



УДК: 517.925 + 517.93
MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35

Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике «КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ»

С. П. Кузнецов, А. Ю. Жалнин, И. Р. Сатаев, Ю. В. Седова

Проведено численное исследование движения «кельтского камня» — твердого тела с выпуклой поверхностью — на шероховатой горизонтальной плоскости, в зависимости от параметров, с привлечением методов, использовавшихся ранее для анализа диссипативных систем и адаптированных применительно к неголономной механической модели. Построены и интерпретированы карты динамических режимов на плоскости параметров — полной механической энергии и угла относительного поворота геометрических и динамических главных осей твердого тела. Отмечено присутствие характерных образований в пространстве параметров, наблюдавшихся ранее только для диссипативных систем. Разработана и реализована методика вычисления полного спектра показателей Ляпунова. Показано, что на основе анализа показателей Ляпунова среди хаотических режимов динамики неголономной модели выделяются два класса, первый из которых характерен для области относительно больших, а второй — для области относительно малых значений энергии. Для системы, редуцированной к трехмерному отображению, первый отвечает странному аттрактору с одним положительным и двумя отрицательными показателями Ляпунова, а второй —

Получено 9 сентября 2012 года
После доработки 16 октября 2012 года

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации по государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (УдГУ, договор № 11.G34.31.0039).

Кузнецов Сергей Петрович
spkuz@yandex.ru
Жалнин Алексей Юрьевич
jalnine@rambler.ru
Сатаев Игорь Рустамович
sataevir@rambler.ru
Седова Юлия Викторовна
sedovayv@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

хаотической динамике квазиконсервативного типа, с близкими по абсолютной величине положительным и отрицательным показателями, и приблизительно нулевым оставшимся показателем. Проиллюстрирован переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, причем наблюдаемые закономерности масштабного подобия соответствуют тем, которые были установлены для диссипативных систем. Проведено исследование странных аттракторов — представлены фазовые портреты, показатели Ляпунова, спектры Фурье, результаты вычисления фрактальной размерности.

Ключевые слова: кельтский камень, динамика твердого тела, неголономная механика, странный аттрактор, показатель Ляпунова, бифуркация, фрактальная размерность

1. Введение

В теории динамических систем традиционно выделяют два класса объектов, демонстрирующих принципиально разные типы поведения, — консервативные и диссипативные системы. В физике термин «консервативные» понимают как обеспечивающие сохранение энергии, ассоциирующейся с принятыми во внимание динамическими переменными. Например, механические системы без трения, допускающие описание в рамках формализма Лагранжа и Гамильтона, относятся к классу консервативных систем [1, 2]. При наличии трения они превращаются в диссипативные системы [2].

Представим себе ансамбль объектов, идентичных анализируемой системе и различающихся только начальными условиями. Ему отвечает облако изображающих точек в пространстве состояний (фазовом пространстве), которое с течением времени претерпевает трансформацию соответственно динамике составляющих его точек, определенной заданным для анализируемой системы правилом эволюции. Если каждый элемент этого облака с течением времени сохраняет свой объем неизменным (по крайней мере, при описании в выбранных определенным образом переменных), то это случай консервативной системы. Для диссипативной системы фазовый объем по ходу эволюции во времени уменьшается, и облако в пространстве состояний оседает в итоге на некоторое подмножество, которое называется аттрактором.

В механике, однако, помимо систем, допускающих описание в рамках лагранжева и гамильтонова формализма, существует еще класс систем с неголономными связями, или, более коротко, *неголономных систем* (собственно термин введен Генрихом Герцем в XIX веке) [3–6]. К этому классу относятся многие задачи, имеющие важное практическое значение, например, в механике передвижных и летательных аппаратов, робототехнике. История изучения этих систем богата драматическими моментами, в том числе ошибками, которые совершались видными исследователями, и лишь затем были исправлены в ходе дальнейшего более тщательного анализа.

В целом класс неголономных систем чрезвычайно широк. В нем имеет место иерархия динамического поведения, подразумевающая систематизацию ситуаций от интегрируемых до не интегрируемых, в зависимости от количества присущих задаче инвариантов и симметрий, от наличия или отсутствия инвариантной меры [3–6].

К граничной ситуации максимальной неинтегрируемости относится задача о *кельтском камне*, состоящая в изучении движения твердого тела с выпуклой гладкой поверхностью на шероховатой плоскости. При этом трение присутствует, но не способно совершать работу, а значит, изменять механическую энергию. Примечательно, что эта и подобные

ей неголономные системы занимают в своем роде промежуточное положение между системами консервативными и диссипативными в традиционной трактовке. Хотя сохранение механической энергии имеет место, но свойство сохранения фазового объема отсутствует: локально в пространстве состояний элемент объема в процессе эволюции во времени может претерпевать в одних местах сжатие, а в других — растяжение. Рассматривая движение на гиперповерхности постоянной энергии в фазовом пространстве, в такой ситуации оказывается возможным наблюдать феномены, специфические, казалось бы, только для диссипативной динамики, такие как притягивающие неподвижные точки и предельные циклы [4]. Принципиально важный шаг сделан в работе [5], где впервые указана возможность реализации в неголономных системах притягивающих инвариантных множеств с хаотической динамикой — странных аттракторов. Стоит подчеркнуть, что в фазовом пространстве неголономной системы для каждого притягивающего множества имеется симметричный партнер — объект, составленный из траекторий с точно таким же поведением, но в обратном времени. Кроме того, возможны динамические режимы, которые обладают симметрией по отношению к обращению времени, в том числе хаотические режимы, которые называют *смешанной динамикой* [7, 8].

В связи со сказанным, естественным образом возникает программа исследований, состоящая в выявлении и классификации типов динамического поведения неголономных моделей, в частности, в установлении возможности реализации в них всей совокупности феноменов, характерных для диссипативных систем [9–12]. Интересно было бы отыскать примеры различных конкретных типов бифуркаций, мультистабильности, синхронизации, квазипериодических режимов, хаотических и нехаотических странных аттракторов, гиперболического хаоса. В этом плане для исследования неголономных систем, таких как модель кельтского камня, целесообразно обратиться к компьютерным методикам, наработанным для диссипативных систем, включающих вычисление показателей Ляпунова, размерностей аттракторов, построение диаграмм в виде «бифуркационных деревьев», спектральный анализ. Поскольку требуется изучать режимы и бифуркации в зависимости от большого числа параметров, полезным будет использование техники графического представления пространства параметров в виде карт динамических режимов, карт показателей Ляпунова, карт торов [12–15]. В качестве одного из основных параметров для данного класса систем выступает присущая каждому конкретному режиму движения величина сохраняющейся механической энергии.

2. Кельтский камень: постановка задачи

Рассмотрим твердое тело массы $m = 1$ с гладкой поверхностью выпуклой формы, совершающее механическое движение на плоскости. Сила тяжести считается направленной перпендикулярно к плоскости и характеризуется ускорением свободного падения g_0 . Движение таково, что в каждый момент имеет место единственная точка контакта с плоскостью, причем скорость этой точки всегда остается нулевой. Предполагается, что в области, где может располагаться точка контакта, поверхность тела имеет вид эллиптического параболоида, причем два главных радиуса кривизны у его вершины (обращенной вниз) заданы константами a_1 и a_2 . Расстояние центра масс от вершины параболоида дается параметром h .

Уравнения движения формулируются относительно составляющих вектора момента импульса тела $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$, определенных в системе координат, жестко связанной с твердым телом, и составляющих ортогонального к плоскости вектора $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, опре-

деленных также в системе координат, фиксированной относительно твердого тела. С учетом условия нулевой скорости в точке контакта уравнения имеют вид [4–6, 8]

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= M_2\omega_3 - M_3\omega_2 + \omega_1\rho - r_1\omega_r + g_0(r_2\gamma_3 - \gamma_3r_2), \\ \dot{M}_2 &= M_3\omega_1 - M_1\omega_3 + \omega_2\rho - r_2\omega_r + g_0(r_3\gamma_1 - \gamma_1r_3), \\ \dot{M}_3 &= M_1\omega_2 - M_2\omega_1 + \omega_3\rho - r_3\omega_r + g_0(r_1\gamma_2 - \gamma_2r_1), \\ \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3, \\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Наряду с динамическими переменными, относительно которых записаны уравнения, в правых частях использованы выражающиеся через них вспомогательные переменные

$$r_1 = -a_1\gamma_1/\gamma_3, \quad r_2 = -a_2\gamma_2/\gamma_3, \quad r_3 = -h + \frac{1}{2}(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2)/\gamma_3^2, \quad (2.2)$$

которые задают координаты центра масс тела относительно точки контакта, и компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, определяемые через составляющие момента импульса \mathbf{M} и вектора $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ из решения системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta + r_2^2 + r_3^2 & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta - r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta - r_2 r_1 & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta + r_3^2 + r_1^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_3 r_2 & I_3 + r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где δ имеет смысл угла между динамическими и геометрическими главными осями. Кроме того, в правых частях присутствуют величины

$$\begin{aligned} \rho &= r_1\dot{r}_1 + r_2\dot{r}_2 + r_3\dot{r}_3, \\ \dot{r}_1 &= -a_1[(\gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2)\gamma_3 - (\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1)\gamma_1]/\gamma_3^2, \\ \dot{r}_2 &= -a_2[(\gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3)\gamma_3 - (\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1)\gamma_2]/\gamma_3^2, \\ \dot{r}_3 &= [a_1\gamma_1(\gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2) + a_2\gamma_2(\gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3)]/\gamma_3^2 - (a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2)(\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1)/\gamma_3^3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу наличия у системы интеграла энергии

$$E = \frac{1}{2}(M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3) - g_0(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + r_3\gamma_3) \quad (2.5)$$

и геометрического интеграла

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (2.6)$$

динамика в шестимерном пространстве состояний $(M_1, M_2, M_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ осуществляется на четырехмерной гиперповерхности. При описании, опирающемся на использование сечения Пуанкаре [7–10], задача сводится к анализу трехмерного отображения.

Система обладает симметрией относительно обращения времени

$$t \leftrightarrow -t, \quad M_1 \leftrightarrow -M_1, \quad M_2 \leftrightarrow -M_2, \quad M_3 \leftrightarrow -M_3, \quad \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_1, \quad \gamma_2 \leftrightarrow \gamma_2, \quad \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_3, \quad (2.7)$$

а также относительно замены

$$t \leftrightarrow t, \quad M_1 \leftrightarrow -M_1, \quad M_2 \leftrightarrow -M_2, \quad M_3 \leftrightarrow M_3, \quad \gamma_1 \leftrightarrow -\gamma_1, \quad \gamma_2 \leftrightarrow -\gamma_2, \quad \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_3, \quad (2.8)$$

что полезно учитывать при анализе.



Для изучения различных типов динамического поведения и графического представления результатов удобны так называемые *переменные Андуайе–Денри* [4–6, 8]. Поскольку при их введении наличие геометрического интеграла принято во внимание с самого начала, общее количество переменных уменьшается на единицу и равно пяти. Переход к этим переменным производится посредством соотношений

$$\begin{aligned} L &= M_3, \\ G &= \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, \\ l &= \arg(M_2 + iM_1), \\ H &= M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3, \\ g &= \arg[HL/G - G\gamma_3 + i(M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обратный переход определяется выражениями

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \\ M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \\ M_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \left[(H/L)\sqrt{1 - L^2/G^2} + (L/G)\sqrt{1 - H^2/G^2} \cos g \right] \sin l + \sqrt{1 - H^2/G^2} \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \left[(H/L)\sqrt{1 - L^2/G^2} + (L/G)\sqrt{1 - H^2/G^2} \cos g \right] \cos l - \sqrt{1 - H^2/G^2} \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= HL/G^2 - \sqrt{1 - L^2/G^2} \sqrt{1 - H^2/G^2} \cos g. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для построения сечения Пуанкаре в работах [4–6] предложено использовать поверхность $g = \text{const}$. Если взять константу нулевой, то, как видно из (2.10), в исходных переменных сечение можно определить условием

$$q = M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2 = 0. \quad (2.11)$$

3. Методика численного решения

Система дифференциальных уравнений (2.1) решается численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [16]. На каждом шаге для вычисления правых частей применяются соотношения (2.2), производится решение линейной системы трех алгебраических уравнений (2.3) относительно составляющих вектора угловой скорости и вычисление дополнительных величин, определяемых формулами (2.4).

Проведенные тесты подтверждают, что при численном интегрировании уравнений сохранение интегралов движения (2.5) и (2.6) обеспечивается с высокой точностью. Тем не менее, в некоторых случаях (например, при вычислении показателей Ляпунова, см. ниже) полезно предусмотреть на каждом шаге разностной схемы приведение вектора γ к единичной норме, а составляющих вектора момента импульса \mathbf{M} — к величинам, обеспечивающим

фиксированное заданное значение энергии E . Для этого используются формулы

$$\gamma_i := \frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}}, \quad k = i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

и

$$M_i := M_i \sqrt{2 \frac{E + g_0(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + r_3\gamma_3)}{M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

(Последняя процедура опускается в тех исключительных случаях, когда из-за погрешности вычислений числитель подкоренного выражения (3.2) оказывается отрицательным или близким к нулю.)

Вычисление отображения Пуанкаре реализовано в виде специальной подпрограммы. Для построения сечения Пуанкаре в соответствии с условием (2.11) используется метод Эно [12, 17], а именно: при обнаружении в процессе вычислений такой ситуации, что перед очередным шагом $q > 0$, а после него $q < 0$, с помощью того же разностного метода делается дополнительный шаг, на котором за независимую переменную принимается q , а величина шага дается полученным перед этим значением q с обратным знаком. Это обеспечивает возвращение изображающей точки на секущую Пуанкаре, притом согласованное по точности с используемой разностной схемой.

Для построения карты динамических режимов [12, 13] производится сканирование плоскости параметров путем перебора узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 10^3 итераций отображения Пуанкаре, и по результатам последних шагов итераций проводится анализ на предмет наличия периода повторения от 1 до 14 с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается определенным цветом, и производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. При этом в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что в большинстве случаев способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики.

Обсудим процедуру вычисления спектра показателей Ляпунова [18, 12].

Если говорить об исходной системе (2.1), то у нее шесть показателей Ляпунова, три из которых нулевые. Один нулевой показатель ассоциируется с инфинитезимальным возмущением, направленным вдоль опорной траектории, то есть с возмущением типа сдвига по времени, а два другие — с возмущениями типа сдвига по энергии и по норме вектора γ . Остается три подлежащих вычислению нетривиальных показателя.

Если определять показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре, то один нулевой показатель сразу устраняется из рассмотрения. Два других нулевых показателя можно исключить, если при каждом обращении к процедуре вычисления отображения Пуанкаре использовать упомянутую выше нормировку вектора γ на единицу и вектора момента к величине, обеспечивающей заданное значение полной механической энергии.

Необходимость дополнительных преобразований в процессе вычислений и определенная сложность исходных уравнений, включающих множество вспомогательных величин (см. (2.2)–(2.4)), делает предпочтительным вариант методики расчета показателей Ляпунова, не использующий линеаризованных уравнений в вариациях, а именно: при заданных параметрах и начальных условиях с применением подпрограммы вычисления отображения Пуанкаре (с нормировкой вектора γ и вектора момента) выполняем совместно итерации

для четырех состояний с одинаковой энергией, одно из которых отвечает опорной траектории, а три другие — слабо возмущенным относительно него состояниям. После каждой итерации для трех векторов возмущения производится ортогонализация по Граму – Шмидту и приведение к заданной малой фиксированной норме, после чего для продолжения расчетов используются переопределенные векторы возмущения. Три показателя Ляпунова получаются как коэффициенты, характеризующие нарастание или убывание накапливающихся сумм логарифмов отношения норм (после ортогонализации, но до перенормировки) к исходным значениям.

Чтобы определить погрешность оценки показателей Ляпунова при численных расчетах, уместно использовать статистическую обработку, подобную принятой в физике и других дисциплинах при экспериментальном определении величин в присутствии ошибок измерения [19]. Для этого процедура вычисления показателей выполняется многократно, скажем, для последовательно проходимых участков одной и той же траектории, занимающих одинаковое время или одно и то же число итераций отображения Пуанкаре. Полученный набор значений рассматривается как выборка случайной величины, для которой рассчитывается среднее значение (оценка математического ожидания) и выборочная дисперсия. В качестве погрешности вычислений разумно использовать полученное отсюда среднеквадратичное отклонение — квадратный корень из выборочной дисперсии (примеры см. в разделе 6). Могут привлекаться и другие проработанные в математической статистике инструменты (квантили, доверительный интервал, критерий Стьюдента), но это имеет смысл, по-видимому, только в контексте исследований, специально ориентированных на анализ статистических свойств ляпуновских характеристик.

Наличие хотя бы одного положительного показателя Ляпунова свидетельствует о хаотической природе анализируемого динамического режима. Если сумма всех трех показателей отрицательная, то речь идет о странном хаотическом аттракторе, а если она близка к нулю, то эту ситуацию мы интерпретируем как квазиконсервативный хаос, специальной четко определенной разновидностью которого является упомянутая выше смешанная динамика [7, 8].

4. Численные результаты: воспроизведение предыдущих исследований

Чтобы установить соответствие с предыдущими исследованиями [5, 6, 8], приведем иллюстративные результаты расчетов для модели кельтского камня, у которого соприкасающаяся с плоскостью поверхность имеет вид эллиптического параболоида. Главные радиусы кривизны у вершины $a_1 = 9$, $a_2 = 4$. Расстояние от вершины до центра масс $h = 1$, ускорение свободного падения $g_0 = 100$, величины момента инерции по главным осям $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, угол $\delta = 0.2$.

На рисунке 1 показана диаграмма, полученная итерациями отображения Пуанкаре на компьютере при $E = 555$, причем сечение Пуанкаре задается условием (2.11), а для графического представления использованы переменные Андуайе – Дебри. Рисунок воспроизводит со всеми деталями диаграмму из статьи [5] (рис. 8а), что подтверждает корректность расчетов и работоспособность программы.

Рисунок 2 иллюстрирует один из интригующих феноменов, характерных для динамики кельтского камня, — явление реверса. Здесь приводятся полученные в численных расчетах зависимости от времени для трех составляющих вектора угловой скорости от времени, при-

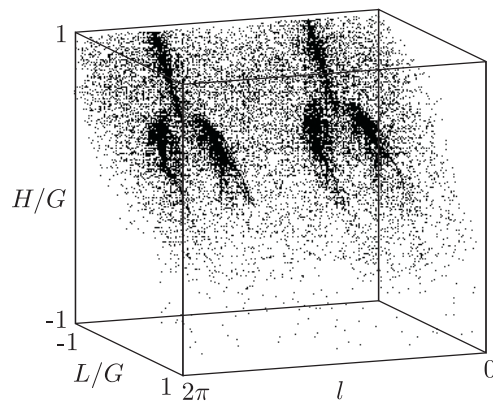


Рис. 1. Представление динамики в переменных Андуйе – Дебри в стробоскопическом сечении трехмерного отображения Пуанкаре для кельтского камня, имеющего форму эллиптического параболоида, для параметров $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0.2$ при энергии $E = 555$.

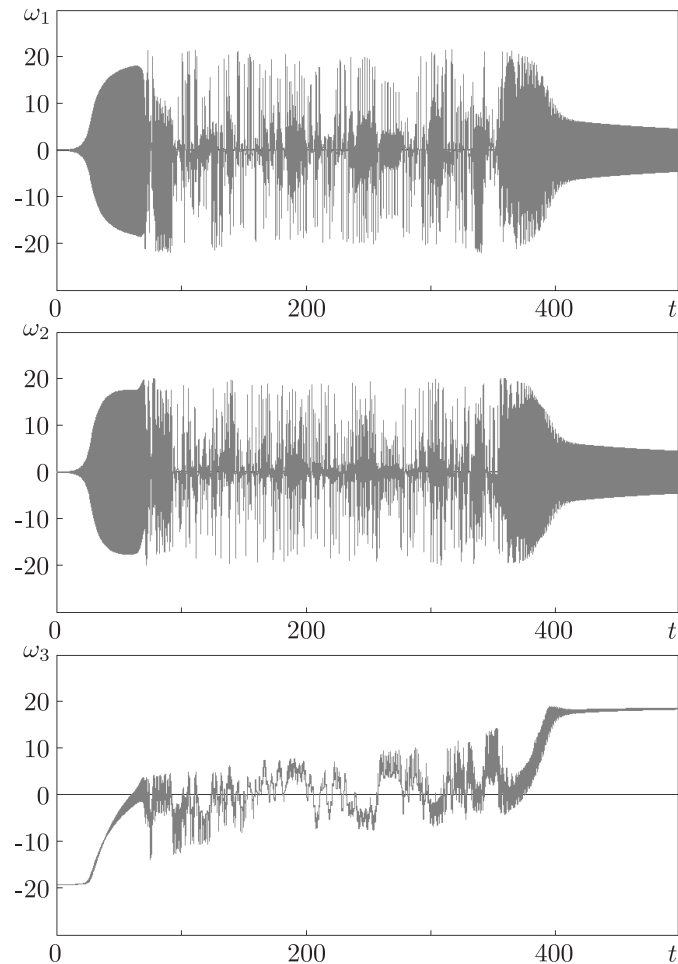


Рис. 2. Зависимости компонент угловой скорости от времени, иллюстрирующие эффект реверса: после переходного процесса направление вращения, то есть составляющая ω_3 , меняет знак на противоположный. Параметр энергии $E = 1380$, остальные параметры $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0.2$.

чем начальное состояние приблизительно соответствует вращению вокруг вертикальной оси в «неподходящем» направлении. Значение энергии $E = 1380$, остальные параметры те же, что на предыдущем рисунке. Можно видеть, что малые возмущения исходного состояния дают начало развитию сложного переходного процесса, в ходе которого возникают колебания относительно двух других координатных осей. В дальнейшем эти колебания трансформируют движение так, что направление вращения тела вокруг третьей оси изменяется на противоположное, что отвечает смене знака ω_3 .

На рисунке 3 приводятся портреты динамических режимов в переменных Андуайе–Депри для иллюстрации соответствия с численными результатами работы [8]. Для каждого режима в подписи приведен спектр показателей Ляпунова для аттрактора трехмерного отображения Пуанкаре (редуцированного к фиксированной энергии). Объекты, изображенные синим цветом, — это аттракторы, а красным цветом показаны объекты, симметричные аттракторам относительно операции обращения времени (2.7).

Диаграмма (a) отвечает режиму при $E = 170$, близкому к ситуации КАМ-торов (см. [1]), когда все три показателя Ляпунова близки к нулю. Диаграммы (b) и (c) отвечают «смешанным режимам» [7, 8], или квазиконсервативному хаосу: положительный и отрицательный показатели Ляпунова практически совпадают по абсолютной величине, а оставшийся показатель близок к нулю. Диаграмма (d) относится к хаотическому аттрактору спирального типа по классификации [8]: имеется положительный показатель Ляпунова и два отрицательных, причем сумма всех показателей отрицательная. Диаграмма (e) отвечает периодическому режиму — циклу; в отличие от прочих графиков, здесь показаны фазовые траектории в непрерывном времени. Синяя кривая соответствует аттрактору, имеющему три отрицательных показателя Ляпунова, а красная — его симметричному партнеру, репеллеру с тремя положительными показателями. Наконец, диаграмма (f) относится к режиму, представленному на рисунке 1, но кроме аттрактора, показанного синим, здесь также изображен красным цветом его симметричный партнер. Судя по спектру показателей Ляпунова, режим близок к квазиконсервативному хаосу, но из графика очевидно заметное разделение аттрактора и репеллера, не образующих в данном случае единый, симметричный относительно обращения времени объект.

5. Карта режимов, бифуркационные диаграммы, показатели Ляпунова

Для более подробного рассмотрения динамики в зависимости от параметров обратимся к случаю, когда главные моменты инерции кельтского камня с поверхностью в виде эллиптического параболоида равны $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$; при этом, согласно результатам работы [6], картина динамического поведения при вариации оставшихся параметров весьма богатая.¹

На рисунке 4 показана карта динамических режимов для отображения Пуанкаре рассматриваемой системы. По горизонтальной оси отложена энергия E , а по вертикальной — параметр δ , задающий угол поворота осей инерции относительно геометрических осей. При

¹Указанный выбор параметров отвечает особой ситуации, когда «тяжелая» часть кельтского камня имеет вид тонкой пластины, прикрепленной к невесомому телу вышуклой формы, обеспечивающему нужные геометрические свойства; «неравенство треугольника», которому должны удовлетворять компоненты матрицы момента инерции в диагональном представлении, в этом случае вырождается в равенство.

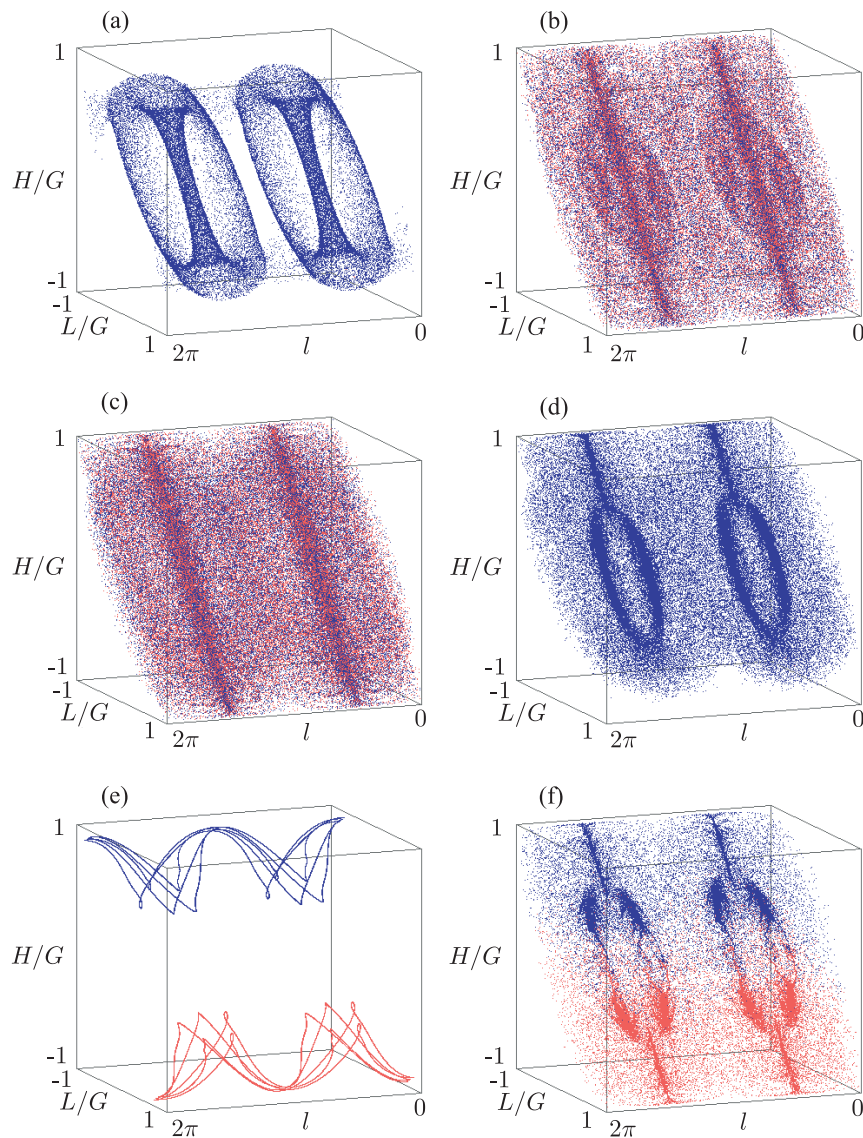


Рис. 3. Иллюстрации динамических режимов для кельтского камня с параметрами $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0.2$ при различных значениях энергии, соответствующих диаграммам в работе [6]:

- (a) $E = 170$, режим близкий к ситуации КАМ-торов, $\Lambda = (0.002, -0.000, -0.002)$,
 (b) $E = 220$, «смешанный режим», или квазиконсервативный хаос, $\Lambda = (0.028, -0.000, -0.028)$,
 (c) $E = 320$, «смешанный режим», или квазиконсервативный хаос, $\Lambda = (0.107, 0.000, -0.108)$,
 (d) $E = 470$, режим, классифицированный в [6] как спиральный аттрактор, $\Lambda = (0.184, -0.0002, -0.190)$,
 (e) $E = 510$, устойчивый цикл периода 5, $\Lambda = (-0.005, -0.015, -0.015)$, и его симметричный партнер,
 (f) $E = 555$, хаотический аттрактор, $\Lambda = (0.109, -0.007, -0.123)$, и его симметричный партнер.

Синие^a точки отвечают аттракторам, а красные — предельным режимам при динамике в обратном времени, симметричным аттракторам относительно замены (2.7). Все диаграммы представлены в переменных Андуайе–Депри для отображения Пуанкаре, кроме диаграммы (e), где показаны точки на каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений.

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/2069/0>

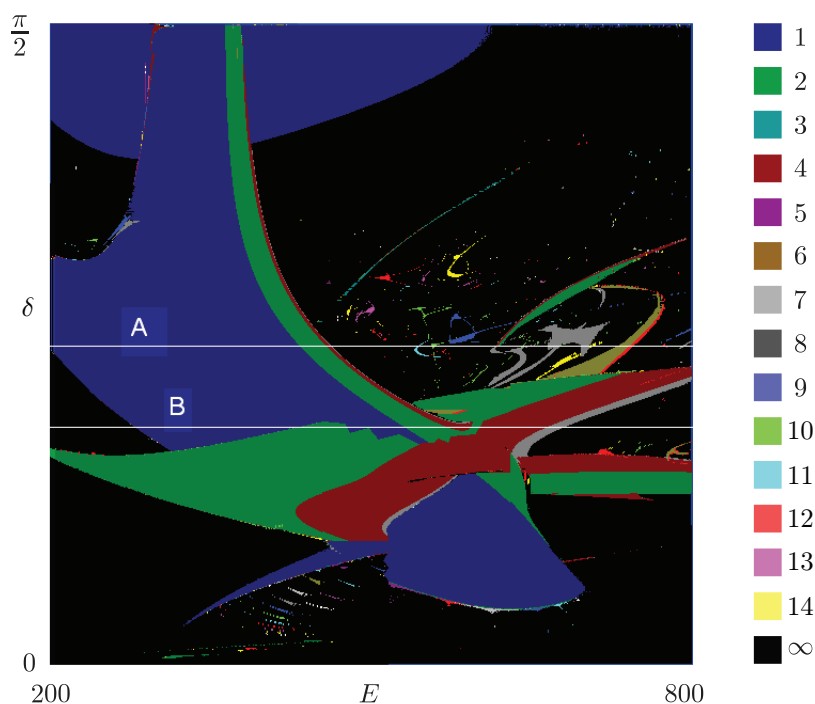


Рис. 4. Карта динамических режимов кельтского камня в виде эллиптического параболоида на плоскости параметров для отображения Пуанкаре. По горизонтали оси отложена энергия E , а по вертикали угол поворота осей инерции относительно геометрических осей δ . Остальные параметры: $I_1 = 1, I_2 = 6, I_3 = 7, g_0 = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1$. Горизонтальные линии А и В отвечают движению по параметру E при построении диаграмм на рисунках 5 и 6 соответственно.

построения карты использованы результаты сканирования с наследованием в направлениях слева направо и снизу вверх. Используется правило кодирования периодов движений цветами в соответствии с приведенной в правой части рисунка расшифровкой, причем период определяется отслеживанием динамики составляющей момента импульса M_3 .

Черный цвет означает отсутствие идентифицированного с определенностью периода; соответствующие области могут отвечать хаотическим или квазипериодическим режимам динамики.

Обширные области в левой и верхней части диаграммы, обозначенные синим цветом, то есть идентифицированные как области периода 1 для переменной M_3 , с точки зрения динамики полного состояния системы (M, γ) , отвечают режиму периода 2, но это цикл, симметричный относительно замены (2.8). Таким образом, переход через границу из синей в зеленую область отвечает фактически не удвоению периода, а бифуркации потери симметрии.

Характерное окаймление черных хаотических областей сужающимися полосами (зеленый–красный–серый цвет) отвечает последовательности бифуркаций удвоения периода, накапливающихся к границе хаоса. Внутри черной области, занимающей центральную часть карты, можно видеть множество характерных небольших по размерам областей (*shrimps* — «креветки» по терминологии Галласа [20]). Наличие этих областей — признак негиперболической природы хаоса, подобной той, какая имеет место в диссипативных системах, в том числе в отображениях Эно и Икеды [12, 21].

Область в середине нижней части карты, где можно видеть систему отделенных друг от друга цветных полос, отвечает квазипериодической динамике, а цветные полосы, «язы-

ки» — режимам синхронизации колебательных составляющих с рациональными отношениями частот. (Примеры квазипериодических режимов в этой области см. ниже, при обсуждении рисунка 6.)

Две горизонтальные линии А и В на рисунке 4 отвечают однопараметрическим бифуркационным диаграммам и графикам зависимости показателей Ляпунова от параметра E на рисунках 5 и 6. На верхних диаграммах по вертикальной оси отложены значения составляющей момента импульса M_1 в момент прохождения секущей Пуанкаре при каждом заданном значении энергии E , которые отложены по горизонтальной оси. Вторая диаграмма аналогична, но построена для составляющей момента импульса M_3 . При проведении вычислений величина энергии изменяется шаг за шагом, и при новом ее значении начальные условия для итераций задаются состоянием, найденным из финального состояния при предыдущем значении энергии пропорциональным пересчетом компонент момента импульса (см. (3.2)). Приводятся данные, полученные при сканировании слева направо (черным цветом) и справа налево (красным цветом) в тех местах, где установившийся режим оказывается иным, нежели при исходном направлении сканирования. Несовпадение режимов, наблюдаемых в одном и другом случае, свидетельствует о наличии мультистабильности, когда при одних и тех же параметрах системы могут возникать два (или более) аттракторов в зависимости от конкретных начальных условий. Каждый из сосуществующих аттракторов имеет свой бассейн в пространстве состояний — множество начальных точек, стартуя из которых фазовые траектории приходят к данному аттрактору.

В левой части диаграммы на рисунке 6 реализуется хаотическая динамика, о чем свидетельствует наличие положительного показателя Ляпунова. Второй показатель близок к нулю, а третий, отрицательный, близок по абсолютной величине к первому показателю. Такой спектр показателей Ляпунова говорит о близости динамического режима в этой области к квазиконсервативному хаосу. Было бы неправильно утверждать, что во всей этой области образом режима динамики в фазовом пространстве служит объект, инвариантный относительно обращения времени, но можно сказать, тем не менее, что в фазовом пространстве области, отвечающие за предельное поведение траекторий в прямом и обратном времени, не сильно разделены.

На рисунке 6 в левой части диаграммы и на рисунке 5 в центральной части имеют место области периодической динамики, которым отвечает наличие конечного числа ветвей, в количестве, определяемом периодом данного режима при итерациях отображения Пуанкаре. В области периодической динамики можно отметить упоминавшуюся выше мультистабильность и связанный с ней эффект гистерезиса — зависимость финального состояния системы от пути, которым к нему пришли (двигаясь слева направо или справа налево), что выражается в несовпадении черных и красных линий. Можно видеть бифуркации удвоения периода, когда каждая ветвь претерпевает раздвоение, с возникновением периода 4 и 8. В момент такой бифуркации старший показатель Ляпунова обращается в нуль, что также видно на рисунке. Переход к хаосу (по крайней мере, на показанных диаграммах) не такой, как для одномерных отображений: вместо постепенного нарастания нерегулярной составляющей при изменении параметра возникает сразу достаточно интенсивный хаос (возможность такой ситуации отмечена также в [7]).

В правой части диаграмм хаотический режим заведомо не близок к квазиконсервативному хаосу и должен интерпретироваться как ассоциирующийся со странным аттрактором. Об этом свидетельствует характер спектра показателей Ляпунова: имеется один положительный и два отрицательных показателя для отображения Пуанкаре и хорошо определена размерность аттрактора по Каплану–Йорке [11, 12, 28]. Аттрактор заведомо не гиперболи-

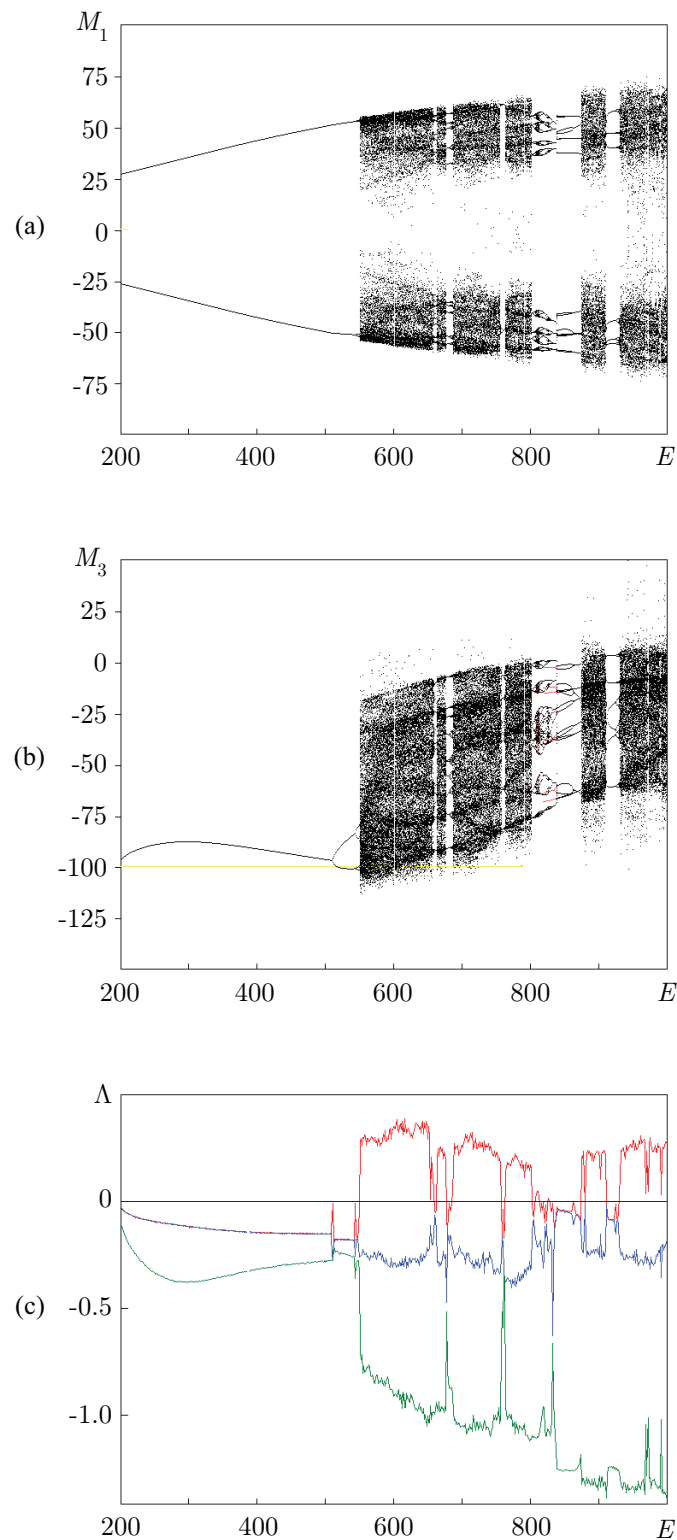


Рис. 5. Бифуркационное дерево (а), (b) и график трех показателей Ляпунова (с) для трехмерного отображения Пуанкаре системы (2.1) при параметрах $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = \pi/4$. Сканирование по параметру энергии E справа налево с наследованием начальных условий, за исключением показанных красным цветом ветвей дерева, которые получаются сканированием справа налево.

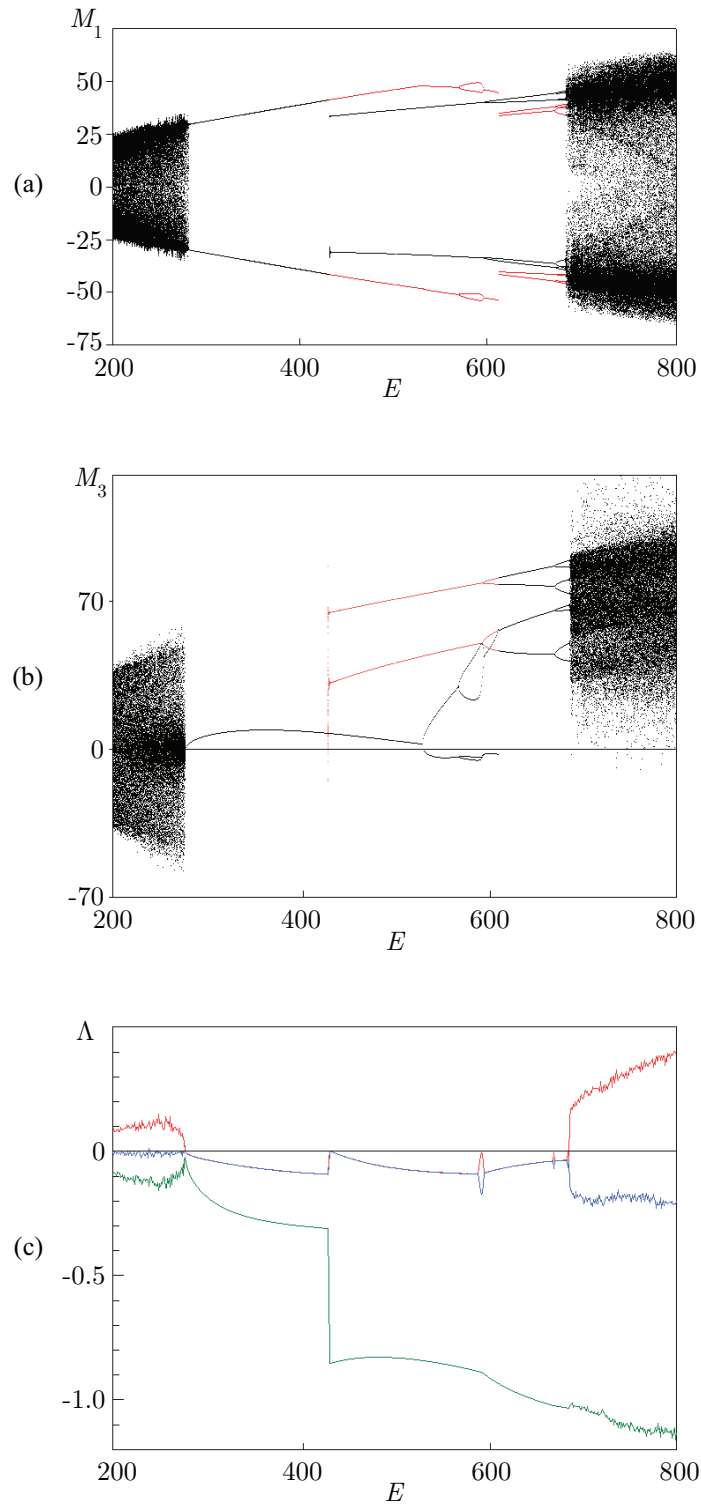


Рис. 6. Бифуркационное дерево (а), (b) и график трех показателей Ляпунова (с) для трехмерного отображения Пуанкаре системы (2.1) при параметрах $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 3\pi/16$. Сканирование по параметру энергии E справа налево с наследованием начальных условий, за исключением показанных красным цветом ветвей дерева, которые получаются сканированием справа налево.

ческий: можно наблюдать характерную изрезанность зависимости показателя Ляпунова от параметра (особенно на рис. 5), подобную той, что имеет место в логистическом отображении или отображении Эно, с «провалами», отвечающими окнам периодичности [11, 12, 21]. (На карте динамических режимов эти окна соответствуют тому, что маршрут движения по параметру пересекает образования в виде «креветок».)

Учитывая наличие гистерезиса и жестких переходов, карту динамических режимов можно мыслить как составленную из набора частично перекрывающихся листов, каждому из которых отвечает тот или иной аттрактор [12]. Листы могут соединяться в точках сборки и имеют краями линии складок, идущие вдоль длинных сужающихся полос периодических режимов, вытянутых в область, занятую хаосом. Эти особенности картины хорошо видны на рисунке 4, хотя положение точек сборки не обозначено и только угадывается. Описанная картина качественно согласуется с той, которая наблюдается во многих диссипативных системах, способных демонстрировать сложную динамику и переход к хаосу.

На рисунке 7 воспроизведена еще раз карта динамических режимов, но здесь, для иллюстрации динамики в представительных точках, по периферии рисунка представлены фазовые портреты для отображения Пуанкаре в координатах Андуайе–Депри (см. обозначения осей координат на диаграмме (а)). Аттрактор в каждом случае показан синим цветом, а красным обозначены репеллеры, предельные объекты, возникающие при итерациях в обратном времени, которые служат симметричными партнерами «синих» объектов относительно операции обращения времени (2.7).

Диаграмма (а) отвечает устойчивому циклу периода 2, симметричным партнером которого является неустойчивый цикл того же периода.

Диаграмма (b) представляет странный аттрактор и симметричный репеллер.

Диаграмма (с) отвечает одному из окон периодичности в области, занятой в основном хаосом. Период устойчивого цикла равен 14, имеется также симметричный ему неустойчивый цикл того же периода.

Диаграмма (d) относится к циклу периода 4 недалеко от порога его возникновения через бифуркацию удвоения периода. Имеется также симметричный ему неустойчивый цикл того же периода.

Диаграммы (e) и (f) отвечают наличию странного аттрактора и симметричного ему репеллера.

Диаграмма (g) представляет объект, который, по-видимому, симметричен относительно обращения времени. Судя по спектру показателей Ляпунова, содержащему три нулевых (с точностью до погрешности вычислений) показателей, это квазипериодический режим.

На диаграмме (h) можно видеть замкнутую притягивающую инвариантную кривую и, в качестве симметричного партнера, — отталкивающую инвариантную кривую. Это соответствует двухчастотному квазипериодическому движению и наличию аттрактора в виде двумерного тора в фазовом пространстве системы с непрерывным временем на энергетической поверхности.

Диаграммы (i) и (k) отвечают хаотическим режимам, в которых положительный и отрицательный показатели Ляпунова почти одинаковы по абсолютной величине, а оставшийся показатель близок к нулю. На этом основании их можно интерпретировать как квазиконсервативный хаос. Тем не менее, как показывает внимательное рассмотрение рисунков, говорить о симметрии предельного множества относительно обращения времени все же не приходится: на рисунке можно различить множества, занятые преимущественно синими или преимущественно красными точками, так сказать, переплетенные друг с другом. Благодаря тому, что синие и красные точки, относящиеся к аттрактору и репеллеру, рас-

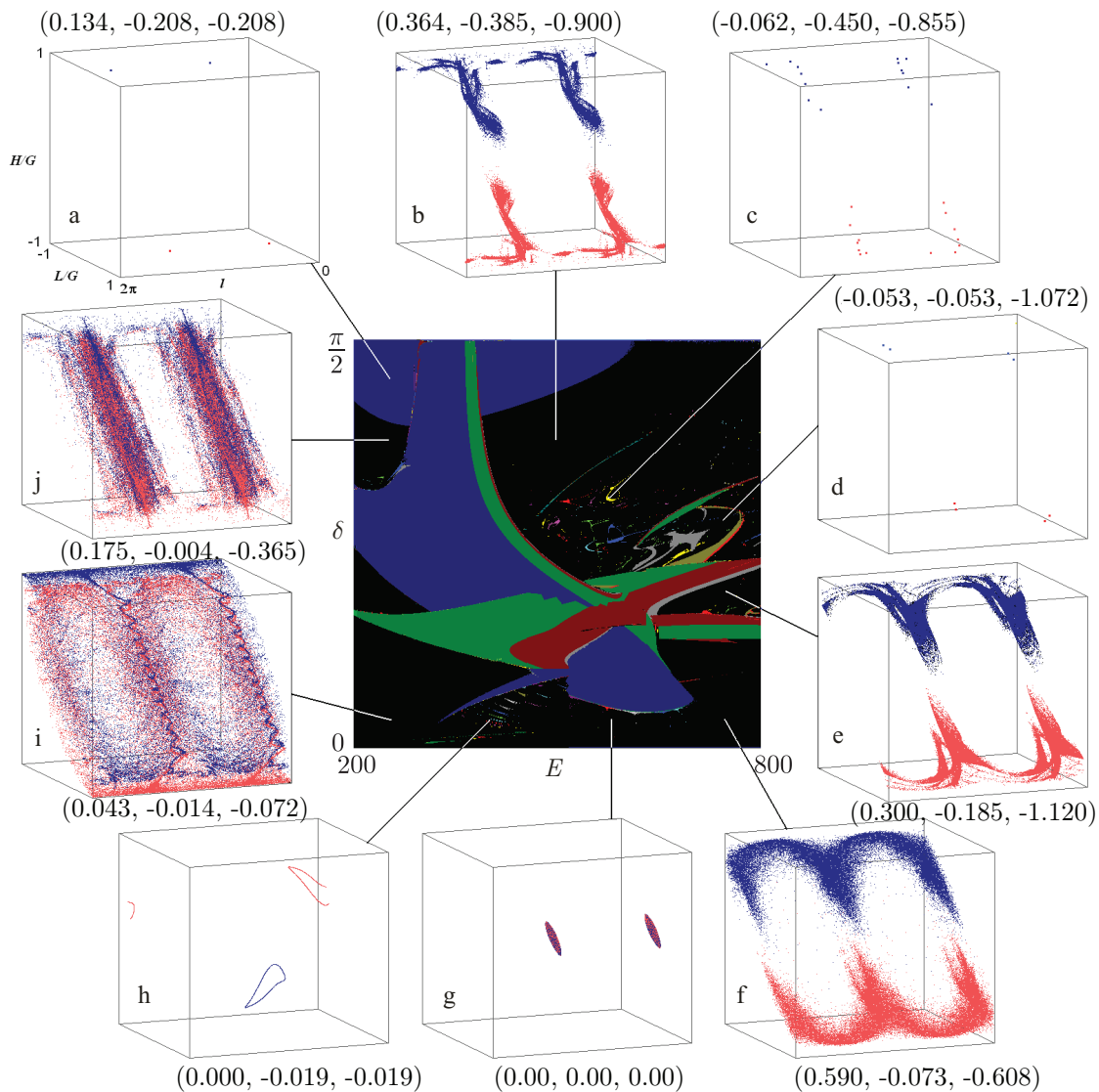


Рис. 7. Карта динамических режимов (в центре) на плоскости параметров (E, δ) для кельтского камня при $I_1 = 1, I_2 = 6, I_3 = 7, g_0 = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1$ и фазовые портреты установившихся режимов динамики в представительных точках для отображения Пуанкаре в переменных Андуайе – Дебри. Около каждого портрета приводится спектр показателей Ляпунова отображения Пуанкаре для данного режима $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$. Пояснения см. в тексте.

полагаются более или менее в одних и тех же областях фазового пространства, в среднем за характерный период времени наибольшие показатели Ляпунова при рассмотрении движения в прямом и в обратном времени получаются близкими друг к другу.

6. Странные аттракторы и переход к хаосу

В этом разделе будет рассмотрено более подробно несколько странных аттракторов, реализующихся в неголомомной модели кельтского камня. Будем полагать, что главные моменты инерции даются величинами $I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7$, а поверхность, находящаяся

в контакте с шероховатой плоскостью, как и раньше, имеет вид эллиптического параболоида. Параметры энергии и угла между динамическими и геометрическими осями при анализе варьируются, а остальные параметры оставлены теми же, что и в предыдущих разделах.

На рисунке 8 приведена карта динамических режимов на плоскости параметров E и δ . Система обозначения типов динамики такая же, как на рисунке 4. Аттракторы, которые будут рассмотрены, отвечают точкам на плоскости параметров

- А: $E = 642, \delta = 0.922,$
- В: $E = 770, \delta = 0.405,$
- С: $E = 620, \delta = 3\pi/8 = 1.178. \dots$

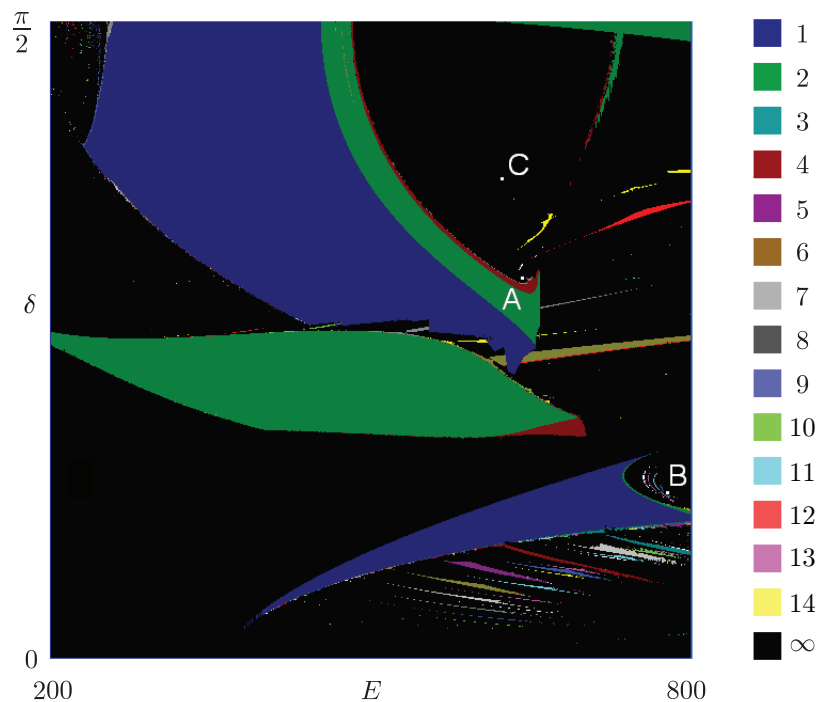


Рис. 8. Карта динамических режимов кельтского камня в виде эллиптического параболоида на плоскости параметров для отображения Пуанкаре. По горизонтали оси отложена энергия E , а по вертикали угол поворота осей инерции относительно геометрических осей δ . Остальные параметры: $I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7, g_0 = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1.$

Если двигаться на плоскости параметров снизу вверх по вертикальной линии, проходящей через точку А, то можно наблюдать переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Это иллюстрируется диаграммой в виде бифуркационного дерева на рисунке 9, где можно видеть характерную картину ветвей, раздваивающихся в точках бифуркаций, и заполненную точками «крону», отвечающую области хаоса. На вставках показаны фрагменты картины в увеличенном виде, которые с увеличением масштаба становятся все в большей степени похожими на классическую картину «дерева Фейгенбаума» для одномерных отображений и других сильно диссипативных систем с удвоениями периода.

Измеряя на диаграмме расщепление ветвей по горизонтали и вычисляя их отношения для последовательных уровней удвоения, получаем значения, представленные в первой



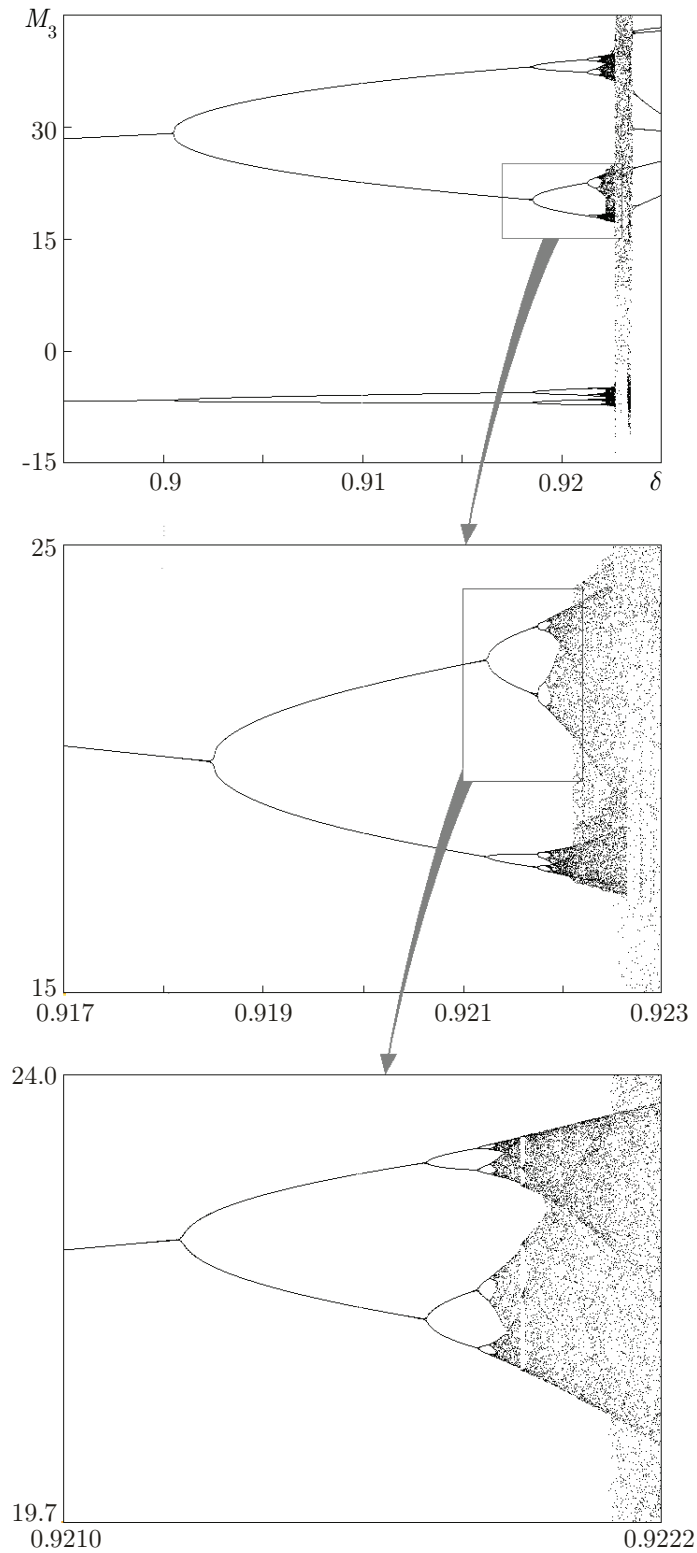


Рис. 9. Бифуркационные деревья в области перехода к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму при параметрах $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 642$. Сканирование по параметру δ ведется в сторону его увеличения с наследованием начальных условий.

строке таблицы 1. Аналогичным образом, определив отношения размеров расщепления ветвей по вертикальной координате, заполним вторую строчку таблицы. Если переход относится к классу универсальности, исследованному Фейгенбаумом [22, 12, 23], величины отношений должны сходиться к универсальным константам $\delta_F = 4.669201 \dots$ и $\alpha_F = -2.502907 \dots$. Из таблицы видно, что это предположение подтверждается. Тот факт, что на первых уровнях удвоений оценки констант больше по абсолютной величине, связан с так называемым эффектом кроссовера [24]. При малой эффективной диссипации (понимаемой как характеристика сжатия трехмерного фазового объема при динамической эволюции в данной области фазового пространства) константы на низких уровнях близки к тем, что характерны для удвоений периода в консервативных системах ($\delta_H = 8.721 \dots$ и $\alpha_H = -4.018 \dots$ [23, 25]). Но при каждой очередной бифуркации удвоения степень сжатия за характерный период удваивается и величины отношений асимптотически приближаются к универсальным константам δ_F и α_F .

Таблица 1. Результаты оценки констант Фейгенбаума

	(2, 4)/(4, 8)	(4, 8)/(8, 16)	(8, 16)/(16, 32)	(32, 64)/(64, 128)	Константы Фейгенбаума
δ_F	6.52	5.29	4.70	4.62	4.669201
α_F	-3.79	-2.82	-2.64	-2.54	-2.502908

Поскольку приведенные результаты указывают на принадлежность системы к классу универсальности Фейгенбаума (в указанной области параметров), можно полагать, что на больших характерных временах описание динамики сводится к одномерному отображению с квадратичным экстремумом (из-за достаточно сильного сжатия в области фазового пространства трехмерного отображения, где расположен аттрактор). Соответственно, в окрестности критической точки должны иметь место феномены, характерные для одномерных отображений. В частности, в области за критической точкой, в соответствии с результатом Якобсона [26], должно присутствовать множество положительной меры по параметру, где реализуется хаос. Для исходного трехмерного отображения это отвечает наличию странного аттрактора, подобного имеющемуся в отображении Эно при сильной диссипации (согласно результатам [27]).

Пример хаотического аттрактора, возникшего в результате каскада бифуркаций удвоения периода и относящегося к точке А ($E = 642$, $\delta = 0.922$), показан на рисунке 10. Это аттрактор трехмерного отображения Пуанкаре, изображенный в проекциях на плоскости переменных (M_1, M_2) и (M_1, M_3) . Визуально он похож на аттракторы диссипативных отображений, наблюдаемые сразу за порогом перехода к хаосу через удвоения периода.

Расчитанный для отображения Пуанкаре спектр показателей Ляпунова данного аттрактора

$$\Lambda_1 = 0.0453 \pm 0.002, \quad \Lambda_2 = -0.0845 \pm 0.0003, \quad \Lambda_3 = -0.3112 \pm 0.002, \quad (6.1)$$

где в качестве погрешности указаны полученные при вычислениях для множества реализаций среднеквадратичные отклонения.²

²Расчеты проведены для 15 реализаций, отвечающих последовательным участкам одной и той же траектории на аттракторе, каждый из которых содержал $5 \cdot 10^3$ итераций отображения Пуанкаре, после чего вычислялись средние значения и среднеквадратичные отклонения оцениваемых величин.

Как можно видеть, имеется один положительный показатель и два превышающие его по абсолютной величине отрицательных показателя. При оценке размерности по формуле Каплана–Йорке [11, 12, 28] принимаются во внимание только первые два показателя:

$$D = m + \left(\sum_{i=1}^m \Lambda_i \right) / |\Lambda_{m+1}| = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.53. \quad (6.2)$$

(В данном случае число членов суммы m , для которого она еще остается положительной, равно 1.)

На рисунке 11 показан спектр колебаний переменной M_3 при динамике на аттракторе. Спектр получен с помощью стандартной процедуры обработки временного ряда, порожденного системой (2.1), с шагом дискретизации, составляющим несколько шагов разностной схемы интегрирования дифференциальных уравнений [29]. Спектр имеет вид, характерный для аттрактора, возникшего через каскад удвоений периода Фейгенбаума. Имеется набор выделенных пиков с иерархической структурой. Как известно, пики каждого следующего уровня должны быть в среднем на 13.4 дБ ниже предыдущего уровня [11, 12], что разумно согласуется с наблюдаемой картиной. На глубоких уровнях пики разрушены и имеет место сплошной спектр в соответствии с тем, что динамика хаотическая.

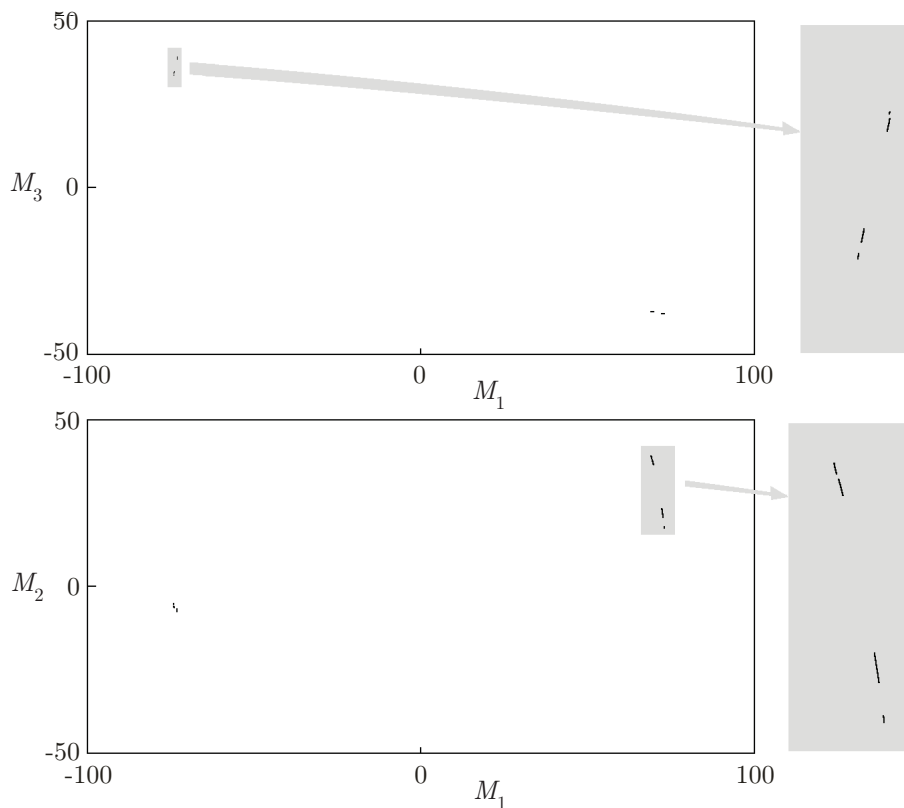


Рис. 10. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 642$, $\delta = 0.922$ в двух проекциях: по осям координат отложены составляющие момента импульса. На вставках показаны в увеличенном виде фрагменты, делающие лучше различимым мелкомасштабное устройство аттрактора.

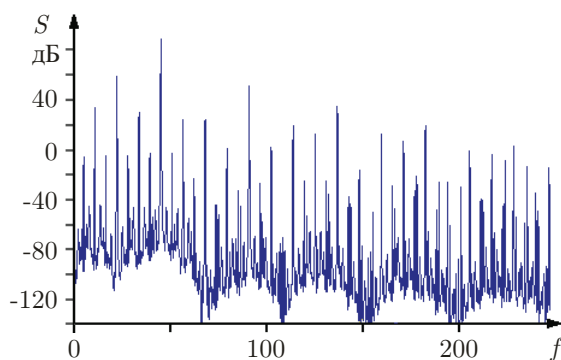


Рис. 11. Спектр Фурье составляющей M_3 на аттракторе для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$ и $E = 642$, $\delta = 0.922$. Использован логарифмический масштаб.

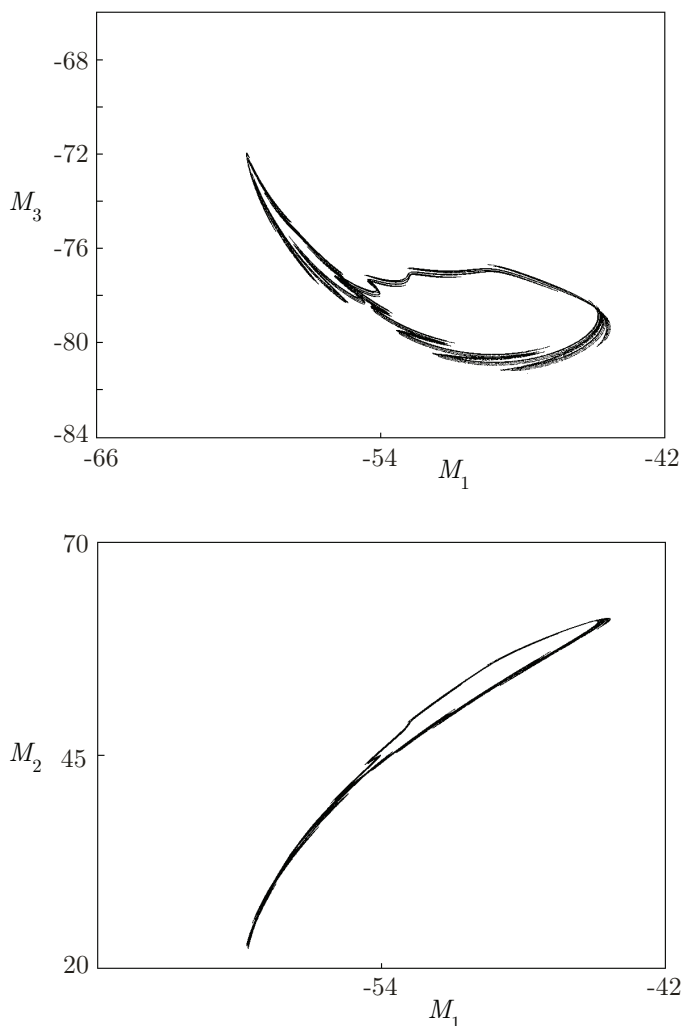


Рис. 12. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 770$, $\delta = 0.405$ в двух проекциях: по осям координат отложены составляющие момента импульса.

На рисунке 12 показан портрет хаотического аттрактора в точке В ($E = 770$, $\delta = 0.405$). Как можно предположить на основании визуальной оценки, это аттрактор, образовавшийся в результате разрушения инвариантного тора (замкнутой инвариантной кривой в сечении Пуанкаре). На рисунке 13 показан спектр Фурье сигнала, порожденного динамикой на этом аттракторе. Спектр весьма изрезанный, но с определенностью идентифицируется как сплошной, то есть отвечающий хаотической динамике. Показатели Ляпунова данного аттрактора трехмерного отображения

$$\Lambda_1 = 0.077 \pm 0.004, \quad \Lambda_2 = -0.100 \pm 0.003, \quad \Lambda_3 = -0.128 \pm 0.002, \quad (6.3)$$

а его размерность по формуле Каплана – Йорке

$$D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.76. \quad (6.4)$$

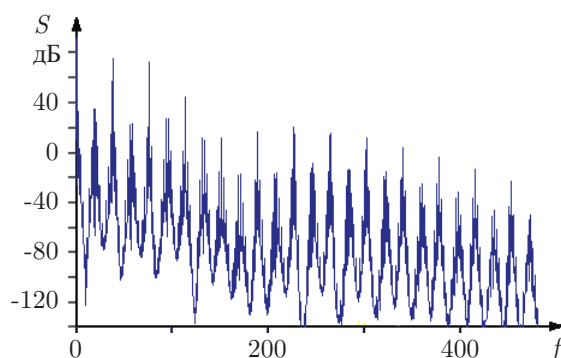


Рис. 13. Спектр Фурье составляющей M_3 на аттракторе для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$ и $E = 770$, $\delta = 0.405$. Использован логарифмический масштаб.

На рисунке 14 показан портрет хаотического аттрактора в точке С ($E = 620$, $\delta = 3\pi/8$). Показатели Ляпунова для него

$$\Lambda_1 = 0.282 \pm 0.009, \quad \Lambda_2 = -0.093 \pm 0.004, \quad \Lambda_3 = -0.686 \pm 0.007. \quad (6.5)$$

Как можно видеть, первый показатель Ляпунова положительный, а второй отрицательный, но по абсолютной величине меньше первого. Поэтому размерность по формуле Каплана – Йорке

$$D = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)/|\Lambda_3| \approx 2.26 \quad (6.6)$$

оказывается больше 2, в связи с чем, графическое изображение аттрактора визуально выглядит заметно иным образом, чем для случаев, рассмотренных выше. Насколько можно судить по имеющимся численным результатам, именно аттракторы такого типа наиболее характерны для неголомомной модели кельтского камня (в отличие от многих диссипативных систем с хаосом, где первый отрицательный показатель Ляпунова достаточно сильно удален от нуля). На рисунке 15 показан спектр Фурье сигнала, порожденного динамикой на этом аттракторе. Спектр с определенностью идентифицируется как сплошной, то есть отвечающий хаотической динамике. Его изрезанность, в отличие от спектров на рисунках 11 и 13, незначительна, что свидетельствует об отсутствии каких-либо заметных периодических составляющих движения.

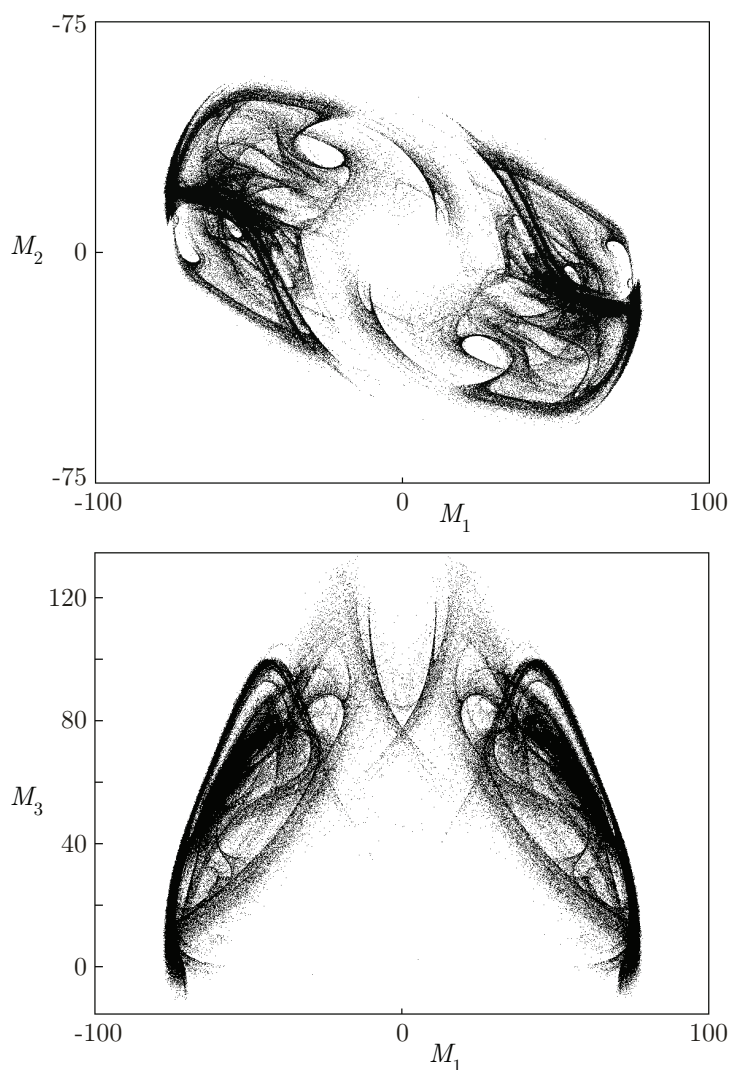


Рис. 14. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 620$, $\delta = 3\pi/8$ в двух проекциях: по осям координат отложены составляющие момента импульса.

7. Размерности аттракторов

Одна из общепринятых методик количественной характеристики странных аттракторов состоит в оценке размерностей — фрактальной (или емкостной), информационной, корреляционной — путем обработки реализаций (временных рядов), полученных в процессе функционирования системы [11, 12, 30, 31]. Представляется интересным привлечь этот подход для аттракторов, ассоциирующихся с динамикой кельтского камня.

Для оценки емкостной размерности фазовое пространство разбивается на ячейки в виде «кубиков» одинакового размера и определяется закон изменения количества ячеек, обеспечивающих покрытие аттрактора, от их размера. Для оценки информационной размерности рассматриваются вероятности пребывания траектории на аттракторе в ячейках разбиения и анализируется зависимость количества информации о попадании в ячейку от размера яче-

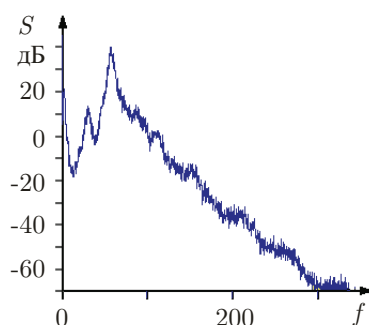


Рис. 15. Спектр Фурье составляющей M_3 на аттракторе для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$ и $E = 620$, $\delta = 1.178$. Использован логарифмический масштаб.

ек. Наконец, для оценки корреляционной размерности рассматривается величина вероятности повторного посещения одной и той же ячейки разбиения принадлежащей аттрактору траекторией в зависимости от размера ячеек.

В наших расчетах для вычисления размерностей взят сегмент траектории системы с дискретным временем, отвечающей трехмерному отображению Пуанкаре неголомомной модели кельтского камня, в переменных Андуайе–Депри $(H/G, L/G, l)$, содержащий $M = 10^6$ точек. Область, где располагается аттрактор, разбивается на кубические ячейки с длиной ребра по каждой координатной оси $\varepsilon_k = 1/2^k$, где $k = 1, \dots, 13$. Таким образом, на уровне разбиения с номером k все фазовое пространство покрывается количеством ячеек 2^{3k} . Вероятность пребывания изображающей точки в i -й ячейке оценивается как $p_i = M_i/M$, где M_i — количество точек траектории, попавших в данную ячейку.

Пусть покрытие аттрактора обеспечивается числом $N(\varepsilon)$ ячеек размера ε . Емкостная, информационная и корреляционная размерности определяются следующими соотношениями

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (\text{емкостная}), \quad (7.1)$$

$$D_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad \text{где } I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i \quad (\text{информационная}), \quad (7.2)$$

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad \text{где } C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \quad (\text{корреляционная}). \quad (7.3)$$

Для численной оценки этих размерностей строим графики зависимости величин $N(\varepsilon_k)$, $I(\varepsilon_k)$ и $C(\varepsilon_k)$ от ε_k в логарифмическом масштабе. На этих графиках можно выделить линейный участок. Угловой коэффициент прямой линии, аппроксимирующей зависимость на этом участке, принимается за оценку соответствующей размерности. Результаты для аттракторов, рассмотренных в предыдущем разделе и отвечающих точкам пространства параметров В и С, представлены на рисунке 16.

В обоих случаях размерности дробные, что говорит о фрактальной природе рассматриваемых аттракторов. Если сравнить информационную размерность с оценкой по формуле Каплана — Йорке, то для аттрактора в точке В имеем, соответственно, 1.60 и 1.76, а в точке С, соответственно, 2.26 и 2.0, что можно признать достаточно разумным согласием.

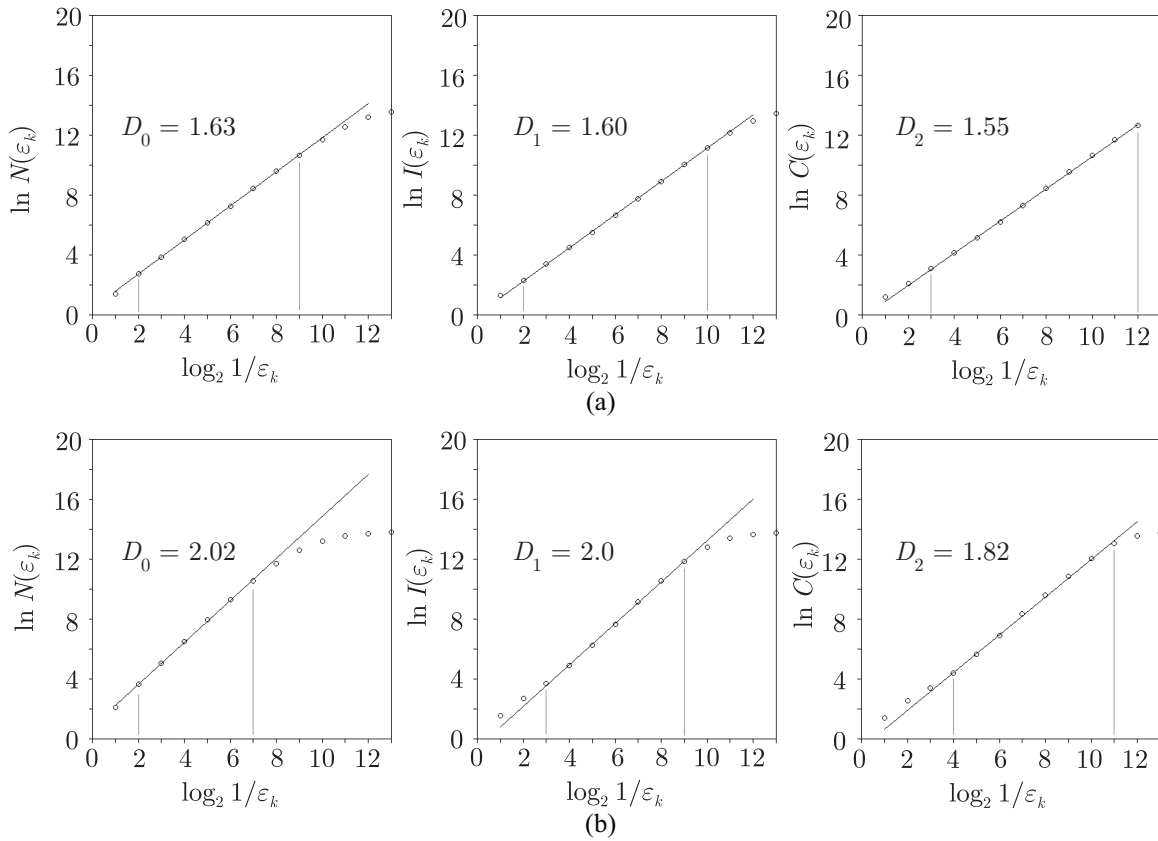


Рис. 16. Результаты оценки емкостной (слева), информационной (в центре) и корреляционной (справа) размерностей для аттракторов отображения Пуанкаре модели кельтского камня при $E = 770$, $\delta = 0.405$ (а) и $E = 620$, $\delta = 3\pi/8$ (б). Остальные параметры $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$.

8. Заключение

В работе проведено численное исследование динамики кельтского камня в зависимости от параметров с привлечением ряда методов, использовавшихся ранее для анализа сложной динамики и хаоса в диссипативных системах и адаптированных применительно к негोलомной механической модели.

Продемонстрировано соответствие методики численного решения задачи, развитой для целей данного исследования, ранее известным результатам.

Построена и интерпретирована карта динамических режимов системы на плоскости параметров полной механической энергии и угла относительного поворота геометрических и динамических главных осей твердого тела. Отмечено присутствие характерных, наблюдавшихся ранее только для диссипативных систем, образований в пространстве параметров, включая формы областей удваивающегося периода у границы хаоса, наличие складок и сборок, островов периодичности внутри области, занимаемой хаосом («креветки»). Отмечено также присутствие квазипериодических режимов, представленных двумерными и трехмерными торами-аттракторами в фазовом пространстве системы, редуцированной к трехмерному отображению.

Продемонстрирована продуктивность анализа, опирающегося на построение однопараметрических бифуркационных диаграмм («деревьев»), в частности, с точки зрения выявле-



ния областей мультистабильности, то есть сосуществования двух и более аттракторов при одних и тех же параметрах.

Разработана и реализована методика вычисления полного спектра показателей Ляпунова. Показано, что на основе анализа показателей Ляпунова среди хаотических режимов неголономной модели выделяются два класса: один отвечает странным аттракторам с одним положительным и двумя отрицательными показателями Ляпунова, а другой характеризуется близкими по абсолютной величине положительным и отрицательным показателями и близким к нулю оставшимся показателем. Частной разновидностью хаоса второго типа выступает так называемая смешанная динамика, которой отвечает в фазовом пространстве множество траекторий, инвариантное относительно операции обращения времени. Расчеты демонстрируют, что первый тип поведения характерен для области относительно больших, а второй — для области относительно малых значений параметра энергии.

Изучено несколько представителей странных аттракторов в неголономной модели кельтского камня: приведены портреты в сечении Пуанкаре, показатели Ляпунова, спектры Фурье, оценки размерностей. Продемонстрировано, что возникновение одного из этих аттракторов через каскад удвоений периода ассоциируется с классом количественной универсальности Фейгенбаума.

Авторы благодарны А. В. Борисову за конструктивные предложения и замечания, а также А. П. Кузнецову за полезное обсуждение.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [2] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
- [3] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere. Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [4] Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 328 с.
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 117, № 4, с. 407–418.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Избранные задачи неголономной механики: Препринт (см.: <http://ics.org.ru/doc?book=30&dir=r>).
- [7] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 3–28.
- [8] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 507–518.
- [9] Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [10] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и хаотическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [11] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253 с.
- [12] Кузнецов С. П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
- [13] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Chua L. O. Multi-parameter criticality in Chua's circuit at period-doubling transition to chaos // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1996, vol. 6, no. 1, pp. 119–148.
- [14] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 693–717.
- [15] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. На пути к многомерным торами // ПНД, 2010, т. 18, № 6, с. 65–84.

- [16] Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [17] Hénon M. On the numerical computation of Poincaré maps // *Phys. D*, 1982, vol. 5, nos. 2–3, pp. 412–414.
- [18] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them: P. 1, 2 // *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [19] Агемян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. М.: Наука, 1972. 172 с.
- [20] Gallas J. A. C. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical systems // *Phys. A*, 1994, vol. 202, pp. 196–223.
- [21] Kuznetsov S. P. *Hyperbolic chaos: A physicist's view*. Berlin: Springer, 2012. 336 pp.
- [22] Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН*, 1983, т. 141, с. 343–374.
- [23] Kuznetsov S. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R. Multiparameter critical situations, universality and scaling in two-dimensional period-doubling maps // *J. Stat. Phys.*, 2005, vol. 121, nos. 5–6, pp. 697–748.
- [24] Reick C. Universal corrections to parameter scaling in period-doubling systems: multiple scaling and crossover // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, pp. 777–792.
- [25] Райхл Л. Е. Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 756 с.
- [26] Якобсон М. В. Инвариантные меры абсолютно непрерывные относительно dx для однопараметрических семейств одномерных отображений // *УМН*, 1980, т. 35, № 4(214), с. 215–216.
- [27] Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Hénon map // *Ann. of Math. (2)*, 1991, vol. 133, no. 1, pp. 73–169.
- [28] Kaplan J. L., Yorke J. A. A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations // *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points: Proc. of the Summer School and Conference held at the University of Bonn (Bonn, July 17–22, 1978)* / Н.-О. Peitgen, Н.-О. Walther (Eds.). (Lecture Notes in Math., vol. 730.) Berlin: Springer, 1979. P. 204–227.
- [29] Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: В 2-х тт. М.: Мир, 1971, 1972. 318 с.; 142 с.
- [30] Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors // *Phys. Lett. A*, 1983, vol. 97, pp. 227–230.
- [31] Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // *Phys. D*, 1983, vol. 9, pp. 189–208.

Phenomena of nonlinear dynamics of dissipative systems in nonholonomic mechanics of the rattleback

Sergey P. Kuznetsov¹, Alexey Yu. Jalnine², Igor R. Sataev³, Julia V. Sedova⁴

Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS
Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

¹spkuz@yandex.ru, ²jalnine@rambler.ru, ³sataevir@rambler.ru, ⁴sedovayv@rambler.ru

We perform a numerical study of the motion of the rattleback, a rigid body with a convex surface on a rough horizontal plane in dependence on the parameters, applying the methods used previously for the treatment of dissipative dynamical systems, and adapted for the nonholonomic model. Charts of dynamical regimes are presented on the parameter plane of the total mechanical energy and the angle between the geometric and dynamic principal axes of the rigid body. Presence of characteristic structures in the parameter space, previously observed only for dissipative systems, is demonstrated. A method of calculating for the full spectrum of Lyapunov exponents is developed and implemented. It is shown that analysis of the Lyapunov exponents



of chaotic regimes of the nonholonomic model reveals two classes, one of which is typical for relatively high energies, and the second for the relatively small energies. For the model reduced to a three-dimensional map, the first one corresponds to a strange attractor with one positive and two negative Lyapunov exponents, and the second to the chaotic dynamics of the quasi-conservative type, with close in magnitude positive and negative Lyapunov exponents, and the rest one about zero. The transition to chaos through a sequence of period-doubling bifurcations is illustrated, and the observed scaling corresponds to that intrinsic to the dissipative systems. A study of strange attractors is provided, in particular, phase portraits are presented as well as the Lyapunov exponents, the Fourier spectra, the results of calculating the fractal dimensions.

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35

Keywords: rattleback, rigid body dynamics, nonholonomic mechanics, strange attractor, Lyapunov exponents, bifurcation, fractal dimension

Received September 9, 2012, accepted October 16, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 735–762 (Russian)