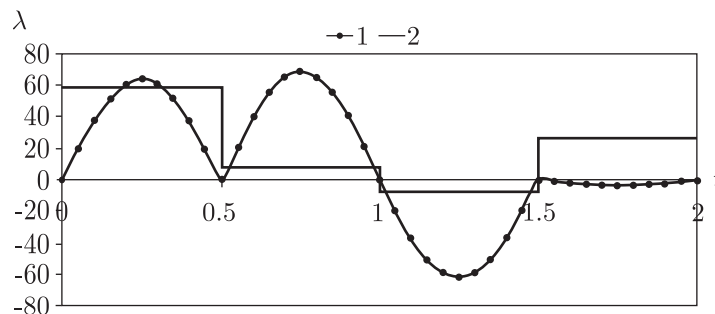


Рис. 10. Вид оптимальной зависимости  $\lambda(t)$  для непрерывного (линия 1) и дискретного (линия 2) вариантов управления при движении в коридоре ширины  $2\delta = 1$ .

В случае непрерывного управления пройденный путь оказался больше, чем путь для дискретного варианта.

#### 4.4. Управления смешанного вида

Рассмотрен еще один вариант управления. Для придания движения объекту маховик вращается на промежутке времени  $t \in [0; 1]$ , а затем скорость его вращения равна нулю:

$$\Omega(t) = \begin{cases} W_j \frac{\tau}{\pi} \sin\left(\pi \frac{t - j\tau}{\tau}\right), & t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Дальнейшее управление обеспечивается только циркуляцией  $\lambda(t)$ . В этом случае траектория движения утрачивает регулярный вид (рис. 12).

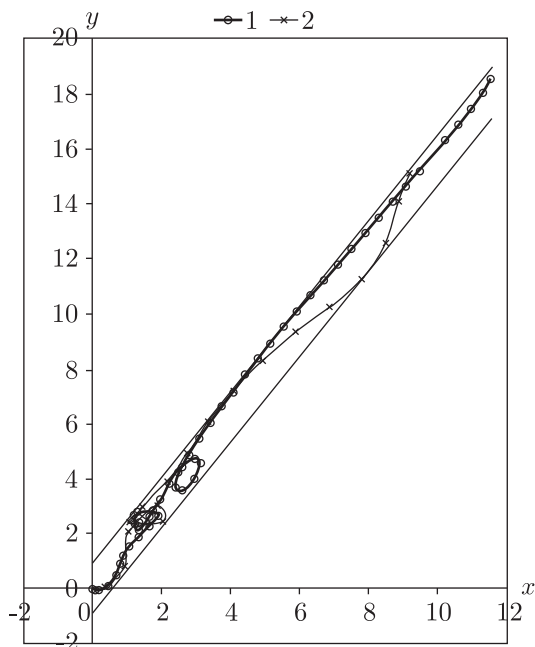


Рис. 11. Движения в коридоре ширины  $2\delta = 1$  для непрерывного (линия 1) и дискретного (линия 2) вариантов управлений.

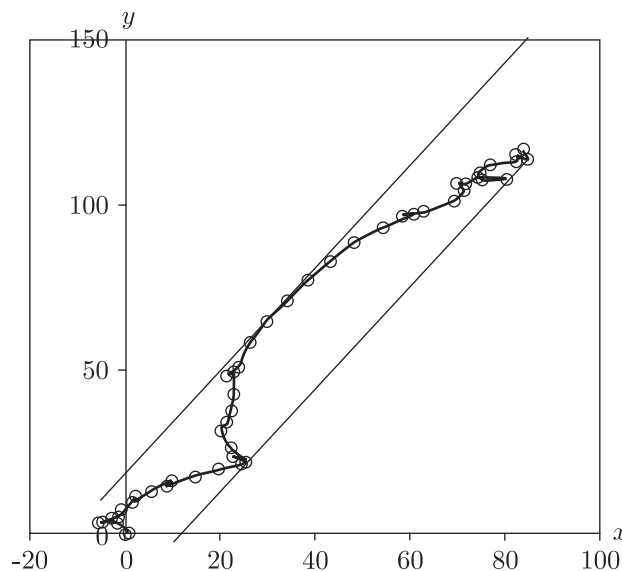


Рис. 12. Оптимальная траектория тела, управляемого лишь ротором Флеттнера. Скорость маховика, за исключением начального этапа движения, равна нулю.

Движение становится более хаотичным и направленной тяги не наблюдается.

В примерах рассматривается движение вдоль прямой  $y = \operatorname{tg}(\theta)x$  с  $\theta = 1$ . Угол  $\theta$  может быть произвольным. Результаты расчетов управления от направления движения зависят незначительно. Максимальные значения циркуляции  $\lambda$  находятся на уровне 30. Если оценивать циркуляцию по формуле  $\lambda = 2\pi\omega_f R_f^2$ , где  $\omega_f$ ,  $R_f$  — угловая скорость вращения ротора и его радиус, то при  $R_f = 0.3$  получаем  $\omega_f \approx 3000$  об/мин. Значения угловой скорости маховика  $\Omega$  на порядок меньше.

Анализ проведенных расчетов показывает, что полученные управления с помощью маховика и вращения ротора обеспечивают движение объекта в заданном направлении в достаточно узком коридоре. С увеличением ширины коридора движение и управления становятся близкими к периодическим с почти постоянной амплитудой.

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.—Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2005. 576 с.
- [2] Ветчанин Е. В., Тененев В. А. Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс // Компьютерные исследования и моделирование, 2011, т. 3, № 4, с. 371–381.
- [3] Воинов О. В. Инерциальное движение тела в идеальной жидкости из состояния покоя // ПМТФ, 2008, № 4, с. 214–219.
- [4] Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962. 404 с.
- [5] Козлов В. В. Общая теория вихрей. (Б-ка «R&C Dynamics», т. 4.) Ижевск: УдГУ, 1998. 238 с.
- [6] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ, 2001, т. 65, № 4, с. 592–601.
- [7] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: ГИТТЛ, 1955. 394 с.
- [8] Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М. Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ, 1962, № 4, с. 3–9.
- [9] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
- [10] Ращевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Учен. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук, 1938, № 2, с. 83–94.
- [11] Benjamin T. B., Ellis A. T. The collapse of cavitation bubbles and the pressure thereby produced against solid boundaries // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 1966, vol. 260, no. 1110, pp. 221–240.
- [12] Galper A., Miloh T. Self-propulsion of general deformable shapes in a perfect fluid // Proc. Roy. Soc. A, 1993, vol. 442, pp. 273–299.
- [13] Galper A., Miloh T. Dynamical equations for the motion of a rigid or deformable body in an arbitrary potential nonuniform flow field // J. Fluid Mech., 1995, vol. 295, pp. 91–120.
- [14] Galper A. R., Miloh T. Hydrodynamics and stability of a deformable body moving in the proximity of interfaces // Phys. Fluids, 1999, vol. 11, no. 4, pp. 795–806.
- [15] Kelly S. D., Hukkeri R. B. Mechanics, dynamics, and control of a single-input aquatic vehicle with variable coefficient of lift // IEEE Transactions on Robotics, 2006, vol. 22, no. 6, pp. 1254–1264.
- [16] Kuznetsov V. M., Lugovtsov B. A., Sher Y. N. On the motive mechanism of snakes and fish // Arch. Ration. Mech. Anal., 1967, vol. 25, no. 5, pp. 367–387.
- [17] Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 928 с.



- [18] Landweber L., Miloh T. The Lagally theorem for unsteady multipoles and deformable bodies // J. Fluid Mech., 1980, vol. 96, pp. 33–46.
- [19] Lighthill J. M. Note on swimming of slender fish // J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pp. 305–317.
- [20] Milne-Thomson L. M. Theoretical hydrodynamics. 4th ed. London: MacMillan, 1962. 660 pp.
- [21] Magnus H. G. Über die Abweichung der Geschosse // Poggendorff's Annalen der Physik u. Chemie, 1853, vol. 88, pp. 1–14.
- [22] Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: Т. 2. М: Наука, 1983. 544 с.
- [23] Saffman P. G. The self-propulsion of a deformable body in a perfect fluid // J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pp. 385–389.
- [24] Taylor G. I. Analysis of the swimming of microscopic organisms // Proc. Roy. Soc. A, 1951, vol. 209, pp. 447–461.
- [25] Taylor G. I. The action of waving cylindrical tails in propelling microscopic organisms // Proc. Roy. Soc. A, 1952, vol. 211, pp. 225–239.
- [26] Taylor G. I. Analysis of the swimming of long and narrow animals // Proc. Roy. Soc. A, 1952, vol. 214, pp. 158–183.
- [27] Wu T. Y. Swimming of a waving plate // J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, pp. 321–344.

### Self-propulsion of a body with rigid surface and variable coefficient of lift in a perfect fluid

Sergey M. Ramodanov<sup>1</sup>, Valentin A. Tenenev<sup>2</sup>, Dmitrii V. Treschev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Computer Science,

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>2</sup>Izhevsk State Technical University

Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069 Russia

<sup>3</sup>Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences

Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia

M. V. Lomonosov Moscow State University

Vorob'evy gory, Moscow, 119899, Russia

<sup>1</sup>ramodanov@mail.ru, <sup>2</sup>tenenev@istu.ru, <sup>3</sup>treschev@mi.ras.ru

We study the system of a 2D rigid body moving in an unbounded volume of incompressible, vortex-free perfect fluid which is at rest at infinity. The body is equipped with a gyrostat and a so-called *Flettner rotor*. Due to the latter the body is subject to a lifting force (Magnus effect). The rotational velocities of the gyrostat and the rotor are assumed to be known functions of time (control inputs). The equations of motion are represented in the form of the Kirchhoff equations. In the case of piecewise continuous controls, the integrals of motion are indicated. Using these integrals we obtain a (reduced) system of first-order differential equations on the configuration space. An optimal control problem for several types of the inputs is then solved using genetic algorithms.

MSC 2010: 70Hxx, 70G65

Keywords: perfect fluid, self-propulsion, Flettner rotor

Received September 1, 2011, accepted September 24, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 799–813 (Russian)