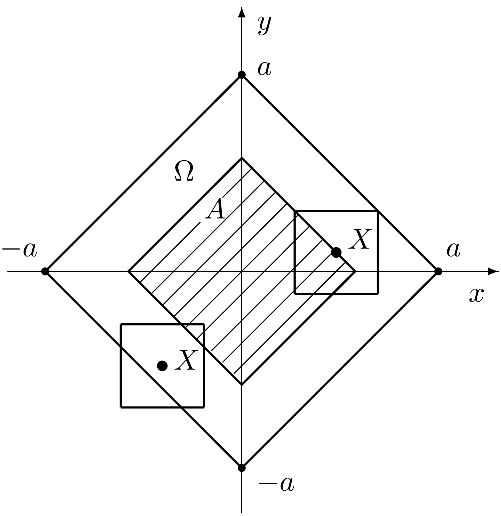
Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ



Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»

Кафедра математического анализа

Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие

Ижевск
2013

ББК 22.171я7
УДК 519.21(075)
М 328

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФТИ УрО РАН **Ю. П. Чубурин**

Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина
М 328 Теория вероятностей. Примеры и задачи. Учебное пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2013. — 132 с.

ISBN 978-5-4312-0186-8

Учебное пособие является сборником задач по курсу «Стохастический анализ», оно содержит десять параграфов, в каждом из которых приведен теоретический материал, необходимый для решения задач, а также разобраны типичные примеры. Приведено достаточное количество задач для аудиторной и домашней работы по основным разделам курса теории вероятностей, а также варианты контрольных работ, к большинству задач даны ответы.

Для математических факультетов классических и технических университетов, готовящих студентов бакалавриата по математическим направлениям.

ББК 22.171я7
УДК 519.21(075)

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие является задачником и решебником по курсу теории вероятностей. Оно содержит десять параграфов, в каждом из которых приведен необходимый справочный материал для решения большинства задач, а также большое количество разобранных примеров по основным разделам курса. В пособии приведено достаточное количество задач для аудиторной и домашней работы, а также варианты контрольных работ, к большинству задач даны ответы. Пособие может служить студентам как руководство к самостоятельной работе, а также как задачник для домашней работы и подготовки к экзаменам. Оно также может быть полезно преподавателям, ведущим занятия по курсу «Стохастический анализ».

В отличие от известных задачников по теории вероятностей, данное пособие содержит как простые задачи, необходимые для начального понимания данного курса, так и более сложные, направленные на глубокое изучение предмета. Изложение ведется на уровне, доступном читателю, знакомому с математикой на уровне обычного вузовского курса. Там, где по ходу изложения приходится пользоваться более сложными понятиями, они поясняются.

Кроме классических вероятностных задач, к которым можно отнести и известные старинные задачи, такие как задача Бюффона, парадоксы Бертрана, учебное пособие содержит прикладные задачи, возникающие в таких областях, как биология, теория страхования, теория массового обслуживания. Авторы пытались показать, что теория вероятностей является в первую очередь прикладной наукой, имеющей многочисленные применения в различных практических задачах. Часть задач взята из известных задачников [2, 3, 6, 7] и учебников или монографий [5, 10, 11, 12]; приведено также большое число новых задач, а решение известных задач большей частью отличается от решений, приведенных в других задачниках. Решение многих задач сопровождается иллюстрациями, которые помогают читателям освоить основные вероятностные закономерности.

§ 1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСХОДОВ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим некоторый эксперимент, все возможные исходы которого равны $\omega_1, \ldots, \omega_N$. Исходы $\omega_1, \ldots, \omega_N$ будем называть *элементарными событиями,* а их совокупность $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ — (конечным) *пространством элементарных событий. Событиями* называются те подмножества $A \subseteq \Omega$, для которых по условиям эксперимента возможен ответ одного из двух типов: «исход $\omega \in A$» или «исход $\omega \notin A$».

Определение 1.1. Система множеств $\mathfrak{A}$ называется алгеброй, если выполнены следующие свойства:

1) $\Omega \in \mathfrak{A}$;

2) если множество $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{A}$, то множества $A \cup B$ и $A \cap B$ также принадлежат $\mathfrak{A}$;

3) если множество $A \in \mathfrak{A}$, то дополнение к нему $\overline{A}$ также принадлежит системе множеств $\mathfrak{A}$.

В элементарной теории вероятностей в качестве алгебры $\mathfrak{A}$ обычно берется алгебра всех подмножеств Ω.

Припишем каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, N$, некоторый «вес», обозначаемый $p\,(\omega_i)$, и называемый *вероятностью* исхода ω_i. Будем считать, что $p\,(\omega_i)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $0 \leqslant p\,(\omega_i) \leqslant 1$ (неотрицательность),

2) $p\,(\omega_1) + \ldots + p(\omega_N) = 1$ (нормированность).

Определение 1.2. *Вероятностью* $P(A)$ любого события $A \in \mathfrak{A}$ называется сумма вероятностей элементарных событий, составляющих событие A :

$$P(A) = \sum_{\{i\colon\, \omega_i \in A\}} p\,(\omega_i).$$

О п р е д е л е н и е 1.3. Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ — пространство элементарных событий, $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра подмножеств Ω, $P = \{P(A); A \in \mathfrak{A}\}$ — набор вероятностей, называется *вероятностной моделью или вероятностным пространством* эксперимента с конечным пространством исходов Ω и алгеброй событий $\mathfrak{A}$.

Свойства вероятностей.

1) $P(\varnothing) = 0; \quad P(\Omega) = 1;$
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$
3) Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A + B) = P(A) + P(B);$
4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

Классический способ задания вероятностей.

Существует много практических ситуаций, в которых из соображений симметрии все мыслимые исходы рассматривают как равновозможные. Поэтому, если пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, где $N = N(\Omega) < \infty$, полагают

$$p(\omega_1) = \ldots = p(\omega_N) = \frac{1}{N},$$

следовательно, вероятность любого события $A \in \mathfrak{A}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

где $N(A)$ — число элементарных событий, составляющих событие A, $N(\Omega)$ — число всех элементарных событий.

Пример 1.1. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$сумма выпавших очков делится на 6$\}$.

$B = \{$произведение выпавших очков равно 8$\}$,

$C = \{$сумма выпавших очков больше, чем их произведение$\}$.

Р е ш е н и е. Возможными исходами эксперимента являются пары чисел (i, j), где i — число очков на первой кости, j — на второй,

$i, j = 1, \ldots, 6$. Все элементарные исходы удобно изобразить в виде следующей таблицы.

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), ..., (2,6),
(3,1), ..., (4,6),
....,
(6,1), ..., (6,6).

Понятно, что число всех элементарных исходов $N(\Omega) = 36$. Перечислим все элементарные исходы, составляющие событие A : $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,6)$. Число этих исходов $N(A) = 6$, поэтому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

Событие B содержит два исхода $(2,4), (4,2)$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Исходы, благоприятные событию C : $(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),$ $(1,6),\ (2,1),\ (3,1),\ (4,1),\ (5,1),\ (6,1)$. Значит, $P(C) = \dfrac{N(C)}{N(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$.

Как видно из этого примера, если число элементарных событий сравнительно небольшое, количество исходов, составляющих определенное событие и все пространство Ω, можно найти способом перебора. В общем случае нужно использовать формулы комбинаторного анализа. Приведем примеры нахождения числа всех возможных исходов для некоторых пространств элементарных событий.

Выбор с возвращением. Предположим, что имеется ящик, котрый содержит M шаров, занумерованных числами $1, 2, \ldots, M$. Эксперимент состоит в извлечении из ящика n шаров, причем на каждом шаге извлеченный шар возвращается обратно. В этом случае каждая выборка из n шаров может быть записана в виде $(a_1, \ldots, a_n)$, где a_i — номер шара, извлеченного на i-м шаге. Понятно, что каждое a_i может принимать любое из M значений $1, 2, \ldots, M$. Принято различать два случая: *упорядоченные* выборки и *неупорядоченные*. В первом случае выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком следования этих элементов, считаются различными. Во втором случае порядок следования элементов не принимается во внимание и такие выборки считаютя одинаковыми. Для упорядоченных выборок используем обозначение $(a_1, \ldots, a_n)$, для неупорядоченных — $[a_1, \ldots, a_n]$. Следовательно, в случае упорядоченных выборок пространство элементарных событий Ω имеет следующий вид:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n), a_i = 1, \ldots, M\}$$

и число различных исходов $N(\Omega) = M^n$.

Для неупорядоченных выборок

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, \ldots, a_n], a_i = 1, \ldots, M\},$$

число различных исходов $N(\Omega) = C^n_{M+n-1}$, где $C^k_n \doteq \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k (см. пример 1.2.).

Выбор без возвращения. Пусть в ящике находятся M шаров и производится выборка объема n, причем $n \leqslant M$, поскольку извлеченные шары обратно не возвращаются.

Для упорядоченных выборок без возвращения пространство исходов

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_k \neq a_l, k \neq l,\ a_i = 1, \ldots, M\}.$$

Поскольку первый шар мы можем извлечь M способами, второй шар — только $M-1$-им способом, а n-ый шар — $M-n+1$ способами, то число всех возможных исходов $N(\Omega) = M(M-1)\ldots(M-n+1)$. Для этого числа используется обозначение $(M)_n$.

Для неупорядоченных выборок пространство исходов

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, \ldots, a_n],\ a_k \neq a_l, k \neq l,\ a_i = 1, \ldots, M\}.$$

Покажем, что число различных исходов в этом случае $N(\Omega) = C_M^n$. Действительно, из каждой неупорядоченной выборки $[a_1, \dots, a_n]$, состоящей из различных элементов, при помощи различных перестановок можно получить ровно $n!$ упорядоченных выборок. Следовательно, $N(\Omega) \cdot n! = (M)_n$ и поэтому

$$N(\Omega) = \frac{(M)_n}{n!} = \frac{M(M-1)\dots(M-n+1)(M-n)!}{n!\,(M-n)!} = C_M^n.$$

Размещение шаров по ящикам. Рассмотрим задачу о размещении n шаров по M ящикам, которые занумерованы числами $1, 2, \dots, M$. Предположим сначала, что шары *различимы,* то есть имеют номера $1, 2, \dots, n$. Тогда распределение n шаров по M ящикам описывается упорядоченным набором $(a_1, \dots, a_n)$, где a_i — номер ящика, в который попал шар с номером i. Если шары *неразличимы,* то их распределение по M ящикам описывается неупорядоченным набором $[a_1, \dots, a_n]$.

Будем также различать размещение шаров с запретом (в ящике может находиться не более одного шара) и без запрета (в ящике может находиться любое число шаров). Например, все размещения различимых шаров с запретом описываются упорядоченным набором $(a_1, \dots, a_n)$, $a_k \neq a_l$, $k \neq l$, где a_i — номер ящика, в который попал шар с номером i. Поэтому в случае размещения с запретом количество возможных элементарных исходов равно количеству выборок без возвращения, а для размещения без запрета количество всех исходов равно количеству выборок с возвращением.

Таким образом, число различных размещений n *различимых* шаров без запрета по M ящикам равно M^n, число размещений n различимых шаров с запретом равно $(M)_n$. Для *неразличимых* шаров число различных размещений без запрета равно C_{M+n-1}^n, а число размещений с запретом равно C_M^n.

Пример 1.2. Доказать, что число различных размещений без запрета n неразличимых шаров по M ящикам равно C_{M+n-1}^n.

Р е ш е н и е. Поскольку все шары неразличимые, будем обозначать их звездочками: $*$, а перегородки между ящиками будем обозначать $|$. Если в каком-либо ящике нет ни одного шара, две перегородки, обозначающие границы этого ящика, будем изображать рядом: $||$. Так, на рисунке $|**|||$ изображается, что в первом ящике находятся 2 шара, а во втором и третьем шаров нет. Опишем, например, все возможные размещения без запрета двух неразличимых шаров по трем ящикам:

$$|**|||,\ \ ||**||,\ \ |||**|,\ \ |*|*||,\ \ |*||*|,\ \ ||*|*|.$$

Здесь, как и в случае произвольного числа ящиков, количество всех перегородок равно $M+1$, а общее число мест равно $M+n+1$. Заметим также, что на первом и последнем месте всегда стоят перегородки, поэтому размещаем n звездочек на $M+n-1$ место, все оставшиеся места заполняем перегородками. Число таких размещений равно числу размещений с запретом n неразличимых шаров по $M+n-1$ ящикам, то есть равно C^n_{M+n-1}.

Можно также производить размещение другим способом: сначала расставить все внутренние перегородки (их $M-1$ штук), а потом на оставшиеся n мест поставить n звездочек, тогда число возможных размещений равно C^{M-1}_{M+n-1}. По свойствам биномиальных коэффициентов $C^{M-1}_{M+n-1} = C^n_{M+n-1}$.

Пример 1.3. В ящике a белых и b черных шаров, причем $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$. Из ящика вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут одного цвета.

Р е ш е н и е. В этом примере исходами являются неупорядоченные выборки без возвращения, поэтому пространство всех элементарных исходов

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, a_2],\ a_1 \neq a_2,\ a_i = 1, \ldots, a+b,\ i = 1, 2\}.$$

Общее число элементарных событий

$$N(\Omega) = C^2_{a+b} = \frac{(a+b)(a+b-1)}{2}.$$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что оба шара одного цвета. Понятно, что событие A происходит в том случае, когда оба шара белые или оба шара черные, поэтому число элементарных событий, входящих в событие A, равно

$$N(A) = C_a^2 + C_b^2 = \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}.$$

Следовательно, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{a(a-1) + b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Пример 1.4. В группе 20 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отбирается 10 человек. Найти вероятность, что среди них ровно 5 отличников.

Р е ш е н и е. Исходами данного эксперимента являются неупорядоченные выборки без возвращения объема 10, поэтому пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, \ldots, a_{10}],\ a_i \neq a_j,\, i \neq j,\, a_i = 1, \ldots, 20\}.$$

Общее число элементарных событий $N(\Omega) = C_{20}^{10}$.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что среди отобранных наудачу 10 человек будет ровно 5 отличников. Выберем 5 отличников из 8, это можно сделать C_8^5 способами. При этом, если мы выбрали определенную пятерку отличников, то остальных 5 студентов можно выбрать C_{12}^5 способами. Если выбрали других 5 отличников, остальных студентов также выбираем C_{12}^5 способами. Таким образом, число элементарных событий, входящих в событие A, $N(A) = C_8^5 \cdot C_{12}^5$. Следовательно, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_8^5 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^{10}}.$$

Пример 1.5. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 16 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 8 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 4 сильнейших команды. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$все сильнейшие команды попадут в одну и ту же группу$\}$,

B=$\{$одна сильнейшая команда попадет в одну группу, а три — в другую$\}$.

Р е ш е н и е. Общее число элементарных событий в данном эксперименте равно числу неупорядоченных выборок, состоящих из 8 команд, поэтому $N(\Omega) = C_{16}^{8}$. Чтобы все сильнейшие команды попали в одну и ту же группу, нужно, чтобы в выборку попали либо 4 сильнейших команды и 4 остальных, либо чтобы выборка не содержала ни одной сильнейшей команды. Следовательно, число элементарных событий, входящих в событие A, есть

$$N(A) = C_4^4 \cdot C_{12}^4 + C_{12}^8 = 2\,C_{12}^4$$

и вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2C_{12}^4}{C_{16}^8}.$$

Число элементарных событий, входящих в событие B, равно

$$N(B) = C_4^1 \cdot C_{12}^7 + C_4^3 \cdot C_{12}^5 = 2 \cdot 4\,C_{12}^7.$$

Следовательно, вероятность события B есть $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{8\,C_{12}^7}{C_{16}^8}$.

Пример 1.6. В ряд из $2n$ мест рассаживаются произвольным образом n девочек и n мальчиков. Какова вероятность того, что никакие две девочки не окажутся рядом?

Р е ш е н и е. Общее число элементарных событий равно количеству различных размещений $2n$ человек на $2n$ местах, поэтому $N(\Omega) = (2n)!$ Будем обозначать буквой М какого-либо мальчика, а буквой Д — девочку. Рассмотрим сначала различные размещения, при которых два мальчика могут оказаться рядом, но никакие две девочки не окажутся рядом. Таким размещением соответствуют следующие последовательности из букв М и Д:

ДММДМДМД...МД,
ДМДММДМД...МД,
....
ДМДМ...ДМДММД.

Поскольку два мальчика подряд могут находиться или после первой, или после второй, и т.д., или после $n-1$-ой девочки, то таких последовательностей $n-1$. Кроме указанных последовательностей есть еще две, удовлетворяющие условию задачи — ДМДМДМ...ДМ и МДМДМД...МД. Всего получили $n+1$ последовательность, в каждой из которых девочки между собой могут размещаться по разному $n!$ способами и мальчики могут размещаться $n!$ способами. Поэтому количество исходов, благоприятных заданному событию, которое обозначим через A, равно $(n+1)(n!)^2$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{(n+1)(n!)^2}{(2n)!}.$$

1.1. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$появление четного числа очков$\}$,

$B = \{$появление не менее 5 очков$\}$,

$C = \{$появление не более 5 очков$\}$.

1.2. Брошено три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{$первая монета выпала «гербом» вверх$\}$,

$B = \{$выпало ровно два «герба» $\}$,

$C = \{$выпало не больше двух «гербов» $\}$.

1.3. Из полного набора 28 костей домино наудачу берутся 5 костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна кость с шестью очками.

1.4. Из десяти билетов лотереи выигрышными являются два. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов:

а) один выигрышный;

б) оба выигрышных;

в) хотя бы один выигрышный.

1.5. Монета подбрасывается n раз. Найти вероятность того, что число появлений герба нечетно.

1.6. Брошены 6 игральных костей. Найти вероятности следующих событий:

а) на всех костях выпало разное число очков;

б) суммарное число выпавших очков равно 7;

в) суммарное число выпавших очков равно 8.

1.7. Игральная кость брошена три раза. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 15.

1.8. Игральная кость бросается n раз. Найти вероятность, что:

а) хотя бы один раз выпадет шестерка;

б) шестерка выпадет в точности один раз.

1.9. Какое событие более вероятно: $A = \{$при четырех бросаниях кости хотя бы раз выпадет 6 очков$\}$ или $B = \{$при 24-х бросаниях двух костей хотя бы раз одновременно выпадут 6 и 6 очков$\}$? Найдите эти вероятности.

1.10. В зале, насчитывающем $n + k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные $m \leqslant n$ мест.

1.11. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности событий:

$A = \{$четыре туза расположены рядом$\}$,

$B = \{$места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7$\}$.

1.12. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятности следующих событий:

а) не выпало ни одной «6»; б) выпало ровно три «6»;

в) выпала хотя бы одна «6»; г) выпало хотя бы две «6».

1.13. В ящике 10 белых и 6 черных шаров. Из ящика вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: «шары одного цвета» или «шары разных цветов» ?

1.14. $2n$ команд спортсменов разбиваются на две равные подгруппы. Найти вероятность, что две наиболее сильные команды окажутся

а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

1.15. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных шурупов. Если использовать 10 шурупов, какова вероятность того, что ни один из них не окажется дефектным?

1.16. В ящике находятся 5 шаров различных цветов. Производится выборка с возвращением объема 25. Найти вероятность того, что в выборке будет по 5 шаров каждого цвета.

1.17. Из ящика, в котором находятся черные и белые шары, с возвращением извлекают два шара. Доказать, что вероятность того, что шары одного цвета, не меньше $1/2$.

1.18. Докажите свойства биномиальных коэффициентов:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$;

3) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

1.19. Имеется тщательно перетасованная колода из 52 карт (4 масти, по 13 карт в каждой от двойки до туза). Найти вероятность того, что:

а) первые четыре карты в колоде — тузы;

б) первая и последняя карты — тузы;

в) между тузами находится одинаковое число карт ℓ.

1.20. Колода из 52 карт делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятности следующих соьытий:

а) в каждой из пачек окажется по два туза;

б) в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой — все четыре;

в) в одной из пачек будет один туз, а в другой — три.

1.21. Колода из 52 карт раздается поровну четырем игрокам. Найти вероятность того, что:

а) у каждого из игроков окажется по одному тузу;

б) у одного из игроков все тринадцать карт будут одной масти;

в) у каждого из игроков будут все карты, от двойки до туза.

1.22. Из колоды, содержащей 52 карты, извлекаются 13 карт. Найти вероятность того, что в выборке содержатся ровно k пар «туз — король» одной масти.

1.23. N человек ($N > 2$) случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом. Решить ту же задачу, если стол прямоугольный.

1.24. Четыре шара случайным образом размещаются по четырем ящикам. Найти вероятность того, что в одном из ящиков окажется три шара, в другом — один, а в двух остальных ящиках шаров не будет.

1.25. На стоянке автомобилей можно поместить 12 машин в один ряд. Однажды оказались свободны 4 места подряд. Является ли это событие исключительным или столь же часто бываю свободны 4 не соседних места?

1.26. В n ящиках размещают n шаров так, что для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик. Найти вероятность того, что ни один ящик не пуст.

1.27. В n ящиках размещают $n + 2$ шаров. Найти вероятность того, что по крайней мере один ящик будет пустым.

1.28. В n ящиках размещают k шаров ($k < n$). Найти вероятность того, что они займут k соседних ящиков.

1.29. В n ящиках размещают $n + 1$ шаров. Найти вероятность того, что ровно два ящика окажутся пустыми.

1.30. В чулане n пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r < n$). Какова вероятность, что среди выбранных ботинок

а) отсутствуют парные;

б) имеется ровно одна комплектная пара;

в) имеется ровно две пары.

1.31. Каждая из n палок разламывается на две части — длинную и короткую. Затем $2n$ обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую «палку». Найти вероятность того, что

а) части будут соединены в первоначальном порядке;

б) все длинные части будут соединены с короткими.

(Когда клетки подвергаются воздействию радиации, некоторые хромосомы разрываются. «Длинными» считаются те части, которые содержат так называемые центромеры. Если соединяются две «длинных» или две «коротких» части, то клетка гибнет.)

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим случай, когда множество элементарных событий несчетно, например, представляет собой совокупность точек некоторого множества Ω в n-мерном евклидовом пространстве. Предполагаем, что множество Ω ограничено и его n-мерный объем $V(\Omega) > 0$.

Опыт состоит в том, что в пределы множества Ω «случайным образом» бросается точка X. Выражение «случайным образом» в данном случае означает, что все точки множества Ω равноправны в отношении попадания туда случайной точки X. Естественно предполагать, что вероятность попадания точки X в какое-то подмножество A пространства Ω пропорциональна n-мерному объему множества A.

Определение 2.1. Вероятность события A равна отношению объема множества A к объему всего пространства Ω :

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$

Если Ω — ограниченное множество на плоскости, имеющее положительную площадь $S(\Omega)$, то $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$. Если множество Ω расположено на прямой, то $P(A) = \dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$, где $L(\Omega)$ — длина Ω.

Пример 2.1. На отрезок OA длины L наудачу поставлена точка B. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую чем $L/3$.

Р е ш е н и е. В этом примере пространство элементарных исходов является отрезком OA. Обозначим через G событие, состояшее в том, что меньший из отрезков имеет длину, большую чем $L/3$.

На отрезке OA отметим точку C — середину этого отрезка и точки D, E, которые делят данный отрезок на три равные части. Если точка B попадает на отрезок OC, то меньшим из отрезков OB и BA является отрезок OB; чтобы он имел длину, большую чем $L/3$, нужно, чтобы точка B попала на отрезок DC. Если точка B попадает на отрезок CA, то искомым отрезком является BA; чтобы он имел длину, большую чем $L/3$, нужно, чтобы точка B принадлежала отрезку CE.

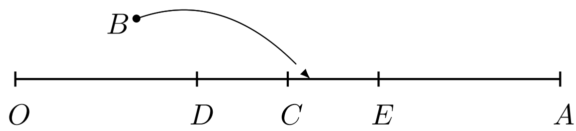


Рис. 1. Вероятность события A равна отношению длин отрезков DE и OA

Таким образом, множество G благоприятных исходов совпадает с отрезком DE, поэтому

$$P(G) = \frac{|DE|}{|OA|} = \frac{L/3}{L} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2.2. Вася и Маша условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

Р е ш е н и е. Элементарное событие ω характеризуется двумя параметрами: x — момент прихода на встречу Васи, y — момент прихода Маши. Множеством элементарных событий является квадрат

$$\Omega = \{(x, y) : 10 \leqslant x \leqslant 11, 10 \leqslant y \leqslant 11\}.$$

Обозначим через A событие, которое заключается в том, что встреча Васи и Маши произошла. Они встретятся, если их моменты прихода отличаются по абсолютной величине не более, чем на 10 минут, то есть на $1/6$ часа, поэтому

$$A = \Big\{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leqslant \frac{1}{6}\Big\} =$$
$$= \Big\{(x, y) \in \Omega : x - \frac{1}{6} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{6}\Big\}.$$

Площадь множества A равна $11/36$, поэтому вероятность события A равна $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$.

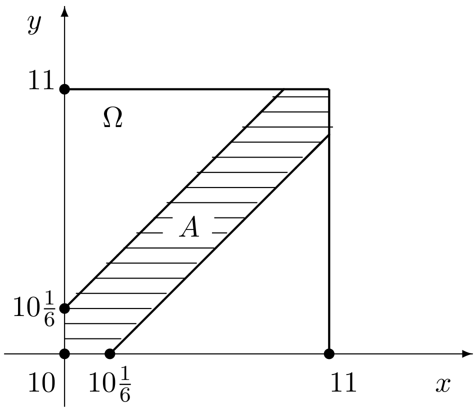


Рис. 2. Вероятность встречи равна отношению площадей множеств A и Ω

Пример 2.3. На отрезке единичной длины наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из трех отрезков, на которые делится исходный отрезок выбранными точками, можно составить треугольник?

Р е ш е н и е. Пусть OA — данный единичный отрезок, на котором случайным образом выбираются точки B_1 и B_2. Через B_1 обозначим точку, расположенную ближе к началу отрезка, координату точки B_1 обозначим через x, и через y обозначим координату точки B_2. Тогда $x \leqslant y$ и пространством элементарных исходов служит треугольник

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, x \leqslant y\}.$$

Найдем длины отрезков, на которые делится исходный отрезок выбранными точками. Поскольку $x \leqslant y$, то

$$|OB_1| = x, \ \ |B_1B_2| = y - x, \ \ |B_2A| = 1 - y.$$

Чтобы из данных отрезков можно было составить треугольник, необходимо, чтобы сумма любых из двух длин данных отрезков была больше длины третьего отрезка, поэтому должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} x + y - x > 1 - y, \\ y - x + 1 - y > x, \\ x + 1 - y > y - x, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} y > 1/2, \\ x < 1/2, \\ y < x + 1/2. \end{cases}$$

Множеством точек, удовлетворяющих полученной системе неравенств, является треугольник, образованный средними линиями треугольника Ω, поэтому искомая вероятность равна отношению площадей данных треугольников и равна $1/4$.

Пример 2.4. Случайная точка X равномерно распределена в квадрате $K = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате K.

Р е ш е н и е. Множеством элементарных исходов является квадрат K, то есть $\Omega = K$ и $S(\Omega) = 2a^2$.

Внутри квадрата Ω построим квадрат A, стороны которого находятся на расстоянии $\dfrac{\sqrt{2}b}{2}$ от сторон исходного квадрата. Отметим, что если точка X находится на стороне квадрата A, то одна из вершин квадрата с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, лежит на стороне квадрата K. Если точка X находится внутри квадрата A, то квадрат с центром X полностью содержится внутри квадрата K. И наконец, если точка X попадает в полосу между двумя квадратами, то квадрат с центром X пересекает стороны квадрата K.

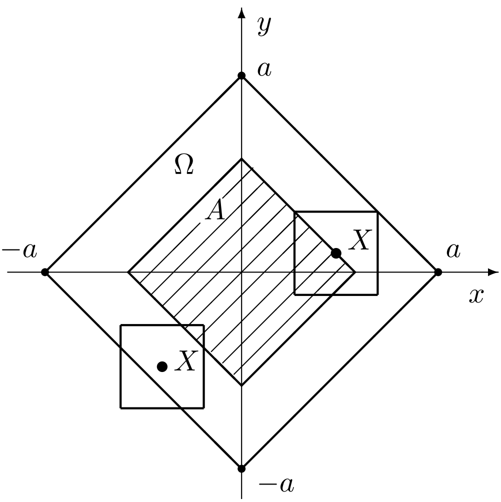


Рис. 3. Квадрат A является множеством благоприятных исходов

Таким образом, квадрат A является множеством благоприятных исходов. Длина стороны этого квадрата равна

$$\sqrt{2}a - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}b}{2} = \sqrt{2}(a-b),$$

поэтому, если $b < a$, то вероятность искомого события равна

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2(a-b)^2}{2a^2} = \frac{(a-b)^2}{a^2}.$$

Если $b \geqslant a$, то $P(A) = 0$.

2.1. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x;

б) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x;

в) расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит x;

г) расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x.

2.2. Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найти вероятности событий:

а) расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;

б) расстояние от точки A до любой стороны прямоугольника не превосходит x;

в) расстояние от A до диагоналей прямоугольника не превосходит x.

2.3. На отрезок OA единичной длины поставлены две точки B и , причем B левее . Найти вероятность того, что:

а) $|BC| < |OB|$; б) $|BC| < \frac{1}{2}$; в) $|BC| < \min(|OB|, |CA|)$.

2.4. (*Задача Бюффона*). На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии a, наудачу бросается игла длиною $2r$ ($2r < a$). Какова вероятность того, что игла пересечет одну из проведенных прямых?

2.5. На плоскость нанесены параллельные прямые на одинаковом расстоянии a друг от друга. На плоскость наудачу бросается монета радиуса R ($R < a/2$). Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одну из прямых.

2.6. В круг вписан квадрат. Точка наудачу бросается в круг. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат.

2.7. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Пусть p и q — координаты этих точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь вещественные корни.

2.8. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше 1, не превзойдет 1, а их произведение будет не больше 2/9?

2.9. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное x/y не больше двух.

2.10. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка упадет между первыми двумя?

2.11. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной a. Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали квадрата.

2.12. Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате $A = \{(x, y) : |x| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A.

2.13. Случайная точка X равномерно распределена в правильном треугольнике с вершинами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, a\sqrt{3})$. Найти вероятность того, что квадрат с центром в точке X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в этом треугольнике.

2.14. Случайная точка X равномерно распределена в круге $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Найти вероятность того, что параллельный оси абсцисс отрезок длины R с серединой в точке X целиком содержится в круге S.

2.15. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(u, v) : 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$. Обозначим через

N число действительных корней многочлена

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2 x + \xi_2.$$

Найти вероятности $P(N = 1)$, $P(N = 3)$.

2.16. На паркет, составленный из правильных k-угольников со стороной a, случайно бросается монета радиуса r. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из k-угольников паркета для

а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$.

2.17. (*Парадоксы Бертрана*). На заданном диаметре окружности радиуса R наудачу выбирается точка — середина хорды, перпендикулярной диаметру. Найти вероятность того, что длина хорды больше $R\sqrt{3}$.

2.18. На окружности радиуса R наудачу выбираются две точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина хорды больше $R\sqrt{3}$.

2.19. В круге радиуса R выбирается точка. Эта точка служит серединой хорды, перпендикулярной проведенному через нее диаметру. Найти вероятность того, что полученная хорда превзойдет по длине $R\sqrt{3}$.

§ 3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Определение 3.1. Пусть $P(B) > 0$. Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, определяется равенством

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

При классическом определении вероятностей $P(A|B) = \dfrac{N(AB)}{N(B)}$, где $N(AB)$ — число элементарных исходов, входящих одновременно в события A и B, $N(B)$ — число исходов, составляющих событие B. Для геометрического определения вероятностей

$$P(A|B) = \frac{V(AB)}{V(B)},$$

где $V(AB)$ — n-мерный объем пересечения событий A и B, $V(B)$ — объем события B.

Определение 3.2. События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B);$$

в этом случае $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$.

Определение 3.3. События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми (в совокупности), если для всех $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, где $k = 2, \ldots, n$ выполнено равенство

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Пример 3.1. Рассмотрим семьи, имеющие двух детей. Найти вероятность того, что в семье оба ребенка мальчики, в предположении, что: а) старший ребенок — мальчик;

б) по крайней мере один из детей — мальчик.

Р е ш е н и е. В этой задаче пространство элементарных событий состоит из четырех исходов: $\Omega = \{$ММ, МД, ДМ, ДД$\}$, где событие МД означает, что старший ребенок — мальчик, младший — девочка. Предполагается что все исходы равновозможны, поэтому они имеют вероятности, равные $1/4$. Рассмотрим следующие события:

$$A = \{\text{старший ребенок — мальчик}\},$$
$$B = \{\text{младший ребенок — мальчик}\}.$$

Тогда $A \cup B = \{$по крайней мере один из детей – мальчик$\}$, $AB = \{$оба ребенка — мальчики$\}$. В пункте а) нужно найти условную вероятность $P(AB|A)$, в пункте б) — условную вероятность

$P(AB|A \cup B)$. По определению условной вероятности находим

$$P(AB|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$
$$P(AB|A \cup B) = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3.2. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет 6 очков, при условии, что на всех костях выпали грани с четным числом очков.

Р е ш е н и е. Рассмотрим события

$$A = \{\text{хотя бы на одной игральной кости выпадет «6»}\},$$
$$B = \{\text{на всех костях выпали грани с четным числом очков}\}.$$

Дополнением к событию A является событие, которое заключается в том, что при бросании трех игральных костей ни на одной из них «6» не выпадет.

Найдем условную вероятность $P(\overline{A}|B)$. Пересечением событий $\overline{A}$ и B является событие, которое состоит в том, что на каждой игральной кости выпала «2» или «4», поэтому оно содержит 8 элементарных исходов (это исходы (2,2,2), (2,2,4), (2,4,2), (4,2,2), (4,4,4), (4,4,2), (2,4,4), (4,2,4)). В событие B входит 27 элементарных исходов, поскольку на каждой из трех игральных костей может выпасть одна из цифр: 2, 4 или 6. Значит, $P(\overline{A}|B) = \dfrac{N(\overline{A}B)}{N(B)} = \dfrac{8}{27}$. Следовательно,

$$P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

Пример 3.3. Доказать неравенство $P(A|B) \geqslant 1 - \frac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

Р е ш е н и е. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{P(AB)}{P(B)} + \frac{1 - P(A)}{P(B)} \geqslant 1.$$

Это верно тогда и только тогда, когда $P(AB)+1-P(A)\geqslant P(B)$, то есть $P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$. Последнее неравенство, в свою очередь, равносильно неравенству $P(A\cup B)\leqslant 1$. Значит, исходное неравенство верно.

3.1. Брошено две игральных кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

3.2. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

3.3. Брошено три игральные кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпала шестерка, если известно, что:

а) на одной кости выпало 6 очков; б) на первой кости выпало 6 очков; в) на двух костях выпали «шестерки»; г) по крайней мере на двух костях выпало одинаковое число очков; д) на всех костях выпало одинаковое число очков; е) по крайней мере на одной кости выпало 6 очков.

3.4. Из 100 карточек с числами 00, 01, ..., 98, 99 случайно выбирается одна. Пусть ξ_1 и ξ_2— соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найти условную вероятность события $P\{\xi_1=i|\xi_2=0\}$, $i=0,1,\ldots,18$.

3.5. Известно, что при бросании 10 игральных костей появилась по крайней мере одна единица. Какова вероятность, что появились две или более единицы?

3.6. Восемь различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность, что две определенные книги окажутся на первых двух местах, если известно, что они стоят рядом.

3.7. В ящике 7 белых и три черных шара. Без возвращения извлекаются три шара. Известно, что среди них есть черный шар. Какова вероятность того, что два другие шара белые?

3.8. Доказать, что если $P(A|B)>P(A)$, то $P(B|A)>P(B)$.

3.9. Верно ли равенство $P(A|B)+P(A|\overline{B})=1$?

3.10. Шесть человек садятся в лифт на первом этаже 12-этажного здания. Каждый из них может выйти с одинаковой вероятностью на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все выйдут на разных этажах при условии, что на втором и третьем этаже никто не выходил.

3.11. Шесть пассажиров садятся на остановке в поезд, состоящий из четырех вагонов. Каждый из пассажиров может сесть с одинаковой вероятностью в любой вагон. Найти вероятность, что пассажиры сядут в один вагон при условии, что хотя бы в один вагон не сядет ни один пассажир.

3.12. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет единица. Предполагая, что при первом испытании единица не выпала, найти вероятность того, что потребуется не менее трех бросаний.

3.13. Семь шаров случайным образом распределяются по семи ящикам. Известно, что ровно два ящика остались пустыми. Найти условную вероятность того, что в одном из ящиков окажется три шара.

3.14. Пять студентов садятся в лифт на первом этаже 20-этажного здания. Каждый из них может выйти с одинаковой вероятностью на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все студенты выйдут на одном этаже при условии, что лифт останавливался не более трех раз.

Пример 3.4. Игральная кость брошена два раза. Пусть i и j — числа очков, выпавших при этих испытаниях. Будут ли независимы события $A = \{i \text{ делится на} j\}$ и $B = \{i + j \text{ делится на } 2\}$?

Р е ш е н и е. Пространство элементарных событий, соответствующее данному эксперименту, $\Omega = \{(i, j), i, j = 1, 2, \ldots, 6\}$ имеет 36 исходов. Событие A содержит 14 элементарных событий: $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$. Событие B состоит из 18 элементарных событий — в него входят пары (i, j), для которых i и j имеют одинаковую четность. Пересечению событий A и B благоприятствуют следующие исходы: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$, $(6, 2)$, $(6, 6)$, их количество

$N(AB) = 10$. Согласно классическому определению вероятностей

$$P(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{5}{18}.$$

Проверим условие независимости событий A и B :

$$P(AB) = \frac{5}{18} \neq \frac{7}{36} = \frac{7}{18} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B).$$

Поскольку это условие не выполняется, то события A и B зависимы.

Пример 3.5. Пусть A и B — независимые события. Доказать, что если $A \cup B$ и $A \cap B$ независимы, то либо $P(A) = 1$, либо $P(B) = 1$, либо $P(A) = 0$, либо $P(B) = 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку события A и B, а также AB и $A \cup B$ независимы, то

$$P\big(AB \cap (A \cup B)\big) = P(AB)\, P(A \cup B) = P(A)P(B)P(A \cup B).$$

С другой стороны, так как $AB \cap (A \cup B) = AB$, то

$$P\big(AB \cap (A \cup B)\big) = P(AB) = P(A)P(B).$$

Следовательно,

$$P(A)P(B) - P(A)P(B)P(A \cup B) = P(A)P(B)\big(1 - P(A \cup B)\big) = 0,$$
$$P(A)P(B)\big(1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)\big) = 0,$$
$$P(A)P(B)(1 - P(A))(1 - P(B)) = 0.$$

Таким образом, либо $P(A) = 1$, либо $P(B) = 1$, либо $P(A) = 0$, либо $P(B) = 0$.

Пример 3.6. Случайная точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Рассмотрим события

$$A_1 = \left\{\xi_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\}, \; A_2 = \left\{\xi_2 \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$
$$A_3 = \left\{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\xi_2 - \frac{1}{2}\right) < 0\right\}.$$

Показать, что любые два события из A_1, A_2, A_3 независимы, но все три события A_1, A_2, A_3 зависимы. Являются ли зависимыми события A_1A_2 и A_3?

Р е ш е н и е. Изобразим множества исходов, благоприятных событиям A_1, A_2, A_3. Как видно из рисунка 4, площади множеств A_1, A_2 и A_3 равны 1/2, поэтому вероятности данных событий также равны 1/2.

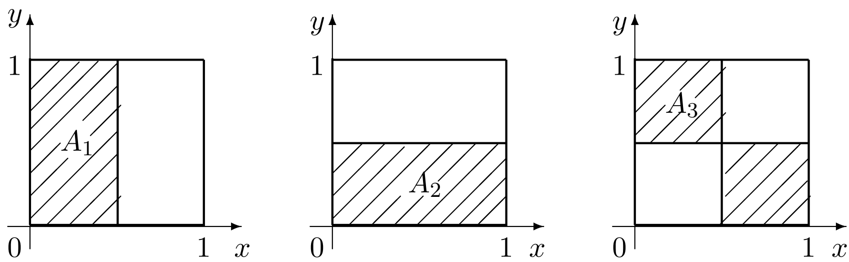


Рис. 4. События A_1, A_2, A_3

Вероятности попарного пересечения событий:

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{4},$$

поэтому имеют место равенства

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4},$$
$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{1}{4},$$
$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4},$$

следовательно, все три события попарно независимы. Однако они не являются независимыми в совокупности, поскольку

$$0 = P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

События A_1A_2 и A_3 зависимы, потому что

$$0 = P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

3.15. Зависимы или независимы:

а) несовместные события;

б) события, образующие полную группу;

в) равновозможные события?

3.16. Монета брошена 6 раз. Зависимы или независимы следующие события: «появилось нечетное число гербов» и «появились 5 или 6 гербов» ?

3.17. В ящике находится 6 белых мячей, 5 красных и 5 черных. Из ящика наудачу извлекаются 4 мяча. Зависимы или независимы события: «появилось хотя бы 3 белых мяча» и «все мячи одного цвета» ?

3.18. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассмотрим следующие события:

$A = \{$появление туза$\}$;

$B = \{$появление карты красной масти$\}$;

$C = \{$появление бубнового туза$\}$;

$D = \{$появление десятки$\}$.

Зависимы или независимы следующие пары событий:

а) A и B; б) A и C; в) B и C; г) B и D; д) C и D?

3.19. Бросаются две игральные кости. Рассмотрим события

$A = \{$на первой кости выпало нечетное число очков $\}$;

$B = \{$на второй кости выпало нечетное число очков $\}$;

$C = \{$сумма очков на обеих костях нечетна$\}$.

Показать, что события A, B и C попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

3.20. Брошены две игральные кости. Определим события

$A_l = \{$число очков, выпавшее на первой кости, делится на $l\}$;

$B_l = \{$число очков, выпавшее на второй кости, делится на $l\}$;

$C_l = \{$сумма очков, выпавших на первой и второй костях, делится на $l\}$.

Установить, являются ли независимыми следующие пары событий: а) A_l, B_k — при любых l, k; б) A_2, C_2; в) A_4, C_4?

3.21. Игральная кость брошена два раза. Пусть X_1 и X_2— числа очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события

$A_1 = \{X_1$делится на 2,X_2делится на 3$\}$;

$A_2 = \{X_1$делится на 3, X_2делится на 2$\}$;

$A_3 = \{X_1$делится на$X_2\}$;

$A_4 = \{X_2$делится на$X_1\}$;

$A_5 = \{X_1 + X_2$делится на 2$\}$;

$A_6 = \{X_1 + X_2$делится на 3$\}$.

Найти все пары $\{A_i, A_j\}$, тройки $\{A_i, A_j, A_k\}$ и т. д. взаимно независимых событий.

3.22. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$. При каких значениях r независимы события $A_r = \{|\xi_1 - \xi_2| \geqslant r\}$ и $B_r = \{\xi_1 + \xi_2 \leqslant 3r\}$?

3.23. Доказать, что если A и B независимы, то независимы A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

3.24. Доказать, что если $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, то события A и B независимы.

3.25. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя. Показать, что тогда $P(A)$ равно 0 или 1.

3.26. Пусть A и B — независимые события и $P(A \cup B) = 1$. Доказать, что либо A, либо B имеет вероятность, равную 1.

§ 4. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Формулы сложения вероятностей.

Вероятность *объединения* событий A и B выражается формулой

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если события A и B несовместны, то есть $AB = \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность *дополнения* к событию A находится по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Вероятность *объединения* событий $A_1, \ldots, A_n$:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + \\ + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ несовместны, то

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Формулы умножения вероятностей.

Вероятность *пересечения* событий A и B находится через условную вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad \text{или} \quad P(AB) = P(B)P(A|B).$$

Для независисых событий A и B

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий:

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ — независимы, то

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n).$$

Пример 4.1. В ящике a белых, b черных и c красных шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одного цвета.

Р е ш е н и е. Испытанием будет случайное вынимаеие трех шаров. Элементарными событиями являются всевозможные неупорядоченные выборки без возвращения размера 3 из ящика с $a+b+c$ шарами. Число всех элементраных событий равно

$$N(\Omega) = C^3_{a+b+c} = \frac{(a+b+c)!}{3!(a+b+c-3)!}.$$

Рассмотрим событие $C = \{$по крайней мере два шара одного цвета$\}$, тогда $\overline{C} = \{$все шары разного цвета$\}$. Событие $\overline{C}$ является суммой 6 непересекающихся событий БЧК, БКЧ, ЧБК, ЧКБ, КБЧ, КЧБ, где событие БЧК означает, что сначала достали белый шар, потом черный и потом красный; поэтому $P(\overline{C}) = \dfrac{6\,abc}{C^3_{a+b+c}}$. Следовательно,

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{6abc}{C^3_{a+b+c}}.$$

Пример 4.2. Два стрелка, независимо один от другого, стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна $0,7$; для второго — $0,8$. Какова вероятность того, что при залпе в мишень попадет только один из стрелков?

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие, которое состоит в том, что в мишень попадет только один из стрелков, также рассмотрим события $A_i = \{$i-й стрелок попадет$\}, i=1,2$. По условию $P(A_1)=0,7$, $P(A_2) = 0,8$. Выразим событие A через события A_1 и A_2 :

$$A = A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1 A_2.$$

Так как события $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$ несовместны, то

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2).$$

События A_1, A_2 независимы (по условию), поэтому независимы пары событий $\overline{A}_1$, A_2 и A_1, $\overline{A}_2$. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,38.$$

Пример 4.3. Два стрелка, независимо один от другого, делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p_1, для второго p_2. Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше пробоин. Найти вероятность того, что выиграет первый стрелок.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующие события:

$$\begin{gathered} C = \{\text{выиграет 1-й стрелок}\}, \\ A_i = \{\text{1-й стрелок попал } i \text{ раз}\}, \quad i = 0, 1, 2, \\ B_i = \{\text{2-й стрелок попал } i \text{ раз}\}, \quad i = 0, 1, 2. \end{gathered}$$

Событие A произойдет, если у первого стрелка в мишени будет 2 пробоины, а у второго 0 или 1, или если у первого стрелка будет 1 пробоина, а у второго 0. Значит, вероятность события C равна вероятности суммы событий A_2B_0, A_2B_1 и A_1B_0. Поскольку любые события A_i и B_j, $i, j = 0, 1, 2$ независимы, то

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_2B_0) + P(A_2B_1) + P(A_1B_0) = \\ &= P(A_2)P(B_0) + P(A_2)P(B_1) + P(A_1)P(B_0) = \\ &= p_1^2(1-p_2)^2 + 2p_1^2p_2(1-p_2) + 2p_1(1-p_1)(1-p_2)^2. \end{aligned}$$

Пример 4.4. В ящике 6 белых и 5 черных шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:

а) ровно 2 белых шара;

б) меньше чем 2 белых шара;

в) хотя бы один белый шар.

Р е ш е н и е. Испытанием будет случайное извлечение четырех шаров. Элементарными событиями являются всевозможные неупорядоченые выборки без возвращения размера 4 из ящика с 11 шарами. Число всех элементарных событий равно $C_{11}^4 = 330$.

а) Пусть событие A_1 — среди вынутых шаров ровно 2 белых шара. Значит, среди вынутых шаров 2 белых (которые достаем из 6 белых C_6^2 способами) и 2 черных (их достаем из 5 черных C_5^2 способами).

$$P(A_1) = \frac{C_6^2 \cdot C_5^2}{330} = \frac{5}{11}.$$

б) Пусть событие A_2 — среди вынутых шаров меньше чем 2 белых шара. Это событие состоит из двух несовместных событий B_1 и B_2, где B_1 — среди вынутых шаров только один белый и три черных шара, B_2 — среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные. Найдем $P(B_1) = \dfrac{C_6^1 \cdot C_5^3}{330} = \dfrac{60}{330}$, $P(B_2) = \dfrac{C_5^4}{330} = \dfrac{5}{330}$. Так как события B_1 и B_2 несовместны,

$$P(A_2) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{13}{66}.$$

в) Пусть A_3 — среди вынутых шаров хотя бы один белый. Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый и 3 черных (C_1), 2 белых и 2 черных (C_2), 3 белых и 1 черный (C_3), 4 белых (C_4). Вероятность события A_3 можно найти как сумму вероятностей четырех событий $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, но это приводит к сложным вычислениям. Проще сначала найти вероятность противоположного события $\overline{A}_3$, состоящего в том, что среди вынутых шаров нет ни одного белого. Тогда

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A}_3) = 1 - \frac{5}{330} = \frac{65}{66}.$$

Пример 4.5. В ящике 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно вынимают из ящика по одному шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Р е ш е н и е. Обозначим через A_i, $i = 1, \ldots, 6$ события, состоящие в том, что белый шар вынут из ящика при i-м испытании (при нечетных номерах i первым игроком, при четных — вторым). Тогда $\overline{A}_i$, $i = 1, \ldots, 6$ — события, состоящие в том, что из ящика при i-м испытании вынут черный шар. Первый игрок может выиграть в следующих случаях: если он сразу достанет белый шар, т. е. если произойдет событие A_1, если он достанет черный шар, второй игрок также достанет черный шар, потом первый достанет белый шар, при этом произойдет событие $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Также первый игрок может выиграть, если произойдет $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5$. Вероятность $P(A_1) = \dfrac{1}{3}$, следующую вероятность находим по теореме умножения:

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2).$$

Если произошло событие $\overline{A}_1$, в ящике осталось 2 белых и 3 черных шара, поэтому $P(\overline{A}_2|\overline{A_1}) = \dfrac{3}{5}$. При условии $\overline{A}_1\overline{A}_2$ в ящике осталось 2 белых и 2 черных шара, откуда

$$P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

Аналогично, по теореме умножения находим

$$\begin{aligned} &P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5) = \\ &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)P(A_5|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Вероятность выигрыша первого игрока

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

Пример 4.6. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятности событий:

а) $A_1 = \{$первый студент взял «хороший» билет$\}$;
б) $A_2 = \{$второй студент взял «хороший» билет$\}$;
в) $A_3 = \{$оба студента взяли «хорошие» билеты$\}$.

Р е ш е н и е. Число всех исходов $N(\Omega) = 25$, число благоприятных исходов для события A_1 равно числу «хороших» билетов, поэтому вероятность события A_1 находится по классическому определению вероятностей:

$$P(A_1) = \frac{N(A_1)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5}.$$

События A_1 и A_2 зависимы, потому что, если первый студент взял «хороший» билет, то у второго остается меньше шансов также взять «хороший» билет. Следовательно, если произошло событие A_1, то для второго студента осталось 4 «хороших» билета, а всего осталось 24 билета, поэтому $P(A_2|A_1) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$. Таким образом,

$$P(A_2) = P(A_2A_1) + P(A_2\overline{A}_1) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(A_1)P(A_2|\overline{A}_1) = \\ = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{24} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{24} = \frac{1}{5}.$$

Аналогично находим

$$P(A_3) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{24} = \frac{1}{30}.$$

Пример 4.7. Пятеро гостей пришли в шляпах. Какова вероятность того, что наудачу надевая при расставании шляпу, каждый из них надел чужую?

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие, состоящее в том, что каждый гость надел свою шляпу. Дополнением к событию A является событие, которое состоит в том, что хотя бы один из гостей надел свою шляпу. Рассмотрим события

$$A_i = \{\text{i-й гость надел свою шляпу}\}, \quad i = 1, ..., 5.$$

Тогда $\overline{A} = A_1 \cup ... \cup A_5$. Найдем

$$P(\overline{A}) = P(A_1 \cup ... \cup A_5) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 5} P(A_i A_j) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 5} P(A_i A_j A_k) - \sum_{1 \leqslant i<j<k<\ell \leqslant 5} P(A_i A_j A_k A_\ell) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5).$$

Найдем вероятности событий A_i и их пересечений. Заметим, что число всех элементарных исходов $N(\Omega) = 5! = 120$, поскольку первый гость может взять одну из шляп пятью способами, второй — четырьмя, третий — тремя и т.д. Если же i-й гость надел свою шляпу, то остальные 4 гостя разбирают оставшиеся шляпы 4! способами, поэтому

$$P(A_i) = \frac{N(A_i)}{N(\Omega)} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}, \quad i = 1, ..., 5.$$

Если два определенные гостя надели свои шляпы, то три остальных надевают оставшиеся три шляпы 3! способами, следовательно

$$P(A_i A_j) = \frac{N(A_i A_j)}{N(\Omega)} = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}, \quad i \neq j,\ i, j = 1, ..., 5.$$

Аналогично находим следующие вероятности:

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{2!}{5!} = \frac{1}{60},\ P(A_i A_j A_k A_\ell) = P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Сумма $\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant 5} P(A_i A_j)$ содержит 10 одинаковых слагаемых, потому что количество различных пар, которые можно выбрать из 5 человек равно $C_5^2 = 10$. Сумма $\sum\limits_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 5} P(A_i A_j A_k)$ также содержит $C_5^3 = 10$ одинаковых слагаемых, и в последнюю сумму входят 5 слагаемых. Следовательно, вероятность события $\overline{A}$ равна

$$P(\overline{A}) = 5 \cdot \frac{1}{5} - 10 \cdot \frac{1}{20} + 10 \cdot \frac{1}{60} - 5 \cdot \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{19}{30}.$$

Теперь найдем вероятность события А:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}.$$

4.1. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

4.2. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча, после игры их кладут обратно. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

4.3. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна $0,8$. Какова вероятность того, что при трех независимых выстрелах он хотя бы раз поразит мишень?

4.4. Вероятность попадания снаряда в цель равна $0,3$. Сколько надо сделать независимых выстрелов, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в цель была больше $0,9$?

4.5. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно $0,3$; $0,5$; $0,7$. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени будет одна пробоина.

4.6. Из зенитного орудия производится три выстрела по снижающемуся самолету. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно $0,1$; $0,2$; $0,4$. Определить вероятность не менее двух попаданий в самолет.

4.7. Известно, что $AB \subseteq C$. Доказать, что

$$P(A) + P(B) - P(C) \leqslant 1.$$

4.8. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

4.9. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

4.10. Монета бросается до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний.

4.11. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна $0,75$. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

4.12. Из цифр $1,2,3,4,5$ сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех — вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

4.13. Из ящика, в котором 3 белых, 5 черных и 2 красных шара, два игрока поочередно вынимают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто раньше вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Найти вероятности выигрыша первого игрока, второго игрока, и вероятность того, что игра закончится вничью.

4.14. В ящике a белых и b черных шаров. Два игрока поочередно вынимают из ящика по одному шару, каждый раз возвращая его обратно и перемешивая шары. Выигравшим считается тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

4.15. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течении часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9, для второго станка такая вероятность равна 0,8 и для третьего — 0,85. Какова вероятность того, что в течении часа:

а) ни один станок не потребует внимания рабочего;

б) все три станка потребуют внимания рабочего;

в) какой-нибудь один станок потребует внимания рабочего;

г) хотя бы один станок потребует внимания рабочего?

4.16. Число страховых случаев, заявленных на протяжении одного дня, является случайной величиной X с распределением

$$P(X = n) = \frac{2}{3^{n+1}}, \quad n \geqslant 0.$$

Число страховых случаев, заявленных в течение дня, не зависит от числа страховых случаев, заявленных в любой другой день. Найдите вероятность того, что за два дня будет заявлено ровно 5 страховых случаев.

§ 5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Определение 5.1. События $A_1, \ldots, A_n$ образуют *полную группу,* если выполнены следующие условия:

1) $A_1, \ldots, A_n$ несовместны, т. е. $A_i A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$;
2) $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$;
3) $P(A_i) > 0,\ i = 1, \ldots, n.$

Формула полной вероятности. Если $A_1, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то вероятность события B находится по формуле:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k)\,.$$

Формула Байеса. Если $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ образуют полную группу, тогда

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}\,.$$

Пример 5.1. В первом ящике находится 1 белый и 9 черных шаров, во втором — 5 белых и 1 черный шар. Из первого и второго ящика без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третий ящик. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьего ящика, окажется белым.

Р е ш е н и е. Обозначим через B событие, состоящее в том, что вынутый из третьего ящика шар белый. Рассмотрим следующие события:

$$A_1 = \{\text{из 1-го и 2-го ящиков удалили по белому шару}\},$$
$$A_2 = \{\text{из 1-го ящика удалили белый шар, из 2-го — черный}\},$$
$$A_3 = \{\text{из 1-го ящика удалили черный шар, из 2-го — белый}\},$$
$$A_4 = \{\text{из 1-го и 2-го ящиков удалили по черному шару}\}.$$

События $A_1, \ldots, A_4$ образуют полную группу, поскольку они несовместны, имеют ненулевые вероятности и в сумме составляют все пространство Ω. Это означает, что данные события исчерпывают все возможные исходы эксперимента, который состоит в том, что из первого и второго ящика без возвращения удалили по одному шару. Найдем вероятности данных событий:

$$P(A_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{60}, \quad P(A_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60},$$
$$P(A_3) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{45}{60}, \quad P(A_4) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{60}.$$

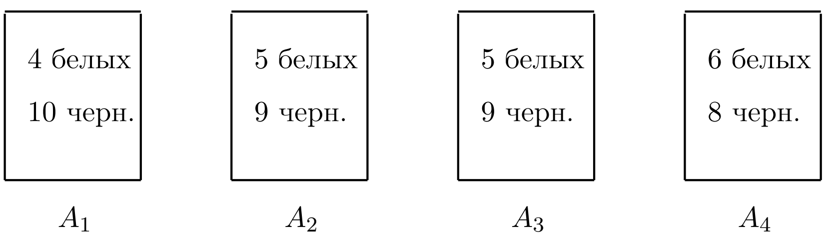


Рис. 5. Состав шаров в 3-м ящике при условии, что произошли события $A_1, \ldots, A_4$

Если произошло событие A_1, то в третьем ящике находятся 4 белых и 10 черных шаров; если произошло событие A_2 или событие A_3, то в третьем ящике находятся 5 белых и 9 черных шаров; если произошло A_4, то третий ящик содержит 6 белых и 8 черных шаров.

Найдем условные вероятности

$$P(B|A_1) = \frac{4}{14},\ P(B|A_2) = \frac{5}{14},\ P(B|A_3) = \frac{5}{14},\ P(B|A_4) = \frac{6}{14}$$

и вероятность события B по формуле полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{5}{60}\cdot\frac{4}{14} + \frac{1}{60}\cdot\frac{5}{14} + \frac{45}{60}\cdot\frac{5}{14} + \frac{9}{60}\cdot\frac{6}{14} = \frac{38}{105}.$$

Пример 5.2. В ящике 4 шара, среди которых могут быть и белые и черные, либо шары только одного из этих цветов. К ним прибавляют два белых шара. После этого из ящика случайным образом извлекают три шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые, если все предположения о первоначальном содержании ящика равновозможны.

Р е ш е н и е. Обозначим через B событие, состоящее в том, что из ящика достали три белых шара. Вероятность этого события зависит от того, каким был первоначальный состав шаров в ящике. Введем следующие события:

A_1 — в ящике было 4 белых шара;

A_2 — в ящике было 3 белых и 1 черный шар;

A_3 — в ящике было 2 белых и 2 черных шара;

A_4 — в ящике был 1 белый и 3 черных шара;

A_5 — в ящике было 4 черных шара.

События $A_1, \ldots, A_5$ образуют полную группу, поскольку они несовместны, имеют ненулевые вероятности и в сумме составляют все пространство Ω. По условию все эти события равновероятны, поэтому

$$P(A_i) = \frac{1}{5} \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Найдем условные вероятности события B при различных условиях. При условии A_1 в ящике стало 6 белых шаров, поэтому вероятность достать из такого ящика 3 белых шара $P(B|A_1) = 1$. Если произошло событие A_2, то в ящике находятся 5 белых и 1 черный шар, поэтому

$$P(B|A_2) = \frac{C_5^3}{C_6^3} = \frac{1}{2}.$$

Если произошло A_3, в ящике стало 4 белых и 2 черный шара, следовательно $P(B|A_3) = \dfrac{C_4^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{5}$. При условии A_4 в ящике 3 белых и 3 черный шара, $P(B|A_4) = \dfrac{C_3^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{20}$. При условии A_5 в ящике только 2 белых шара, поэтому $P(B|A_5) = 0$.

По формуле полной вероятности найдем

$$P(B) = \sum_{j=1}^{5} P(A_j)P(B|A_j) = \frac{1}{5}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\Big) = \frac{7}{20}.$$

Пример 5.3. Имеются три ящика с белыми и черными шарами, причем отношение числа белых шаров к числу черных равно p_1, p_2, p_3 для первого, второго и третьего ящиков соответственно. Наудачу (с вероятностью 1/3) выбирается ящик и из него шар. Оказалось, что этот шар белый. Какова вероятность того, что шар был вынут из первого ящика?

Р е ш е н и е. Обозначим через B событие, состоящее в том, что вынутый шар белый, $A_i = \{$шар вынут из i-го ящика$\}$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку ящик выбирается наудачу, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$. Пусть n_i — число белых и m_i — число черных шаров в i-м ящике, тогда

$$P(B|A_i) = \frac{n_i}{n_i + m_i} = \frac{p_i}{p_i + 1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

По формуле Байеса найдем

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{\dfrac{p_1}{p_1+1}}{\dfrac{p_1}{p_1+1} + \dfrac{p_2}{p_2+1} + \dfrac{p_3}{p_3+1}}.$$

Пример 5.4. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, как $3:2$. Вероятность, что случайно проезжающая грузовая машина будет заправляться, равна $0,1$, для легковой машины эта вероятность равна $0,2$. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность, что это грузовой автомобиль.

Р е ш е н и е. Обозначим через B событие, состоящее в том, что машина будет заправляться; A_1 — проезжающая машина грузовая, A_2 — проезжающая машина легковая. Найдем

$$P(A_1) = \frac{3}{5},\ P(A_2) = \frac{2}{5},\ P(B|A_1) = 0,1,\ P(B|A_2) = 0,2.$$

Следовательно,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0,14,$$
$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = 0,43.$$

Пример 5.5. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели названных заводов соответственно в количестве 19, 6 и 11 шт., которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока соответственно с вероятностями 0,85, 0,76 и 0,71. Рабочий берет случайно один двигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятности того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующие события: B — электродвигатель работает безотказно до конца гарантийного срока; A_i — рабочий возьмет двигатель из продукции i-го завода. Понятно, что события A_1, A_2, A_3 образуют полную группу, их вероятности

$$P(A_1) = \frac{19}{36} = 0,528,\ P(A_2) = \frac{6}{36} = 0,167,\ P(A_3) = \frac{11}{36} = 0,306.$$

Условные вероятности события B заданы по условию задачи:

$$P(B|A_1) = 0,85,\ P(B|A_2) = 0,76,\ P(B|A_3) = 0,71.$$

По формуле полной вероятности найдем

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j)P(B|A_j) = \frac{19}{36} \cdot 0,85 + \frac{6}{36} \cdot 0,76 + \frac{11}{36} \cdot 0,71 = 0,792.$$

По формуле Байеса найдем условные вероятности A_1, A_2, A_3 :

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0,528 \cdot 0,85}{0,792} = 0,566;$$

$$P(A_2|B) = \frac{0,167 \cdot 0,76}{0,792} = 0,160;$$

$$P(A_3|B) = \frac{0,306 \cdot 0,71}{0,792} = 0,274.$$

5.1. У мальчика в левом кармане 3 конфеты «Белочка» и одна конфета «Маска», а в правом — 2 конфеты «Белочки» и 2 «Маски». Он достал две конфеты из одного кармана, и оказалось, что одна из них «Белочка», а другая — «Маска». Найти вероятность того, что он достал конфеты из левого кармана, из правого кармана.

5.2. Ящик содержит один шар, про который известно, что он либо белый, либо черный с одинаковыми вероятностями. В ящик кладут один белый шар и затем наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность, что оставшийся в ящике шар — белый?

5.3. Имеются три ящика. В первом ящике находится N_1 белых и M_1 черных, во втором — N_2 белых и M_2 черных, в третьем — N_3 белых и M_3 черных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него выбираются без возвращения два шара. Один из них оказывается белым, другой — черным. Найти вероятности того, что выбор производился из первого, второго или третьего ящиков.

5.4. В ящике первоначально находилось N белых и M черных шаров. Один шар потерян и цвет его неизвестен. Из ящика без возвращения извлечены два шара, и оба оказались белыми. Найти вероятность того, что потерян белый шар.

5.5. В первом ящике находится N_1 белых и M_1 черных, во втором — N_2 белых и M_2 черных шаров. Из первого ящика во второй перекладывают шар. После тщательного перемешивания из второго ящика извлекают один шар. Какова вероятность, что он белый?

5.6. В первом ящике находится N_1 белых и M_1 черных, во втором — N_2 белых и M_2 черных, в третьем — N_3 белых и M_3 черных шаров. Из первого ящика наудачу извлекают один шар и перекладывают во второй ящик. Затем перекладывают один шар из второго ящика в третий и, наконец, из третьего в первый. С какой вероятностью состав шаров в первом ящике останется прежним?

5.7. В первом ящике находится N_1 белых и M_1 черных, во втором — N_2 белых и M_2 черных шаров. Из первого ящика без возвращения извлекаются n_1 шаров, а из второго — n_2 шаров. Все извлеченные шары кладутся в третий ящик, из которого наудачу извлекается один шар. Какова вероятность, что он белый?

5.8. В пункте проката имеется 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,90, и 5 телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0,95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.

5.9. В первом ящике находится 1 белый и 2 черных шара, а во втором — 2 белых и 3 черных шара. В третий ящик кладут два шара, случайно выбранных из первого ящика и два шара, случайно выбранных из второго. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьего ящика, окажется белым.

5.10. В группе 4 отличника, 10 хорошо успевающих и 6 слабо успевающих. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки, хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо успевающие могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наудачу один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

5.11. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу выбранной винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

5.12. В ящике находится 8 новых теннисных мячей и 5 игранных. Из ящика наудачу вынимают два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут наудачу два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми.

5.13. Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда — с вероятностью 0,7; если три снаряда — с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

5.14. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна $0,6$, а ко второму — $0,4$. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна $0,94$, а вторым — $0,98$. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

5.15. У рыбака имеется три места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закинет удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте — с вероятностью p_2; на третьем — с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

5.16. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p; кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир; с вероятностью $1 - p_0$ — один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

5.17. На склад поступили электрические лампы трех партий. Известно, что в первой партии, состоящей из 400 шт., содержится 1 % нестандартных, во второй, состоящей из 500 шт., — 2 % и в третьей, состоящей из 100 шт., — 4 % нестандартных. Со склада лампы поступили в магазин и здесь оказались расположенными случайным образом. Определить вероятность того, что

а) покупатель, берущий одну лампу, купит нестандартную;

б) покупатель, берущий две лампы, купит обе стандартные;

в) покупатель, берущий две лампы, купит одну стандартную, а другую нестандартную.

5.18. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам первой группы принадлежит 96 %, ко второй — 2 %, к третьей — 1 % и к четвертой — 1 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян первой группы равна 0,5, для семян второй группы — 0,2, для семян третьей группы — 0,18 и для семян четвертой группы — 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

§ 6. СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим последовательность n испытаний, например, n подбрасываний монеты (монета не обязательно симметрична). Результат наблюдений запишем в виде упорядоченного набора $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 1$ в случае появления «герба» (назовем это «успехом») и $a_i = 0$ в случае появления «решетки» («неуспех»). Пространство всех элементарных исходов имеет следующую структуру:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = 0, 1\}.$$

Припишем каждому элементарному событию $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ вероятность $p\,(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n-\sum a_i}$, где числа p и q неотрицательны и $p + q = 1$.

Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где $\mathfrak{A}$ — система всех подмножеств пространства Ω, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p\,(\omega)$, $A \in \mathfrak{A}$, определяет вероятностную модель, отвечающую n независимым испытаниям с двумя исходами, которую называют *схемой Бернулли.*

Рассмотрим события

$$A_k = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_1 + \ldots + a_n = k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

означающие, что в n испытаниях произойдет ровно k «успехов». Вероятность события A_k будем обозначать $P_n(k)$, она равна

$$P(A_k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Набор вероятностей $P(A_0), \ldots, P(A_n)$ называется *биномиальным распределением.*

Наивероятнейшее число k_0 появления «успехов» в n испытаниях удовлетворяет неравенствам

$$np - q \leqslant k_0 < np + p.$$

Если $np - q$ не является целым числом, то k_0 единственно. Если $np - q$ — целое число, то наивероятнейших значений два: $k_0^1 = np - q$ и $k_0^2 = np + p = k_0^1 + 1$.

Поскольку при больших n ($n > 20$) непосредственное использование формулы для вероятностей биномиального распределения сложно, то для приближенного вычисления $P_n(k)$ используют предельные теоремы: локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа и теорему Пуассона.

1. Локальная предельная теорема применяется, если надо вычислить вероятность $P_n(k)$ и $npq > 10$. Сначала найдем

$$\sigma = \sqrt{npq} \quad \text{и} \quad x = \frac{k - np}{\sigma}.$$

Из таблицы или с помощью калькулятора находим приближенное значение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$

Если $x < 0$, пользуемся четностью функции $\varphi(x)$. Вероятность $P_n(k)$ находится из приближенного равенства

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma}\,\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\dfrac{(k-np)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа применяется для приближенного нахождения сумм вероятностей $P_n(k)$. Обозначим через $P_n(k_1, k_2)$ вероятность того, что событие A наступит число раз, не меньше k_1 и не больше k_2, то есть

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k).$$

Предполагаем, что число $k_2 - k_1$ достаточно велико. Вначале находим приближенные значения

$$\sigma = \sqrt{npq}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sigma}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sigma}.$$

По таблице находим значения функции Лапласа

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad i = 1, 2,$$

учитывая, что функция $\Phi(x)$ нечетная. Теорема Муавра–Лапласа утверждает, что

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

3. Теорема Пуассона применяется, если n велико, а npq мало (то есть $npq < 10$.) Это бывает в том случае, если вероятность p или q является достаточно маленьким числом. Пусть p мало (если q мало, можно понимать q как вероятность «успеха»). Найдем $\lambda = np$, тогда по теореме Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Для вычисления вероятности $P_n(k)$ можно воспользоваться калькулятором или таблицей распределения Пуассона.

Пример 6.1. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника три партии из четырех или пять из восьми?

Р е ш е н и е. По условию, вероятность успеха в отдельно взятом испытании, $p = \dfrac{1}{2}$. Обозначим через $P_4(3)$ вероятность выиграть у равносильного противника три партии из четырех и через $P_8(5)$ вероятность выиграть пять партий из восьми, тогда

$$P_4(3) = C_4^3 \, p^3 (1-p)^{4-3} = \frac{4!}{3!\,1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

$$P_8(5) = C_8^5 \, p^5 (1-p)^3 = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{56}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

Таким образом, выполнено неравенство $P_4(3) > P_8(5)$, которое означает, что более вероятно выиграть у равносильного противника три партии из четырех, чем пять из восьми.

Пример 6.2. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.

Р е ш е н и е. Найдем вероятность успеха p в одном испытании, которое заключается в бросании трех игральных костей. Число всех элементарных исходов в этом испытании равно 6^3, благоприятным исходом является только один — это исход $(1, 1, 1)$, поэтому $p = \dfrac{1}{6^3}$. Всего проводится пять независимых испытаний, в которых должны произойти ровно два успеха, следовательно,

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6^3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)^3 = \frac{10(6^3 - 1)^3}{6^{15}}.$$

Пример 6.3. В единичный квадрат вписан круг. В квадрат случайным образом бросают 6 точек. Найти вероятность того, что 4 из них попадут в круг, а 2 не попадут.

Р е ш е н и е. Нужно найти вероятность, что из 6 независимых испытаний — бросаний точки в квадрат, произойдет ровно 4 «успеха» — попаданий этой точки в круг. Согласно геометрическому определению вероятностей, для одной точки вероятность попасть в круг равна отношению площадей этого круга и квадрата

$$p = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\pi}{4}.$$

Вероятность, что точка не попадает в круг, $q = 1 - \dfrac{\pi}{4}$, поэтому вероятность, что в круг попадут ровно 4 точки, равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = 15\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

6.1. В каждой из 6 колод карт выбирается наудачу по одной карте. Найти вероятность того, что 4 карты окажутся красной масти, а две — черной.

6.2. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что 2 раза появится число очков, кратное трем.

6.3. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника не менее трех из четырех партий или не менее пяти из восьми?

6.4. Для данного баскетболиста вероятность забросить в корзину мяч равна $0,6$. Произведено 8 бросков. Какова вероятность того, что при этом будет ровно 2 попадания? Найти наиболее вероятное число попаданий и соответствующую вероятность.

6.5. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы наиболее вероятное число появления шестерки было бы 32?

6.6. Какова вероятность того, что дни рождения шести людей приходятся на два месяца, оставляя ровно десять месяцев свободными? Предполагается независимость и равновероятность всех месяцев.

6.7. Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании появятся 3 «герба».

6.8. Отрезок AB разделен точкой C в отношении $2:1$. На этот отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C, а две — правее.

6.9. В правильный треугольник вписана окружность. В этот треугольник наудачу брошены 6 точек. Найти вероятность того, что две из них попадут в круг, ограниченный окружностью, а четыре точки не попадут.

6.10. В цилиндр вписан шар. В этот цилиндр наудачу брошены 5 точек. Найти вероятность, что ровно 2 из них попадут в шар.

6.11. В ящике три шара: 1 белый и 2 черных. Наудачу вынимают пять раз один шар и каждый раз возвращают обратно. Найти:

а) вероятность того, что белый шар вынули два раза;

б) наивероятнейшее число появлений белого шара и его вероятность.

6.12. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $q = 1 - p$ появится $m + n$ успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.

6.13. Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна p. Найти вероятность того, что k−й по порядку успех происходит при ℓ−том испытании.

6.14. Две игральные кости бросают до выпадения «6» хотя бы на одной из них. Найти вероятность того, что впервые «6» появится при k-м бросании, $k = 1, 2, 3, \ldots$

6.15. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит «герб». Найти вероятности событий:

а) игра закончится до четвертого бросания;

б) выиграет первый игрок;

в) выиграет второй игрок.

6.16. Частица движется по целым точкам прямой, движение этой частицы определяет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1: если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае — в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m.

Пример 6.4. В каждом из 700 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие A происходит:

а) точно 270 раз;

б) не меньше чем 230 и не больше чем 270 раз;

в) не меньше чем 270 раз.

Р е ш е н и е. Найдем $npq = 700 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 159,25 > 10$, поэтому можно применять локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа.

а) Задано $n = 700$, $p = 0,35$, $k = 270$, тогда

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{159,25} \approx 12,6;$$
$$x \approx \frac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx \frac{25}{12,6} \approx 1,98.$$

Из таблицы для функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ найдем $\varphi(1,98) \approx 0,0562$, тогда вероятность, что событие A происходит ровно 270 раз, равна

$$P_{700}(270) \approx \frac{0,05618}{12,6} \approx 0,00446.$$

б) Для вычисления вероятности $P_{700}(230, 270)$ найдем

$$x_1 \approx \frac{230 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx -1,19, \quad x_2 \approx \frac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx \frac{25}{12,6} \approx 1,98.$$

Найдем приближенное значение вероятности, используя таблицу для функции Лапласа $\Phi(x)$:

$$P_{700}(230, 270) \approx \Phi(1,98) - \Phi(-1,19) = \Phi(1,98) + \Phi(1,19) \approx$$
$$\approx 0,4761 + 0,3830 \approx 0,8591.$$

в) Здесь $x_1 \approx 1,98$, $x_2 \approx \dfrac{700 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx 36,1$. Найдем

$$P_{700}(270, 700) \approx \Phi(36,1) - \Phi(1,98) \approx 0,5 - 0,4761 \approx 0,0239.$$

Пример 6.5. Многие ботаники делали опыты по скрещиванию желтого (гибридного) гороха. По гипотезе Менделя вероятность появления зеленого гороха в таких опытах равна 1/4. Какова вероятность того, что при 34153 скрещиваниях зеленый горох будет получен от 8493 до 8507 раз?

Р е ш е н и е. Найдем $npq = 34153 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \approx 6403,69 > 10$, поэтому для приближенного нахождения искомой вероятности можно применять интегральную теорему Муавра–Лапласа.

Для вычисления вероятности $P_{34153}(8493, 8507)$ найдем

$$\sigma = \sqrt{npq} \approx 80,02, \; x_1 \approx \frac{8493 - 34153 \cdot 0,25}{80,02} \approx -0,57,$$

$$x_2 \approx \frac{8507 - 34153 \cdot 0.25}{80,02} \approx -0,39.$$

Следовательно, искомая вероятность приближенно равна

$$P_{34153}(8493, 8507) \approx \Phi(-0,39) - \Phi(-0,56) = \Phi(0,56) - \Phi(0,39) \approx$$
$$\approx 0,2123 - 0,1517 \approx 0,0606.$$

Пример 6.6. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $1/200$. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:

а) точно одно неправильное соединение;

б) не больше чем 2 неправильных соединения;

в) не меньше чем 3 неправильных соединения.

Р е ш е н и е. Здесь количество испытаний n велико, а npq мало, поэтому воспользуемся теоремой Пуассона.

а) Найдем $\lambda = np = 1$, тогда приближенное значение вероятности $P_{200}(1)$ равно $P_{200}(1) \approx e^{-1} \approx 0,3679$.

б) Найдем вероятность

$$P_{200}(0, 2) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) \approx e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \approx$$
$$\approx 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 \approx 0,9197.$$

в) Найдем вероятность противоположного события, так как в этом случае нужно вычислять намного меньше слагаемых:

$$P_{200}(3, 200) = 1 - P_{200}(0, 2) \approx 1 - 0,9197 \approx 0,0803.$$

6.17. Вероятность того, что посаженное семечко подсолнуха прорастет, равна $0,8$. Найти вероятность того, что из 150 посаженных семечек прорастет ровно 110.

6.18. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна $0,75$. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень ровно 75 раз.

6.19. Две монеты подбрасывают 4800 раз. Найти приближенное значение вероятности того, что событие «герб-герб» появится меньше 1140 раз.

6.20. Проводятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность наступления события A равна $0,8$. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появится более 79 раз.

6.21. Вероятность наступления события в каждом отдельном испытании равна $0,9$. Сколько надо произвести испытаний, чтобы с вероятностью $0,6826$ можно было ожидать, что относительная частота появления события отклоняется от его вероятности не более чем на $0,0001$?

6.22. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна $3/4$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклоняется от его вероятности по абсолютной величине не более чем на $0,0001$.

6.23. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Найти приближенное значение вероятности того, что при 100 выстрелах будет не больше трех попаданий.

6.24. В городе ежегодно рождается в среднем 122 500 детей. Принимая вероятность рождения мальчика равной 0,51, найти вероятность того, что число мальчиков превосходит число девочек не менее чем на 1500.

6.25. Из 10 винтовок 4 не проверены в прицельной стрельбе. Вероятность попадания в мишень из проверенной винтовки приближенно равна $0,9$, из непроверенной $0,3$. Из наугад выбранной винтовки выпущено по мишени 200 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий S_{200} удовлетворяет неравенству $120 \leqslant S_{200} \leqslant 150$?

6.26. Точка находится в начале координат. Подбрасывается игральная кость. Если на ней выпаде 6 очков, то точка перемещается на 7 метров вправо, если же выпадет любое другое число очков, то она сдвинется на 1 метров влево. Найти вероятность того, что точка будет находиться на расстоянии от 2 до 3 километров от начала координат после 8000 бросаний кости.

6.27. На одной странице 2400 знаков. При типографском наборе вероятность искажения одного знака равна $1/800$. Найти приближенное значение вероятности того, что на странице не менее двух опечаток.

6.28. Вероятность сбить самолет винтовочным выстрелом равна $0,004$. Какова вероятность уничтожить самолет при залпе из 250 винтовок?

6.29. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна $0,001$. Найти вероятность попадания в цель двумя и более пулями, если число выстрелов равно 5000.

6.30. Книга в 500 страниц содержит 500 опечаток. Оценить вероятность того, что на заданной странице не менее трех опечаток.

6.31. Счетчик Гейгера регистрирует частицы, вылетающие из некоторого радиоактивного источника, с вероятностью $0,0001$. Известно, что за время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Какова вероятность того, что счетчик:

а) зарегистрировал более 10 частиц?

б) не зарегистрировал ни одной частицы?

в) зарегистрировал ровно 3 частицы?

6.32. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки)?

6.33. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Устанавливать 2000 каналов связи нерационально. Сколько каналов связи необходимо установить, чтобы только один из сотни абонентов, наугад выбравший момент разговора, нашел бы все линии занятыми? Вероятность того, что при случайном звонке линия занята, равна $1/30$.

6.34. Частные конторы страхования жизни заинтересрваны в получении прибыли за счет своих клиентов. В одной такой конторе застраховано 10000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти клиента в течение года примерно равна $0,006$. Каждый клиент 1 января вносит 12 долларов. Если в течение года он умрет, то контора обязана выплатить его родственникам 1000 долларов. Чему равна вероятность того, что

а) контора разорится;

б) контора получит не менее 40000 долларов прибыли?

6.35. Компания устанавливает цену на страхование убытков от наводнения, используя следующие предположения:

1) на протяжении одного календарного года не может быть больше одного наводнения;

2) вероятность того, что на протяжении одного года будет наводнение, равна $0,03$.

3) число наводнений на протяжении любого года не зависит от числа наводнений на протяжении любого другого года.

Используя предположения компании, найдите вероятность того, что за 20 лет будет меньше трех наводнений.

§ 7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F})$ — некоторое измеримое пространство и $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ — числовая прямая с системой борелевских множеств $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Определение 7.1. Действительная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на $(\Omega, \mathfrak{F})$, называется случайной величиной, если для любого борелевского подмножества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ его прообраз A относительно функции ξ является событием из $\mathfrak{F}$, то есть

$$A = \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

Чтобы определить, является ли произвольная числовая функция $\xi(\omega)$ случайной величиной, удобно пользоваться следующим критерием.

Лемма 7.1. Для того, чтобы функция $\xi = \xi(\omega)$ была случайной величиной, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$

$$A_x \doteq \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\} \in \mathfrak{F} \quad \text{или} \quad B_x \doteq \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}.$$

О п р е д е л е н и е 7.2. Пусть ξ — случайная величина. Рассмотрим множества из $\mathfrak{F}$ вида $\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Сигма-алгебра, образованная такими множествами, называется σ-алгеброй, порожденной случайной величиной ξ и обозначается $\mathfrak{F}_\xi$.

Пример 7.1. Пусть Ω — произвольное множество, содержащее более одного элемента, $\mathfrak{F} = \{\Omega, \varnothing\}$ — тривиальная σ-алгебра. Для измеримого пространства $(\Omega, \mathfrak{F})$ описать все случайные величины.

Р е ш е н и е. Покажем, что любая функция $\xi(\omega) = C$, где $C \in \mathbb{R}$ — постоянная, является случайной величиной. Для этого воспользуемся леммой 7.1 и построим множества A_x при различных значениях $x \in \mathbb{R}$. Если $x \geqslant C$, то

$$A_x \doteq \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\} = \Omega \in \mathfrak{F}.$$

Если $x < C$, то $A_x = \varnothing \in \mathfrak{F}$, следовательно, функция $\xi(\omega) = C$ является случайной величиной.

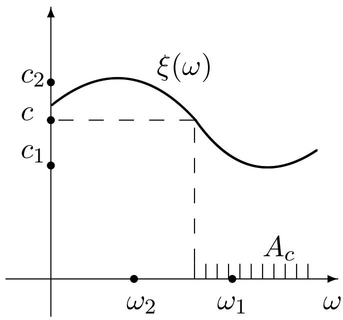


Рис. 6. Функция $\xi(\omega)$ не является случайной величиной

Теперь докажем, что для заданного измеримого пространства $(\Omega, \mathfrak{F})$ только постоянные функции могут быть случайными величинами. Рассмотрим функцию $\xi(\omega)$, принимающую хотя бы два различных значения, пусть $\xi(\omega_1) = c_1$, $\xi(\omega_2) = c_2$, и пусть для определенности $c_1 < c_2$. Выберем любое число c, удовлетворяющее неравенству $c_1 < c < c_2$ и построим множество $A_c \doteq \{\omega : \xi(\omega) \leqslant c\}$.

Отметим, что $\omega_1 \in A_c$, поэтому A_c не является пустым множеством; $\omega_2 \notin A_c$, поэтому $A_c \neq \Omega$. Следовательно, существует такое значение c, что $A_c \notin \mathfrak{F}$ и функция $\xi(\omega)$ не является случайной величиной.

Пример 7.2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\xi(\omega)$ — вещественная функция, определенная на Ω. Обязана ли ξ быть случайной величиной, если случайной величиной является

а) ξ^2; б) e^{ξ}.

Р е ш е н и е. а) Рассмотрим измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{F})$, где $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F} = \{\Omega, \varnothing\}$ — тривиальная сигма-алгебра. Воспользуемся результатами предыдущего примера. Для данного измеримого пространства случайными величинами являются только постоянные функции, поэтому необходимо привести пример такой функции, чтобы ξ^2 являлась постоянной, но при этом чтобы ξ не была постоянной. Одним из таких примеров является функция

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/2), \\ -1, & \omega \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

б) Пусть e^{ξ} является случайной величиной. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место включение

$$A_x \doteq \{\omega : e^{\xi(\omega)} \leqslant x\} \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, для $x > 0$ имеем $\{\omega : \xi(\omega) \leqslant \ln x\} \in \mathfrak{F}$. Поскольку для любого числа $y \in \mathbb{R}$ найдется $x > 0$ такое, что $y = \ln x$, то множество $\{\omega : \xi(\omega) \leqslant y\}$ принадлежит сигма-алгебре $\mathfrak{F}$ и функция $\xi(\omega)$ является случайной величиной.

Пример 7.3. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F})$ — измеримое пространство, Ω — отрезок $[0, 1]$, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра, порожденная множествами $[0, 1/2]$, $(1/2, 3/4]$. Задана функция

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1/4, & \omega \in [0, 1/2), \\ 1/2, & \omega \in [1/2, 3/4), \\ \omega, & \omega \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Определить, является ли ξ случайной величиной.

Р е ш е н и е. Опишем σ-алгебру $\mathfrak{F}$. Кроме $[0,1/2]$, $(1/2,3/4]$, пустого множества и пространства Ω, в $\mathfrak{F}$ входят следующие множества: $(3/4,1]$, $(1/2,1]$, $[0,3/4]$, $[0,1/2]\cup(3/4,1]$.

Построим множества A_x для различных значений x. Если $x \geqslant 1$, то $A_x \doteq \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\} = \Omega \in \mathfrak{F}$. Если $x \in (-\infty, 1/4)$, то $A_x = \varnothing \in \mathfrak{F}$; при $x \in [1/4, 1/2)$ множество $A_x = [0,1/2] \in \mathfrak{F}$; при $x \in [1/2, 3/4)$, $A_x = [0,3/4] \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим $x \in [3/4, 1)$, тогда $A_x = [0,x]$.

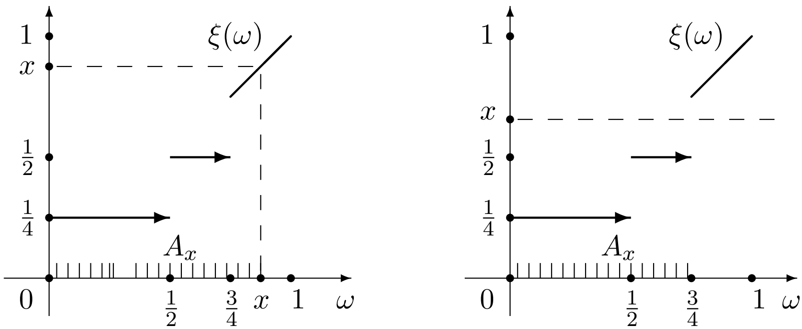


Рис. 7. Функция $\xi(\omega)$ и множества A_x

Понятно, что при всех $x \in (3/4, 1)$ множества A_x не принадлежат сигма-алгебре $\mathfrak{F}$, поэтому функция $\xi = \xi(\omega)$ не является случайной величиной.

7.1. Пусть Ω — произвольное множество, содержащее более одного элемента, A и B — его подмножества, не совпадающие ни с Ω, ни с $\varnothing$. Описать все случайные величины, если σ-алгебра $\mathfrak{F}$ порождена

а) множеством A, т. е. $\mathfrak{F} = \{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$;

б) множествами A и B.

7.2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\xi(\omega)$ — определенная на Ω вещественная функция такая, что для каждого вещественного c множество $A_c = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = c\}$ является событием. Обязана ли ξ быть случайной величиной?

7.3. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\xi(\omega)$ — вещественная функция, определенная на Ω. Обязана ли ξ быть случайной величиной, если случайной величиной является

а) $|\xi|$; б) $\cos\xi$; в) $2\xi + 1$; г) $[\xi]$ (целая часть ξ).

7.4. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, где Ω — отрезок $[0, 1]$, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра, порожденная интервалами $[0, 1/4)$, $[1/4, 3/4)$, P — мера Лебега, заданы функции

$$\xi_1(\omega) = \begin{cases} 1/4, & \omega \in [0, 1/4), \\ 1/2, & \omega \in [1/4, 3/4), \\ 1, & \omega \in [3/4, 1], \end{cases} \qquad \xi_2(\omega) = \begin{cases} 1/4, & \omega \in [0, 1/4), \\ \omega/2, & \omega \in [1/4, 3/4), \\ 1, & \omega \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Будут ли функции ξ_1 и ξ_2 случайными величинами?

7.5. В ящике 3 белых и 2 черных шара. Эксперимент состоит в последовательном извлечении всех шаров из ящика. Построить вероятностное пространство. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной ξ, если: а) ξ — число белых шаров, предшествующих первому черному шару; б) ξ — число черных шаров среди извлеченных; в) $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 — число белых шаров, предшествующих первому черному шару, ξ_2 — число черных шаров, предшествующих первому белому шару.

7.6. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ представляет собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной ξ, если:

$$\text{а) } \xi(\omega) = \begin{cases} 1/4, & \omega \in [0, 1/4), \\ 1/2, & \omega \in [1/4, 3/4), \\ 1, & \omega \in [3/4, 1], \end{cases} \qquad \text{б) } \xi(\omega) = \frac{\omega}{2}, \quad \text{в) } \xi(\omega) = \frac{1}{2}.$$

7.7. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, причем Ω — вещественная прямая, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра борелевских множеств. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\xi = \cos\omega$.

7.8. Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины. Обязаны ли они быть независимыми, если независимы случайные величины ξ_1^2 и ξ_2^2?

7.9. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, заданы случайные величины ξ_1 и ξ_2. Будут ли ξ_1 и ξ_2 независимы, если:

а) $\xi_1 = \omega^2$, $\xi_2 = 1 - \omega^2$; б) $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = \omega$;

в) $\xi_1 = \omega$, $\xi_2 = \begin{cases} 1/2, & \omega \in [0, 1/4), \\ 1/4, & \omega \in [1/4, 1/2), \\ 1, & \omega \in [1/2, 1]. \end{cases}$

§ 8. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$.

Определение 8.1. Вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, определенная для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ равенством

$$P_\xi(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\},$$

называется *распределением вероятностей случайной величины* ξ на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Основное определение. Функция

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\},$$

определенная для любого $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения случайной величины* ξ.

Свойства функций распределения.

1) $F(x)$ — неубывающая функция;

2) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

3) $F(x)$ непрерывна справа и имеет пределы слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Случайная величина ξ называется *дискретной,* если ее множество значений не более чем счетное. Дискретная случайная величина представима в виде суммы $\xi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k)$, где $A_k = \{\omega : \xi = x_k\}$, $I(A_k)$ — индикатор множества A_k. Функция распределения дискретной случайной величины кусочно-постоянная и равна

$$F_\xi(x) = \sum_{\{k:\, x_k \leqslant x\}} P(\xi = x_k).$$

Случайная величина ξ называется *непрерывной,* если ее функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}$. Случайная величина ξ *абсолютно непрерывна,* если существует такая неотрицательная функция $f = f_\xi(x)$, называемая плотностью, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Если задана функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ, то плотность этой случайной величины $f_\xi(x)$ равна

$$f_\xi(x) = \big(F_\xi(x)\big)'.$$

Плотность распределения любой случайной величины удовлетворяет равенству $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = 1$.

Вероятность попадания случайной величины ξ *на участок* $(\alpha, \beta]$ выражается формулой

$$P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha).$$

Если случайная величина ξ имеет плотность, то

$$P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)dx.$$

Кроме *дискретных* и *абсолютно-непрерывных,* существуют еще *сингулярные* функции распределения. Так называются непрерывные функции распределения, точки роста которых образуют множество нулевой меры Лебега. Указанными тремя типами исчерпываются все такие функции. Это означает, что произвольная функция распределения может быть представлена в виде $p_1F_1 + p_2F_2 + p_3F_3$, где F_1 — дискретная, F_2 — абсолютно непрерывная, F_3 — сингулярная функции распределения, p_i — неотрицательные числа, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Дискретные распределения.

1. Вырожденное распределение. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, сосредоточенное в точке a, если вероятность $P\{\xi = a\}$=1. Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geqslant a. \end{cases}$$

2. Распределение Бернулли. Случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметром p $0 < p < 1$, если

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

3. Биномиальное распределение. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p), $0 < p < 1$, $n \geqslant 1$, если

$$P\{\xi = k\} = C_n^k\, p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{l} C_n^p p^k (1 - p)^{n-k}, & l \leqslant x < l + 1, \\ 1, & x \geqslant n. \end{cases}$$

4. Геометрическое распределение. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p, $0 < p < 1$, если

$$P\{\xi = k\} = p\,(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

5. Распределение Пуассона. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ, $\lambda > 0$, если

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Непрерывные распределения.

1. Равномерное распределение. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, $a < b$, если плотность этой случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

2. Треугольное распределение (распределение Симпсона). Случайная величина ξ имеет треугольное распределение на отрезке $[a, b]$, если плотность этой случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{2}{(b-a)^2}\,|a + b - 2x|, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

3. Показательное распределение. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, если плотность

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0, \\ 0, \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

<u>4. Нормальное распределение.</u> Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (m, σ), $\sigma > 0$, если плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

<u>5. Распределение Коши.</u> Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами (α, λ), $\lambda > 0$, если она имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

<u>6. Распределение Лапласа</u> (двойное экспоненциальное распределение). Случайная величина ξ имеет распределение Лапласа с параметрами (α, λ), где $\lambda > 0$, если плотность

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

<u>7. χ^2-распределение.</u> Случайная величина ξ имеет χ^2-распределение с α степенями свободы $(\alpha > 0)$, если она имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0, \\ 0, \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

<u>8. χ-распределение.</u> Случайная величина ξ имеет χ-распределение с α степенями свободы $(\alpha > 0)$, если плотность

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma(\frac{\alpha}{2})} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0, \\ 0, \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

9. Распределение Стьюдента (t-распределение). Случайная величина ξ имеет распределение Стьюдента с α степенями свободы ($\alpha > 0$), если она имеет плотность

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\sqrt{\alpha\pi}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

10. Распределение Фишера–Снедекора (F-распределение). Случайная величина ξ имеет F-распределение с (m_1, m_2) степенями свободы, если ее плотность равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\Big(\dfrac{m_1+m_2}{2}\Big)\, m_1^{\frac{m_1}{2}}\, m_2^{\frac{m_2}{2}}}{\Gamma\big(\frac{m_1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{m_2}{2}\big)}\, x^{\frac{m_1}{2}-1}(m_2+m_1x)^{-\frac{(m_1+m_2)}{2}}, & x > 0, \\ 0, \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Пример 8.1. Проводится 5 независимых подбрасываний монеты. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины X — числа гербов, появившихся при этих испытаниях.

Р е ш е н и е. Случайная величина X принимает значения $0, \ldots, 5$. Можем рассматривать X как количество успехов в 5 независимых испытаниях с вероятностью успеха $p = 1/2$ в одном испытании, поэтому вероятности $P(X = k)$ находятся по формуле Бернулли:

$$P(X=k) = P_5(k) = C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Получаем следующий закон распределения X :

$$P(X=0) = P(X=5) = \frac{1}{32},$$
$$P(X=1) = P(X=4) = \frac{5}{32},$$
$$P(X=2) = P(X=3) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

Найдем теперь функцию распределения X, пользуясь определением $F(x) = P(X \leqslant x)$. Поскольку случайная величина X не может принимать значения, меньшие нуля, то $F(x) = 0$ при $x < 0$. Рассмотрим $0 \leqslant x < 1$. Для таких значений x неравенство $X \leqslant x$ выполняется, если $X = 0$, поэтому

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = 0) = \frac{1}{32}.$$

Если $1 \leqslant x < 2$, то

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}.$$

Рассуждая аналогичным образом, находим функцию $F(x)$ для всех значений x :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/32, & 0 \leqslant x < 1, \\ 3/16, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1/2, & 2 \leqslant x < 3, \\ 13/16, & 3 \leqslant x < 4, \\ 31/32, & 4 \leqslant x < 5, \\ 1, & x \geqslant 5. \end{cases}$$

Пример 8.2. Распределение случайной величины ξ определяется формулами $P(\xi = k) = \dfrac{C}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти постоянную C и вероятности $P\{\xi \leqslant 3\}$, $P\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\}$.

Р е ш е н и е. Постоянную C находим из условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi = k) = 1$:

$$C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = C \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) =$$

$$= C\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\Big) = C,$$

поэтому $C = 1$. Найдем вероятности

$$P\{\xi \leqslant 3\} = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

$$P\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\} = \sum_{k=n_1}^{k=n_2} \frac{1}{k(k+1)} =$$
$$= \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1+1} + \ldots + \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_2+1} = \frac{n_2 - n_1 + 1}{n_1(n_2+1)}.$$

8.1. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами

$$P\{\xi = i\} = \frac{1}{5},\ i = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Найти распределения и построить функции распределения случайных величин $\xi_1 = -\xi$, $\xi_2 = |\xi|$.

8.2. Человек стоит в начале координат на числовой оси. Он бросает монету и после каждого броска делает один шаг вправо при выпадении решетки и один шаг влево при выпадении герба. Пусть X — абсцисса, соответствующая положению человека после 10 бросков. Найти распределение случайной величины X.

8.3. На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомобилю дальнейшее движение. Пусть X — число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найти распределение случайной величины X и построить функцию распределения.

8.4. Может ли при каком-либо значении аргумента быть:

а) функция распределения больше единицы?

б) плотность распределения больше единицы?

в) функция распределения отрицательной?

г) плотность распределения отрицательной?

8.5. Являются ли следующие функции функциями распределения на числовой прямой: а) $F(x) = \mathrm{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}$, б) $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}, & x\in[1,4],\\ 1, & x>4,\end{cases}$ в) $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x\in[1,2),\\ \dfrac{x^2}{16}, & x\in[2,4),\\ 1, & x\geqslant 4\,?\end{cases}$

Пример 8.3. Найти функцию распределения случайной величины

$$\xi(\omega)=\begin{cases}2\omega, & \omega\in[0,1/2),\\ 2(1-\omega), & \omega\in[1/2,1],\end{cases}$$

заданной на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, представляющем собой отрезок $[0,1]$ с сигма-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега.

Р е ш е н и е. Построим множества $A_x=\{\omega:\xi(\omega)\leqslant x\}$ для различных значений $x\in\mathbb{R}$. Отметим, что функция распределения случайной величины ξ равна мере Лебега множества A_x; поэтому, как видно из рисунка, при $x\in[0,1]$ мера Лебега множества A_x равна сумме длин двух отрезков — отрезков $\left[0,\dfrac{x}{2}\right]$ и $\left[1-\dfrac{x}{2},1\right]$.

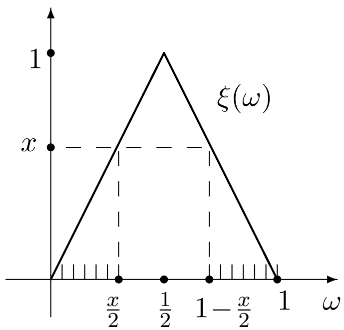


Рис. 8. Функция $\xi(\omega)$ и множество A_x

Таким образом, получаем:

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \in [0,1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Следовательно, случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Пример 8.4. Пусть задана функция распределения случайной величины ξ :

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2/2, & x \in (0,1], \\ x/2, & x \in (1,2], \\ 1, & x \in (2,\infty). \end{cases}$$

Найти плотность данной случайной величины и вероятность того, что $\xi \in \big[1/2, 2\big]$.

Р е ш е н и е. Если известна функция распределения $F_\xi(x)$, то плотность данной случайной величины равна

$$f_\xi(x) = \big(F_\xi(x)\big)' = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (2,\infty) \\ x, & x \in [0,1], \\ \dfrac{1}{2}, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что $\xi \in \big[1/2, 2\big]$:

$$P\Big(\xi \in \Big[\frac{1}{2}, 2\Big]\Big) = F_\xi(2) - F_\xi\Big(\frac{1}{2}\Big) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Пример 8.5. Задана плотность случайной величины ξ :

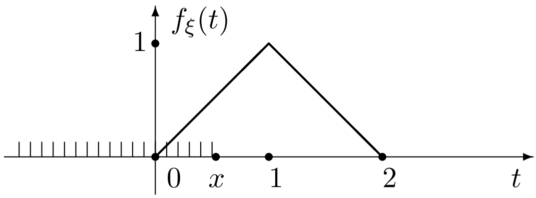
$$f_\xi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 2 - x, & x \in (1,2], \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (2,\infty). \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины и вероятность того, что $\xi \in [1/2, 1]$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся зависимостью между функцией распределения и плотностью:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

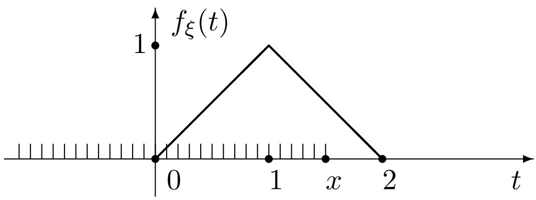
Если $x < 0$, то для подинтегральной функции выполнено равенство $f_\xi(t) = 0$, поэтому $F_\xi(x) = 0$ при данных значениях x.



Пусть $x \in [0, 1]$. Тогда область интегрирования $(-\infty, x]$ разбивается на два промежутка: $(-\infty, 0]$ и $(0, x]$. На первом промежутке выполнено равенство $f_\xi(t) = 0$, для $t \in (0, x]$ плотность $f_\xi(t) = t$, следовательно

$$F_\xi(x) = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2} \quad \text{при} \quad x \in [0, 1].$$

Рассмотрим $x \in (1, 2]$. Область интегрирования $(-\infty, x]$ разбива-



ется на три промежутка: $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$ и $(1, x]$, на которых плотность $f_\xi(t)$ задается разными формулами, поэтому

$$F_\xi(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1.$$

Далее, для $x \in (2, \infty)$ имеем

$$F_\xi(x) = \int_0^2 f_\xi(t) dt = 1.$$

(Очень распространенная ошибка, когда считают, что в этом случае $F_\xi(x) = 0$). Таким образом, получаем

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in (-\infty, 0], \\ \dfrac{x^2}{2}, \quad x \in (0, 1], \\ 2x - \dfrac{x^2}{2} - 1, \quad x \in (1, 2], \\ 1, \quad x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Вероятность того, что $\xi \in \big[1/2, 1\big]$, находится из равенства

$$P\Big(\xi \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]\Big) = F(1) - F\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

8.6. Найти функцию распределения случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, если $\xi_1(\omega) = 2\omega + 1$, $\xi_2(\omega) = \omega^2$,

$$\xi_3(\omega) = \begin{cases} 1/4, \ \omega \in [0, 1/4), \\ 1/2, \ \omega \in [1/4, 3/4), \\ 1, \ \ \omega \in [3/4, 1]. \end{cases} \qquad \xi_4(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega \in [0, 1/2), \\ 2\omega^2, \ \omega \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

8.7. Задана функция распределения случайной величины ξ :

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in (-\infty, 0], \\ \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arcsin} x, \quad x \in (0, 1], \\ 1, \quad x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Найти плотность данной случайной величины и вероятность того, что $\xi \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

8.8. Плотность распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2},\ x \in [0, 2], \\ 0,\ x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность, что $\xi \in [1/2, 1]$.

8.9. Задана плотность распределения случайной величины ξ :

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x + 1,\ x \in [-1, 0], \\ 1 - x,\ x \in (0, 1], \\ 0,\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины и вероятность того, что $\xi \in [1/2, 1]$.

8.10. Плотность распределения случайной величины ξ задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2,\ x \in [0, 2], \\ 0,\ x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Найти: а) постоянную C; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятности $P\{\xi_1 < 1/2\}$, $P\{\xi_1 > 1/2\}$.

Пример 8.6. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин: а) $\xi_1 = 2 - \xi$; б) $\xi_2 = [\xi]$, где $[\xi]$ означает целую часть ξ.

Р е ш е н и е. а) Выразим функцию распределения случайной величины ξ_1 через функцию распределения ξ :

$$F_{\xi_1}(x) = P(\xi_1 \leqslant x) = P(2 - \xi \leqslant x) = P(\xi \geqslant 2 - x) = \\ = 1 - P(\xi < 2 - x) = 1 - F_\xi(2 - x).$$

Поскольку ξ имеет показательное распределение с параметром α, то

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, \ x > 0, \\ 0, \qquad x \leqslant 0, \end{cases} \quad F_\xi(2 - x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(2-x)}, \ x < 2, \\ 0, \qquad x \geqslant 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_{\xi_1}(x) = 1 - F_\xi(2 - x) = \begin{cases} e^{\alpha(x-2)}, \ x < 2, \\ 1, \qquad x \geqslant 2. \end{cases} .$$

б) Случайная величина ξ_2 является дискретной случайной величиной и принимает значения из множества $\{0, 1, 2, \dots\}$. Для $k = 0, 1, 2, \dots$ найдем вероятность

$$P\{\omega : \xi_2(\omega) = k\} = P\{\omega : [\xi(\omega)] = k\} = P\{\omega : k \leqslant \xi(\omega) < k + 1\} = \\ = F_\xi(k + 1) - F_\xi(k) = e^{-\alpha k} - e^{-\alpha(k+1)} = e^{-\alpha k}(1 - e^{-1}).$$

Пример 8.7. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, где Ω — квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств Ω, P — мера Лебега. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\xi = \omega_1 + \omega_2$.

Р е ш е н и е. Представим пространство Ω в виде

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : 0 \leqslant \omega_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \omega_2 \leqslant 1\}.$$

По определению, функция распределения $F_\xi(x)$ равна вероятности

$$P\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leqslant x\}.$$

При $x < 0$ множество $\{\omega \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leqslant x\}$ пустое, поэтому $F_\xi(x) = 0$ при $x < 0$.

Рассмотрим $x \in [0, 1]$. Множество $\{\omega \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leqslant x\}$ является равнобедренным прямоугольным треугольником, катеты которого равны x (см. рис. 11). Площадь этого треугольника равна $\dfrac{x^2}{2}$, поэтому $F_\xi(x) = \dfrac{x^2}{2}$ при $x \in [0, 1]$.

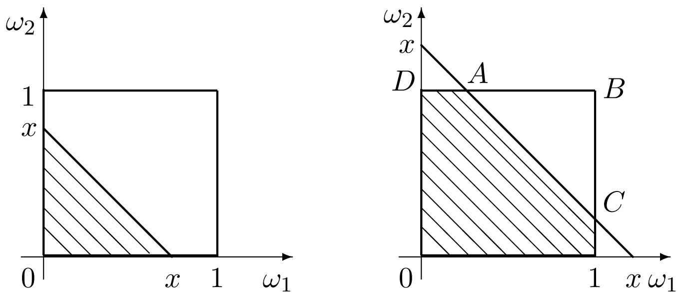


Рис. 11. Множества $\{\omega \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leqslant x\}$ для $x \in [0, 1]$ и $x \in (1, 2]$

При $x \in (1, 2]$ множество $\{\omega \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leqslant x\}$ представляет собой пятиугольник, изображенный на рис. 11. Площадь данного пятиугольника можно найти как разность площадей квадрата Ω и треугольника с вершинами в точках A, B, C. Найдем катеты этого треугольника:

$$|AB| = |BC| = |BD| - |AD| = 1 - (x - 1) = 2 - x.$$

Следовательно, при $x \in (1, 2]$ функция распределения

$$F_\xi(x) = 1 - \frac{(2 - x)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

Если $x > 2$, то множество $\{\omega \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leqslant x\}$ совпадает со всем пространством Ω, поэтому $F_\xi(x) = 1$ при $x > 2$.

Следовательно, функция распределения случайной величины ξ равна

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2}{2}, \quad x \in [0,1], \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1, \ x \in (1,2], \\ 1, \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдем плотность

$$f_\xi(x) = \big(F_\xi(x)\big)' = \begin{cases} x, \quad x \in [0,1], \\ 2 - x, \quad x \in (1,2], \\ 0, \ x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина ξ имеет треугольное распределение на отрезке $[0,2]$.

Пример 8.8. Случайная величина ξ — время пребывания машины в очереди на АЗС принимает значение 0 с вероятностью $1/2$ и имеет плотность $f(x) = \dfrac{1}{20}$ при $x \in (0,10)$ (мин). Найти функцию распределения ξ и вероятность того, что машина пробудет в очереди не более 4 мин.

Р е ш е н и е. Случайная величина ξ является величиной смешанного типа, найдем ее функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \qquad x \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0, \infty), \end{cases} = \begin{cases} 0, \qquad x \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{20}, \quad x \in [0, 10), \\ 1, \qquad x \in [10, +\infty). \end{cases}$$

Вероятность того, что машина пробудет в очереди не более 4 минут, равна

$$P(\xi \leqslant 4) = F(4) = \frac{1}{2} + \frac{4}{20} = 0,7.$$

8.11. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин:
а) $\xi_1 = \xi^2$; б) $\xi_2 = \sqrt{\xi}$; в) $\xi_3 = \dfrac{1}{\alpha}\ln\xi$; г) $\xi_4 = \{\xi\}$; д) $\xi_5 = 1 - e^{-\alpha\xi}$;
е) $\xi_6 = \sin\pi[\xi]$; ж) $\xi_7 = \cos\pi[\xi]$. Здесь $[\xi]$ означает целую часть, а $\{\xi\}$ означает дробную часть ξ.

8.12. Плотность распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, \ x \geqslant 1, \\ 0, \ x < 1. \end{cases}$$

Найти: а) постоянную C; б) плотность распределения $\xi_1 = 1/\xi$;
в) $P\{0,1 < \xi_1 < 0,3\}$.

8.13. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi_1 = 2\xi + 1$; б) $\xi_2 = -\xi$; в) $\xi_3 = -\ln(1-\xi)$.

8.14. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1,1]$. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi_1 = 2\xi - 2$; б) $\xi_2 = -\xi$; в) $\xi_3 = e^\xi$.

8.15. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi_1 = \dfrac{\xi^2}{1+\xi^2}$; б) $\xi_2 = \dfrac{1}{1+\xi^2}$.

8.16. Дан график плотности распределения $f(x)$ некоторой случайной величины ξ. Как измениться этот график, если:

а) прибавить к случайной величине 1;

б) вычесть из случайной величины 2;

в) умножить случайную величину на 2;

г) изменить знак величины на обратный?

Ответить на те же вопросы для графика функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ.

8.17. Найти плотность распределения объема куба, ребро которого ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке

$[0, a]$.

8.18. Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^\alpha, \ x \geqslant x_0, \\ 0, \quad x < x_0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $x_0 > 0$. Найти плотность распределения случайной величины $\xi_1 = 1/\xi$;

8.19. Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, где Ω — квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств Ω, P — мера Лебега. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\xi = 2\omega_1$.

8.20. Пусть случайная величина ξ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, где Ω— треугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$, $\mathfrak{F}$— σ-алгебра борелевских подмножеств Ω, P— мера Лебега. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ, если:

а) $\xi = \omega_1$; б) $\xi = \omega_2$.

8.21. Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, где Ω — треугольник с вершинами $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, P — мера Лебега. Найти функцию распределения случайной величины $\xi = \omega_1 + \omega_2$.

8.22. Равнобедренный треугольник образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найти функцию распределения длины третьей стороны а) в $\mathbb{R}^2$; б) в $\mathbb{R}^3$.

8.23. Окружность единичного радиуса с центром в нуле имеет северный полюс на положительной полуоси абсцисс. Из полюса случайным образом направлен луч, причем его угол с осью абсцисс распределен равномерно на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Найти функцию распределения длины хорды внутри окружности.

8.24. Можно ли подобрать постоянную так, чтобы функция x^{-3} определяла плотность распределения вероятностей на:

а) луче $[1, \infty)$; б) луче $[0, \infty)$; в) отрезке $[-2, -1]$?

8.25. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\dfrac{1}{2}\bigl(\xi + |\xi|\bigr)$.

8.26. Поезд должен прибыть на станцию по расписанию, но иногда, по случайным причинам, задерживается (прибытие раньше назначенного срока исключено). Случайная величина ξ — время опоздания поезда принимает значение 0 с вероятностью 1/4 и имеет постоянную плотность $f(x) = C$ при $x \in (0, 20)$ (мин). Найти постоянную C, функцию распределения ξ и вероятность того, что поезд опоздает не более, чем на 4 мин.

Пример 8.9. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Какое из двух событий $\{|\xi| \leqslant 0,7\}$ или $\{|\xi| \geqslant 0,7\}$ — имеет большую вероятность?

Р е ш е н и е. Вероятность того, что $\{|\xi| \leqslant 0,7\}$, найдем из таблиц для функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$:

$$P\{|\xi| \leqslant 0,7\} = \Phi(0,7) - \Phi(-0,7) = 2\Phi(0,7) \approx 0,516.$$

Следовательно, $P\{|\xi| \geqslant 0,7\} = 1 - P\{|\xi| \leqslant 0,7\} \approx 0,484$. Таким образом, первое событие имеет большую вероятность.

Пример 8.10. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Найти функцию распределения следующих случайных величин:

а) $\max\{\xi_1, \xi_2\}$; б) $\min\{\xi_1, \xi_2\}$; в) $\max\{2\xi_1, \xi_2\}$; г) $\min\{\xi_1^3, \xi_2\}$.

Р е ш е н и е. а) Отметим, что неравенство $\max\{\xi_1, \xi_2\} \leqslant x$ выполнено тогда и только тогда, когда $\xi_1 \leqslant x$ и $\xi_2 \leqslant x$, поэтому

$$F_{\max\{\xi_1,\xi_2\}}(x) = P\bigl(\max\{\xi_1, \xi_2\} \leqslant x\bigr) = P(\xi_1 \leqslant x, \xi_2 \leqslant x).$$

Из независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 следует, что последняя вероятность равна произведению вероятностей событий $\xi_1 \leqslant x$ и $\xi_2 \leqslant x$, следовательно

$$F_{\max\{\xi_1,\xi_2\}}(x) = P(\xi_1 \leqslant x, \xi_2 \leqslant x) = P(\xi_1 \leqslant x)P(\xi_2 \leqslant x) = F(x)G(x).$$

б) Сначала, учитывая независимость величин ξ_1 и ξ_2, найдем

$$P\bigl(\min\{\xi_1,\xi_2\} \geqslant x\bigr) = P(\xi_1 \geqslant x, \xi_2 \geqslant x) = \\ = P(\xi_1 \geqslant x)P(\xi_2 \geqslant x) = (1-F(x))(1-G(x)).$$

Следовательно,

$$F_{\min\{\xi_1,\xi_2\}}(x) = P\bigl(\min\{\xi_1,\xi_2\} \leqslant x\bigr) = 1 - P\bigl(\min\{\xi_1,\xi_2\} \geqslant x\bigr) = \\ = 1-(1-F(x))(1-G(x)) = F(x)+G(x)-F(x)G(x).$$

в) Найдем функцию распределения для случайной величины $2\xi_1$:

$$F_{2\xi_1}(x) = P(2\xi_1 \leqslant x) = P\Bigl(\xi_1 \leqslant \frac{x}{2}\Bigr) = F\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr).$$

Рассуждая так же, как в пункте а), получаем

$$F_{\max\{2\xi_1,\xi_2\}}(x) = P(2\xi_1 \leqslant x, \xi_2 \leqslant x) = \\ = P(2\xi_1 \leqslant x)P(\xi_2 \leqslant x) = F\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)G(x).$$

г) $F_{\xi_1^3}(x) = P(\xi_1^3 \leqslant x) = P(\xi_1 \leqslant x^{\frac{1}{3}}) = F(x^{\frac{1}{3}})$, поэтому

$$F_{\min\{\xi_1^3,\xi_2\}}(x) = F(x^{\frac{1}{3}}) + G(x) - F(x^{\frac{1}{3}})G(x).$$

8.27. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Что больше:

$$P\{-0,5 \leqslant \xi \leqslant -0,1\} \text{ или } P\{1 \leqslant \xi \leqslant 2\}?$$

8.28. Завод изготовляет шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм., а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 10$ (мм) и квадратическим отклонением $\sigma = 0,4$ (мм). При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие с диаметром $d_1 = 10,7$ (мм) и все шарики, проходящие через круглое отверстие с диаметром $d_2 = 9,3$ (мм). Найти процент шариков, которые будут браковаться.

8.29. Пусть ξ, η, ζ — независимые случайные величины, ξ и η имеют функции распределения $F(x)$ и $G(x)$, ζ принимает значения 0 и 1 с вероятностями p и q соответственно, $p+q=1$. Найти функцию распределения следующих величин:

а) $\zeta\xi + (1-\zeta)\eta$; б) $\zeta\xi + (1-\zeta)\max\{\xi,\eta\}$;

в) $\zeta\xi + (1-\zeta)\min\{\xi,\eta\}$.

8.30. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots$ соответственно, а N — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от всех величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Положим $p_k = P(N = k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти функцию распределения случайной величины ξ_N.

8.31. Доказать, что для любой непрерывной функции распределения $F(x)$ выполнено равенство $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dF(x) = \frac{1}{2}$.

§ 9. МНОГОМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ определены случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, то говорят, что задан *случайный вектор* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Определение 9.1. Функция

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\}$$

называется *многомерной функцией распределения* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ или функцией распределения случайного вектора ξ.

Для двух случайных величин ξ_1, ξ_2 функция распределения

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = F(x,y) = P\{\xi_1 \leqslant x, \xi_2 \leqslant y\}$$

и обладает следующими свойствами:

1) $F(-\infty,-\infty) = F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$;

2) $F(+\infty,+\infty) = 1$;

3) $F(x,+\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty,y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(x)$ — функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

4) $F(x,y)$ — неубывающая функция переменных x и y.

Если величины ξ_1, ξ_2 имеют функцию распределения $F(x,y)$, то

$$P\{a_1 < \xi_1 \leqslant b_1, a_2 < \xi_2 \leqslant b_2\} = \\ = F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2).$$

Определение 9.2. *Плотностью совместного распределения* $f(x,y)$ системы двух случайных величин (ξ_1,ξ_2) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Функция $f(x,y)$ неотрицательная и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Зная плотность совместного распределения $f(x,y)$, можно найти функцию распределения $F(x,y)$ по формуле

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

Плотности распределения отдельных величин ξ_1 и ξ_2 выражаются через двумерную плотность $f(x,y)$:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \;\; f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Определение 9.3. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми,* если для любых борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n$ имеет место равенство

$$P\big\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\big\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \ldots P\{\xi_n \in B_n\}.$$

Теорема 9.1. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда их функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n),$$

где $F_i(x_i)$ — функции распределения величин ξ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 9.2. Предположим, что распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ абсолютно непрерывно. Тогда необходимым и достаточным условием независимости случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ служит соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n),$$

где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — совместная плотность распределения, а $f_i(x_i)$ — плотности распределения величин ξ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие плотности $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то плотность их *суммы* $\xi_1 + \xi_2$ вычисляется с помощью *формулы свертки:*

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) f_2(y)dy.$$

Пример 9.1. Внутри квадрата, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \dfrac{\pi}{2}$, плотность распределения двух случайных величин $f(x, y) = C\sin(x + y)$; вне данного квадрата $f(x, y) = 0$. Найти

а) постоянную C; б) функцию распределения системы; в) вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = 0$, $y = \dfrac{\pi}{4}$.

Р е ш е н и е. а) Для нахождения постоянной C воспользуемся равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} C\sin(x+y)dxdy = -C\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos\big(x+\frac{\pi}{2}\big)-\cos x\Big)dx =$$
$$= -C\sin\pi + C\sin\frac{\pi}{2} + C\sin\frac{\pi}{2} = 2C,$$

следовательно, $C = 1/2$.

б) Найдем функцию распределения системы:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

При $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция распределения равна

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y \sin(u+v)dudv = -\frac{1}{2}\int_0^x\Big(\cos\big(u+y\big)-\cos u\Big)du =$$
$$= -\frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin y.$$

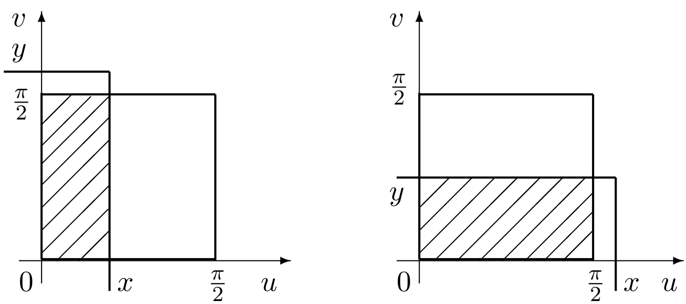


Рис. 12.

На рисунке 12 изображены области интегрирования при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $y > \frac{\pi}{2}$ и при $x > \frac{\pi}{2}$, $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом, если $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $y > \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u+v)dudv = \frac{1}{2}\big(\sin x - \cos x + 1\big);$$

если $x > \frac{\pi}{2}$, $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{y} \sin(u+v)dudv = \frac{1}{2}\big(\sin y - \cos y + 1\big).$$

При $x > \frac{\pi}{2}$, $y > \frac{\pi}{2}$ областью интегрирования является исходный квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, поэтому $F(x,y) = 1$ при $x > \frac{\pi}{2}$, $y > \frac{\pi}{2}$. Если $x < 0$ или $y < 0$, то $F(x,y) = 0$.

в) Вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$, равна

$$F\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Пример 9.2. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата K с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ и плотности $f_1(x)$, $f_2(y)$ отдельных величин ξ_1 и ξ_2. Зависимы или независимы эти случайные величины?

Р е ш е н и е. Квадрат K изображен на рисунке 13. Длины сторон данного квадрата равны $\sqrt{2}$, его площадь равна 2, поэтому из равенства $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$ следует, что совместная плотность

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in K \\ 0, & (x,y) \notin K. \end{cases}$$

Стороны данного квадрата задаются уравнениями $y = 1-x$, $y = x-1$, $y = 1 + x$, $y = -1 - x$ при $x \in [-1, 0]$.

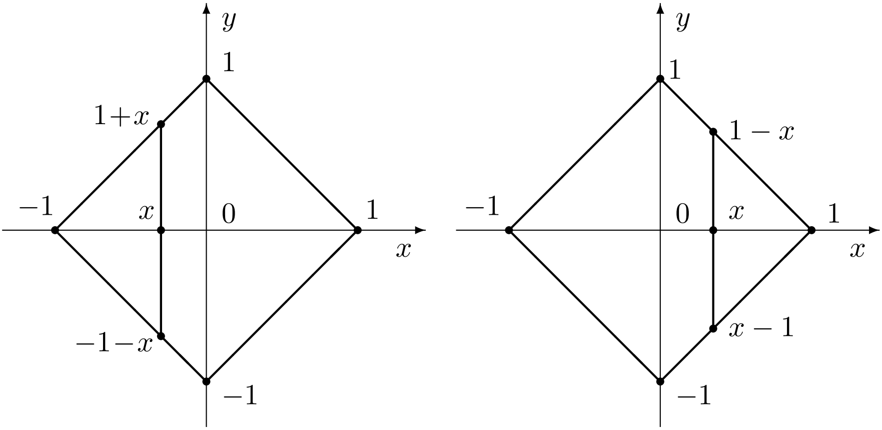


Рис. 13. Нахождение плотности $f_1(x)$ при $x \in [-1, 0]$ и при $x \in (0, 1]$

Для нахождения плотности $f_1(x)$ воспользуемся равенством

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy.$$

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ точка (x, y) не содержится в квадрате K, поэтому $f(x, y) = 0$ при данных значениях переменной x. Следовательно, $f_1(x) = 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Если $x \in [-1, 0]$, то $f(x, y) \neq 0$ при $y \in [-1 - x, 1 + x]$; если $x \in (0, 1]$, то $f(x, y) \neq 0$ при $y \in [x - 1, 1 - x]$ (см. рис. 13), то есть при каждом фиксированном x значение y меняется от нижней до верхней границы квадрата. Следовательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x-1}^{1+x} dy = 1 + x, & x \in [-1, 0] \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{1-x} dy = 1 - x, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина ξ_1 имеет треугольное распределение на отрезке $[-1,1]$. Аналогично находим плотность ξ_2 :

$$f_2(y) = \begin{cases} 1-|y|, & |y| \leqslant 1 \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

В случае наличии двумерной плотности $f(x,y)$ случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ (равенство понимается почти наверное относительно двумерной лебеговской меры). Рассмотрим $(x,y) \notin K$, но такие, что $|x| < 1$, $|y| < 1$. Для этих значений (x,y) двумерная плотность $f(x,y) = 0$, а произведение $f_1(x)f_2(y) \neq 0$, поэтому случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы.

9.1. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1,ξ_2) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{6}$, $y = \dfrac{\pi}{3}$, если известна функция распределения

$$F(x,y) = \sin x \sin y \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

9.2. Задана плотность распределения двумерной случайной величины $\xi = (\xi_1,\xi_2)$:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти функцию распределения двумерной случайной величины и вероятность попадания случайной точки (ξ_1,ξ_2) в прямоугольник с вершинами $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(\sqrt{3},1)$, $D(\sqrt{3},0)$.

9.3. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, плотность распределения двух случайных величин $f(x,y) = Cxy^2$; вне прямоугольника $f(x,y) = 0$. Найти

а) постоянную C; б) функцию распределения системы.

9.4. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найти вероятность того, что случайная точка (ξ_1, ξ_2) попадет в кольцо

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3\}.$$

9.5. Показать, что функция

$$G(x, y) = \begin{cases} 1 & x + y \geqslant 0, \\ 0 & x + y < 0 \end{cases}$$

является непрерывной справа, неубывающей по каждой переменной, но не является функцией распределения в $\mathbb{R}^2$.

9.6. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ принимает значения $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, каждое с вероятностью $\frac{1}{6}$. Найти распределение скалярного произведения $\langle \xi, e \rangle$, где e — вектор с координатами $(1,1)$.

9.7. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Найти распределение скалярного произведения $\langle \xi, e \rangle$, где e — вектор с координатами $(1/2, 1/2)$.

9.8. Имеются две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2, ξ_1 имеет показательное распределение с параметром λ, ξ_2 — показательное распределение с параметром μ. Найти плотность распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2) и его функцию распределения.

9.9. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) задана плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, & \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leqslant 1, \\ 0, & \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} > 1. \end{cases}$$

Найти плотности распределения составляющих ξ_1 и ξ_2.

9.10. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) задана плотностью совместного распределения $f(x, y) = \dfrac{\sin x \sin y}{4}$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

$0 \leqslant y \leqslant \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Доказать, что величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

9.11. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Найти плотность распределения и функцию распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2). Найти одномерные плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2. Являются ли эти величины независимыми?

9.12. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен по закону:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}.$$

Найти коэффициент a. Установить, являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми. Найти одномерные плотности этих случайных величин. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину 2.

9.13. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 1$ при $(u, v) \in G$, $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$ при $(u, v) \notin G$, где $G = \left\{(u, v) : 0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 - \dfrac{1}{2}u\right\}$. Найти плотность распределения $f_{\xi_1}(x)$ случайной величины ξ_1.

9.14. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = C(u + v)$ при $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ и $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти

а) постоянную C; б) одномерные плотности ξ_1 и ξ_2;

в) плотность распределения $\xi = \max(\xi_1, \xi_2)$.

9.15. Пусть $0 < a \leqslant 1$ и $f(x, y) = \big((1 + ax)(1 + ay) - a\big)e^{-x-y-axy}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $f(x, y) = 0$ в других случаях. Докажите, что f является совместной плотностью пары случайных величин. Найдите одномерные плотности и функции распределения.

9.16. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = \dfrac{2}{\pi(u^2 + v^2)^3}$ при $u^2 + v^2 \geqslant 1$ и $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти плотность распределения $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

9.17. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же показательное распределение: $F_{\xi_i}(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$, $i = 1, 2$. Найти $P\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant 1\}$.

9.18. Рассматривается совместная работа двух приборов. Случайные величины T_1 и T_2 представляют собой, соответственно, время безотказной работы первого прибора и время безотказной работы второго. Оба прибора выходят из строя независимо друг от друга. Каждая из случайных величин T_1, T_2 имеет показательное распределение с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Найти вероятности следующих событий: A — в течение времени τ после начала работы оба прибора будут продолжать работу, B — в течение времени τ после начала работы первый прибор будет продолжать работу, а второй выйдет из строя, C — второй прибор выйдет из строя раньше, чем первый.

Пример 9.3. Найти плотность суммы случайных величин ξ_1 и ξ_2, если эти величины независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$.

Р е ш е н и е. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют плотность

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

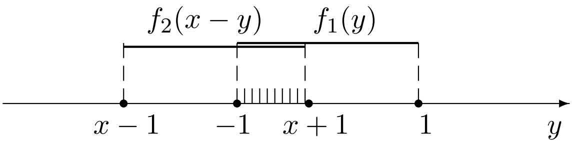
Чтобы было удобно использовать формулу свертки

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy,$$

выпишем плотность случайной величины ξ_2 как функцию от переменной $x - y$:

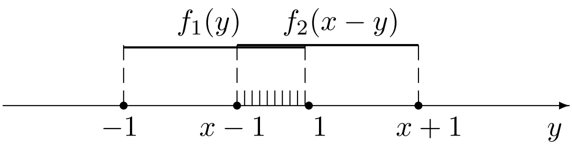
$$f_2(x-y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & |x-y| \leqslant 1 \\ 0, & |x-y| > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x-1 \leqslant y \leqslant x+1, \\ 0, & |x-y| > 1. \end{cases}$$

Заметим, что произведение плотностей $f_1(y)f_2(x-y)$ не равно нулю только на пересечении отрезков $[-1,1]$ и $[x-1,x+1]$. Чтобы найти пересечение данных отрезков для различных значений x, представим, что отрезок $[x-1,x+1]$ движется по оси $0y$, а отрезок $[-1,1]$ занимает фиксированное положение. При $|x|>2$ отрезки $[-1,1]$ и $[x-1,x+1]$ не пересекаются, поэтому $f_{\xi_1+\xi_2}(x)=0$ при $|x|>2$.



При $x\in[-2,0]$ отрезки $[-1,1]$ и $[x-1,x+1]$ имеют пересечение $[-1,x+1]$, поэтому

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-1}^{x+1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dy=\frac{x+2}{4}.$$



При $x\in[0,2]$ отрезки $[-1,1]$ и $[x-1,x+1]$ пересекаютя по отрезку $[x-1,1]$, откуда следует, что

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{x-1}^{1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dy=\frac{2-x}{4}.$$

Получили, что сверткой двух равномерных плотностей на одинаковых отрезках $[-1,1]$ является плотность треугольного распределения на отрезке $[-2,2]$:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{2-|x|}{4}, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

Пример 9.4. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Найти плотность случайной величины $\xi_1^2+\xi_2^2$.

Р е ш е н и е. Сначала найдем функцию распределения случайных величин ξ_i^2, $i=1,2$. Если $x>0$, то

$$F_{\xi_i^2}(x)=P(\xi_i^2\leqslant x)=P\big(-\sqrt{x}\leqslant \xi_i\leqslant \sqrt{x}\big)=F\big(\sqrt{x}\big)-F\big(-\sqrt{x}\big),$$

где $F(x)$ — функция нормального распределения с параметрами $(0,1)$. Если $x\leqslant 0$, то событие $\{\xi_i^2\leqslant x\}$ невозможно (или имеет нулевую вероятность при $x=0$), поэтому $F_{\xi_i^2}(x)=0$ при $x<0$.

Пусть $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ — плотность нормального распределения с параметрами $(0,1)$. Найдем плотность величины ξ_i^2, $i=1,2$ при $x>0$:

$$f_{\xi_i^2}(x)=\big(F_{\xi_i^2}(x)\big)'=f\big(\sqrt{x}\big)\frac{1}{2\sqrt{x}}+f\big(-\sqrt{x}\big)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Функция $f(x)$ — четная, поэтому при $x>0$

$$f_i(x)=f_{\xi_i^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f\big(\sqrt{x}\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,e^{-\frac{x}{2}}.$$

Если $x\leqslant 0$, то $f_i(x)=0$.

Найдем плотность суммы случайных величин ξ_1^2 и ξ_2^2 по формуле свертки

$$f_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy.$$

Для этого выпишем плотность случайной величины ξ_2^2 как функцию от переменной $x-y$:

$$f_2(x-y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{x-y}{2}}}{\sqrt{2\pi(x-y)}}\,,\ x-y>0\\ 0, \qquad x-y\leqslant 0,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{x-y}{2}}}{\sqrt{2\pi(x-y)}}\,,\ y<x\\ 0, \qquad y\geqslant x.\end{cases}$$

Заметим, что произведение плотностей $f_1(y)f_2(x-y)$ не равно нулю только на пересечении интервалов $(0,\infty)$ и $(-\infty,x)$. Если $x\leqslant 0$, то эти интервалы имеют пустое пересечение, поэтому $f_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x)=0$ при $x\leqslant 0$. При $x>0$ пересечением интервалов $(0,\infty)$ и $(-\infty,x)$ является интервал $(0,x)$, следовательно

$$f_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x)=\int_0^x f_1(y)f_2(x-y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^x\frac{e^{-\frac{y}{2}}e^{-\frac{x-y}{2}}}{\sqrt{y(x-y)}}\,dy=$$
$$=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{y(x-y)}}\,dy.$$

В последнем интеграле сделаем замену $y=x\sin^2 t$, тогда

$$f_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x)=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{x^2\sin^2 t-x^2\sin^4 t}}=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}.$$

Пример 9.5. Доказать, что если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $(0,1)$, то случайная величина $\zeta_n=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i^2$ имеет χ^2-распределение с n степенями свободы.

Р е ш е н и е. Необходимо доказать, что плотность случайной величины ζ_n равна

$$f_{\zeta_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\,x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0,\\ 0, \quad x\leqslant 0.\end{cases}$$

Доказательство проведем методом индукции. При $n = 1$ плотность величины $\zeta_1 = \xi_1^2$ получена в предыдущем примере, она равна

$$f_{\zeta_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Поскольку $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, нетрудно видеть, что величина $\zeta_1 = \xi_1^2$ имеет χ^2-распределение с одной степенью свободы.

Предположим, что ζ_n имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Представим величину ζ_{n+1} в виде $\zeta_{n+1} = \zeta_n + \xi_{n+1}^2$ и найдем ее плотность по формуле свертки. Произведение плотностей $f_{\zeta_n}(y) f_{\zeta_1}(x-y)$ не равно нулю только на пересечении интервалов $(0, \infty)$ и $(-\infty, x)$. Если $x \leqslant 0$, то эти интервалы имеют пустое пересечение, поэтому $f_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x) = 0$ при $x \leqslant 0$. При $x > 0$ пересечением интервалов $(0, \infty)$ и $(-\infty, x)$ является интервал $(0, x)$, следовательно

$$f_{\zeta_{n+1}}(x) = \int_0^x f_{\zeta_n}(y) f_{\zeta_1}(x-y) dy =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} e^{-\frac{x-y}{2}}\, dy}{\sqrt{x-y}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{y^{\frac{n}{2}-1}\, dy}{\sqrt{x-y}}.$$

В последнем интеграле (при фиксированном значении x) сделаем замену $y = xt$, тогда $dy = xdt$,

$$\int_0^x \frac{y^{\frac{n}{2}-1}\, dy}{\sqrt{x-y}} = \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}-1}\, t^{\frac{n}{2}-1}\, xdt}{\sqrt{x-xt}} =$$

$$= x^{\frac{n-1}{2}} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = x^{\frac{n-1}{2}} B\Big(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

Последнее равенство следует из определения бета-функции:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^{q-1} dt.$$

Напомним, что бета-функции и гамма-функции связаны равенством $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, поэтому при $x>0$

$$f_{\zeta_{n+1}}(x)=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{n-1}{2}}B\Big(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\Big)=$$
$$=\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}=\frac{x^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Таким образом, плотность $f_{\zeta_{n+1}}(x)$ является плотностью χ^2-распределение с $n+1$ степенью свободы.

Пример 9.6. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,a]$. Найти плотность распределения случайной величины $\xi_1\cdot\xi_2$.

Р е ш е н и е. Выпишем одномерные плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2 :

$$f_1(x)=f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & x\in[0,a],\\ 0, & x\notin[0,a].\end{cases}$$

Найдем функцию распределения произведения $F_{\xi_1\cdot\xi_2}(z)$ как интеграл от совместной плотности $f(u,v)$ данных случайных величин по множеству $K=\{0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant x\leqslant a: xy\leqslant z\}$:

$$F_{\xi_1\xi_2}(z)=P(\xi_1\cdot\xi_2\leqslant z)=\int_K f(x,y)dxdy=\frac{1}{a^2}\int_K dxdy.$$

Множество K при $z\in(0,a^2)$ является частью квадрата со сторонами длиной a, которая расположена ниже гиперболы $y=\dfrac{z}{x}$.

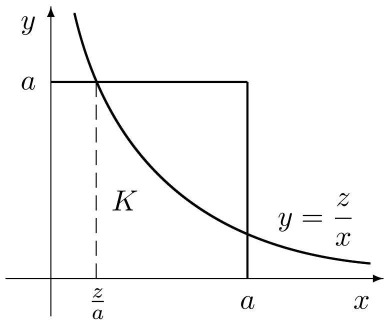


Рис. 16. Множество K при $z \in (0, a^2)$.

Интеграл $\displaystyle\int_K dxdy$ равен площади множества K :

$$\int_K dxdy = \frac{z}{a} \cdot a + \int_{\frac{z}{a}}^{a} \frac{z}{x}\, dx = z + z\Big(\ln a - \ln\frac{z}{a}\Big) = z + z\ln\frac{a^2}{z}.$$

Следовательно, $F_{\xi_1\xi_2}(z) = \dfrac{1}{a^2}\Big(z + z\ln\dfrac{a^2}{z}\Big)$ при $z \in (0, a^2)$.

Если $z = a^2$, то гипербола $y = \dfrac{z}{x}$ проходит через вершину квадрата с координатами (a, a); при $z > a^2$ гипербола $y = \dfrac{z}{x}$ не пересекает стороны квадрата. Поэтому при $z \geqslant a^2$ множество K совпадает со всем квадратом и, следовательно, его площадь равна a^2. При $z < 0$ множество K пустое. Таким образом, функция распределения произведения случайных величин ξ_1 и ξ_2 равна

$$F_{\xi_1\xi_2}(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{a^2}\Big(z + z\ln\dfrac{a^2}{z}\Big), & z \in (0, a^2), \\ 1, & z \geqslant a^2. \end{cases}$$

Найдем плотность $\xi_1\xi_2$:

$$f_{\xi_1\xi_2}(z) = \big(F_{\xi_1\xi_2}(z)\big)' = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\ln\dfrac{a^2}{z}, & z \in (0, a^2), \\ 0, & z \notin (0, a^2). \end{cases}$$

9.19. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi_1 + \xi_2$; б) $\xi_1 - \xi_2$; в) ξ_1/ξ_2.

9.20. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют показательное распределение с плотностью e^{-x}, $x \geqslant 0$ каждая. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi_1 + \xi_2$; б) $\xi_1 - \xi_2$; в) $|\xi_1 - \xi_2|$; г) ξ_1/ξ_2.

9.21. Найти плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$, если ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а ξ_2 — равномерное распределение на отрезке $[0, 2]$.

9.22. Найти плотность распределения суммы независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2, если ξ_1 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, а ξ_2 имеет показательное распределение с плотностью e^{-x}, $x \geqslant 0$.

9.23. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти плотности распределения сумм:

а) $\xi_1 + \xi_2$; б) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

Найти $P\{0,5 \leqslant \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leqslant 2,5\}$.

9.24. Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены:

а) показательно с одним и тем же параметром α.

б) по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

9.25. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Докажите, что произведение $\xi_1 \cdot \xi_2$ имеет плотность $\dfrac{2\ln|x|}{\pi^2(x^2 - 1)}$.

9.26. Найти плотность случайной величины $\xi = \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$, если ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

9.27. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma)$. Найти функцию распределения случайных величин $\xi_1^2 + \xi_2^2$ и $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

9.28. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Являются ли независимыми величины $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$?

9.29. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Найти $P\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant 1\}$.

9.30. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Доказать, что случайная величина $\xi = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}$ имеет χ-распределение с n степенями свободы.

9.31. Пусть η и ζ — независимые случайные величины, причем η имеет стандартное нормальное распределение, а ζ — χ^2-распределение с n степенями свободы. Доказать, что случайная величина $\xi = \eta\sqrt{\dfrac{n}{\zeta}}$ имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы.

9.32. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие χ^2-распределение соответственно с m_1 и m_2 степенями свободы. Доказать, что случайная величина $\xi = \dfrac{\xi_1/m_1}{\xi_2/m_2}$ имеет распределение Фишера–Снедекора с (m_1, m_2) степенями свободы.

9.33. Две ремонтные бригады обслуживают водопроводную систему города. Время ожидания очередной заявки на ремонт имеет показательное распределение с параметром λ. Первую поступившую заявку обслуживает первая бригада, следующую заявку выполняет вторая бригада. Найти закон распределения времени ожидания заявки второй бригадой. Доказать, что если водопроводную систему обслуживают k бригад, то плотность распределения времени ожидания заявки k-ой бригадой при $t \geqslant 0$ равна

$$p_k(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!}\, e^{-\lambda t}.$$

Соответствующий закон распределения называется распределением Эрланга k-го порядка.

9.34. Рассмотрим Ω — область на плоскости (площадью 1/2), ограниченную четырехугольником с вершинами $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1/2)$, $(1/2,1)$ и треугольником с вершинами $(1/2,0)$, $(1,0)$, $(1,1/2)$. Пусть пара (ξ_1,ξ_2) распределена равномерно на Ω. Докажите, что частные распределения являются равномерными и что $\xi_1+\xi_2$ имеет такую же плотность, как если бы ξ_1 и ξ_2 были независимыми.

§ 10. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определение 10.1. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, называется интеграл Лебега от $\mathfrak{F}$-измеримой функции $\xi=\xi(\omega)$ по мере P :

$$M\xi=\int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega),$$

если данный интеграл Лебега существует.

Если ξ имеет плотность, то $M\xi$ может быть вычислено по формуле

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx.$$

Если ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения x_k с вероятностями $p_k=P\{\xi=x_k\}$, то

$$M\xi=\sum_k x_kp_k,$$

если последний ряд сходится абсолютно.

Если случайная величина $\zeta=g(\xi)$, то для вычисления $M\zeta$ можно применять формулы:

$$M\zeta = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx,$$
$$M\zeta = Mg(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

Определение 10.2. *Дисперсией* случайной величины ξ называется число $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Если случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx.$$

Для дискретной случайной величины

$$D\xi = \sum_k (x_k - M\xi)^2 p_k.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Ковариацией случайных величин ξ_1 и ξ_2 называется

$$\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2),$$

коэффициентом корреляции — отношение

$$\varrho\,(\xi_1, \xi_2) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}}.$$

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 *некоррелированы,* если $\varrho\,(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Пример 10.1. 1) Игральную кость подбросили один раз. Пусть ξ — число очков, выпавшее на этой кости. Найти $M\xi$, $D\xi$.

2) Эксперимент состоит в подбрасывании n игральных костей, ζ — сумма очков, выпавших на всех этих костях. Найти $M\zeta$, $D\zeta$ в случае $n = 2$, $n = 8$.

Р е ш е н и е. 1) Найдем распределение дискретной случайной величины ξ. Очевидно, что $P(\xi = 1) = \dots = P(\xi = 6) = \dfrac{1}{6}$. Тогда

$$M\xi = \sum_{k=1}^{6} x_k P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{6}\bigl(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\bigr) = \frac{7}{2}.$$

Дисперсию удобно находить по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, найдем сначала

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{6}\bigl(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\bigr) = \frac{91}{6},$$

тогда $D\xi = \dfrac{91}{6} - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{35}{12}$.

2) Для $n = 2$ составим закон распределения величины ζ :

$$P(\zeta = 2) = P(\zeta = 12) = \frac{1}{36}, \quad P(\zeta = 3) = P(\zeta = 11) = \frac{2}{36},$$
$$P(\zeta = 4) = P(\zeta = 10) = \frac{3}{36}, \quad P(\zeta = 5) = P(\zeta = 9) = \frac{4}{36},$$
$$P(\zeta = 6) = P(\zeta = 8) = \frac{5}{36}, \quad P(\zeta = 7) = \frac{1}{6}.$$

Аналогично пункту 1) можно подсчитать, (если обладать большим терпением) что $M\zeta = 7$, $D\zeta = \dfrac{35}{6}$. Понятно, что для $n = 8$ такой способ уже не годится. Представим ζ в виде суммы

$$\zeta = \xi_1 + \ldots + \xi_8,$$

где через ξ_k обозначена случайная величина, равная числу очков, выпавших на k-ой игральной кости, $k = 1, \ldots, 8$. Величины ξ_k имеют то же распределение, что и величина ξ из пункта 1), поэтому

$$M\zeta = M\xi_1 + \dots + M\xi_8 = 8M\xi = 28.$$

Поскольку случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_8$ независимы, то

$$D\zeta = D\xi_1 + \ldots + D\xi_8 = 8D\xi = \frac{70}{3}.$$

Понятно также, что для произвольного n $M\zeta = \dfrac{7}{2n}$, $D\zeta = \dfrac{35}{12n}$.

Пример 10.2. Совместное распределение случайных величин ξ_1, ξ_2 определяется условиями $P\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1$,

$$P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2.$$

Найти $M\xi_1$, $M\xi_2$, $D\xi_1$, $D\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$. Являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми?

Р е ш е н и е. Случайная величина ξ_1 — дискретная, так как она может принимать только значения $0, 1, -1$. Значит,

$$M\xi_1 = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0,$$
$$M\xi_1^2 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $D\xi_1 = M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2 = \dfrac{1}{2}$. Аналогично находим, что $M\xi_2 = 0$, $D\xi_2 = \dfrac{1}{2}$.

Из равенства $P\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1$ следует, что $P\{\xi_1\xi_2 \neq 0\} = 0$, поэтому

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = 0 \cdot P\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 \cdot \xi_2) - M\xi_1 \cdot M\xi_2 = 0$.

Найдем совместную вероятность

$$P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} \leqslant P\{\xi_1\xi_2 \neq 0\} = 0.$$

Следовательно,

$$0 = P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} \neq P\{\xi_1 = 1\}P\{\xi_2 = 1\} = \frac{1}{16},$$

поэтому величины ξ_1 и ξ_2 зависимы, хотя их ковариация равна нулю.

Пример 10.3. Три различимых шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число шаров в первом ящике, Y — число шаров в четвертом ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y, их ковариацию и корреляцию. Являются ли величины X и Y независимыми?

Р е ш е н и е. В рассматриваемом эксперименте — размещении трех шаров по четырем ящикам, число всех возможных исходов равно $N(\Omega) = 4^3 = 64$. Случайные величины X и Y могут принимать значения $0, 1, 2, 3$, найдем совместные вероятности $P(X = i, Y = j)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Если $X = 0, Y = 0$, то все шары находятся во втором и третьем ящике, число таких исходов равно $2^3 = 8$, поэтому $P(X = 0, Y = 0) = \dfrac{8}{64} = \dfrac{1}{8}$. Если $X = 1, Y = 0$, то два оставшихся шара раскладываем во второй и третий ящик, это можно сделать четырьмя способами, кроме того, шар для первого ящика выбираем тремя способами, поэтому $P(X = 1, Y = 0) = \dfrac{3 \cdot 4}{64} = \dfrac{3}{16}$. Пусть $X = 2, Y = 0$, тогда шары для первого ящика выбираем тремя способами, еще один шар нужно положить во второй или третий ящик, это можно сделать двумя способами, следовательно,

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{3 \cdot 2}{64} = \frac{3}{32}.$$

Если $X = 3, Y = 0$, то существует всего один способ такого размещения, поэтому $P(X = 3, Y = 0) = \dfrac{1}{64}$.

Пусть $X = 1, Y = 1$, тогда в первый ящик мы кладем один шар тремя способами, в четвертый — один шар двумя способами и оставшийся шар размещаем по двум ящикам двумя способами, поэтому

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}.$$

Если $X = 2, Y = 1$, существуют три способа размещения шаров, следовательно, $P(X = 2, Y = 1) = \dfrac{3}{64}$. Отметим, что все совместные вероятности в данной задаче обладают свойством симметрии, то есть $P(X = x, Y = y) = P(X = y, Y = x)$, где $x, y = 0, 1, 2, 3$. Кроме того, поскольку общее число шаров в первом и четвертом ящиках не превосходит трех, то $P(X = x, Y = y) = 0$, если $x + y \geqslant 4$. Все полученные совместные вероятности выписаны в таблице.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{27}{64}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	0	$\frac{27}{64}$
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	0	0	$\frac{9}{64}$
3	$\frac{1}{64}$	0	0	0	$\frac{1}{64}$
	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

В таблице также записаны суммы вероятностей по строкам и по столбцам. Например, сумма по первой строке равна вероятности того, что $X = 0:$

$$P(X = 0) = \sum_{y=0}^{3} P(X = 0, Y = y) = \frac{27}{64}.$$

Сумма вероятностей второй строки равна $P(X = 1)$, и так далее. Таким образом, в правом столбце мы получили набор вероятностей для случайной величины X; в нижней строке получили набор вероятностей для величины Y. Эти величины имеют одинаковое распределение, поэтому у них равные числовые характеристики:

$$MX = MY = 0 \cdot \frac{27}{64} + 1 \cdot \frac{27}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} + 3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}.$$
$$MX^2 = MY^2 = 0 \cdot \frac{27}{64} + 1 \cdot \frac{27}{64} + 4 \cdot \frac{9}{64} + 9 \cdot \frac{1}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}.$$

Следовательно,

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{9}{8} - \frac{9}{16} = \frac{9}{16}, \quad DY = \frac{9}{16}.$$

Произведение случайных величин X и Y может принимать значения $0, 1, 2, 3, 4, 6, 9$, найдем соответствующие вероятности. Отметим, что равенство $XY = 0$ равносильно тому, что $X = 0$ или $Y = 0$, поэтому из таблицы находим:

$$P(XY = 0) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{23}{32}.$$

Найдем следующие вероятности, также используя таблицу:

$$P(XY = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{3}{16},$$
$$P(XY = 2) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{3}{32},$$
$$P(XY = 3) = P(XY = 4) = P(XY = 6) = P(XY = 9) = 0.$$

Таким образом,

$$M(XY) = 0 \cdot \frac{23}{32} + 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{3}{32} + 0 = \frac{3}{8},$$
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = M(XY) - MXMY = \frac{3}{8} - \frac{9}{16} = -\frac{3}{16},$$
$$\varrho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DXDY}} = -\frac{1}{3}.$$

Случайные величины X и Y зависимы, поскольку

$$\frac{1}{8} = P\big(X = 0, Y = 0\big) \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{27^2}{64^2}.$$

10.1. К случайной величине ξ прибавили постоянную, не случайную величину a. Как от этого изменяться ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение?

10.2. Случайную величину ξ умножили на a. Как от этого изменяться ее характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение?

10.3. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $P\{\xi = i\} = \dfrac{1}{5}$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Найти математические ожидания и дисперсии величин $\xi_1 = -\xi$, $\xi_2 = |\xi|$.

10.4. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $P\{\xi = k\} = \dfrac{4}{k(k+1)(k+2)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

10.5. Проводится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $0,4$. Рассматривается случайная величина ξ — число появления события A в трех опытах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ, найти ее матеметическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

10.6. Монета подбрасывается n раз. Рассматривается случайная величина ξ — число выпавших гербов. Построить ряд распределения случайной величины ξ, найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

10.7. Проводится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Построить ряд распределения случайной величины ξ — числа появлений события $\bar{A}$, противоположного событию A в n опытах, найти ее матеметическое ожидание и дисперсию.

10.8. Событие A состоит в появлении двух гербов при бросании трех монет. Производится n-кратное бросание трех монет. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η, где ξ — число появления события A при n испытаниях, $\eta = \xi/n$ — частота события A.

10.9. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго p_2. Рассматриваются две случайные величины: ξ_1 — число попаданий первого стрелка, ξ_2 — число попаданий второго стрелка и их разность $\zeta = \xi_1 - \xi_2$. Построить ряд распределения сл. величины ζ и найти $M\zeta$, $D\zeta$.

10.10. Четыре неразличимых шара случайным образом раскладываются по трем ящикам. Пусть случайная величина ξ равна числу занятых ящиков. Построить функцию распределения случайной величины ξ, найти математич. ожидание и дисперсию ξ.

10.11. Найти матеметическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, если: а) $P\{\xi = m\} = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, 2, \ldots;$

б) $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $p + q = 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

10.12. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимы, $M\xi_1 = 1$, $M\xi_2 = 2$, $D\xi_1 = 1$, $D\xi_2 = 4$. Найти математическое ожидание случайных величин: а) $\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - \xi_1\xi_2 - 4\xi_1 + 4$; б) $(\xi_1 - \xi_2 + 1)^2$.

10.13. Дискретные независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 заданы законами распределения: $P(\xi_1 = 1) = 0,2$, $P(\xi_1 = 2) = 0,8$, $P(\xi_2 = 0,5) = 0,3$, $P(\xi_2 = 1) = 0,7$. Найти математическое ожидание произведения $\xi_1 \cdot \xi_2$ двумя способами: а) составив закон распределения $\xi_1 \cdot \xi_2$; б) пользуясь свойствами математического ожидания. Найти математическое ожидание суммы $\xi_1 + \xi_2$ также двумя способами.

10.14. Брошены две игральные кости. Найти математическое ожидание суммы выпавших очков, если известно, что выпали разные грани.

10.15. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

10.16. Дети играют в такую игру. В одной из трех одинаковых шкатулок спрятан значек. Желающий отгадать наугад выбирает шкатулку и проверяет, есть ли в ней значек. Если значка в ней не оказалось, он должен отвернуться. За его спиной шкатулки переставляются местами. Ему предлагают попытать счастье еще раз. Игра продолжается до обнаружения значка. Пусть X — число попыток до отгадывания. Найти MX и DX.

10.17. Первый игрок бросает 3, а второй 2 одинаковые монеты. Выигрывает и получает все 5 монет тот, у которого выпадет большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до получения определенного результата. Найти математическое ожидание величины выигрыша для каждого из игроков.

10.18. Человек, имеющий n ключей, хочет отпереть свою дверь, испытывая ключи независимо один от другого и в случайном порядке. Найти математическое ожидание и дисперсию числа испытаний а) если неподошедшие ключи не исключаются из дальнейших испытаний; б) если они исключаются.

10.19. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число очков на первой кости и Y — большее из двух выпавших чисел. Выписать совместное распределение X и Y. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

10.20. Три различимых шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Рассмотрим случайные величины X — число занятых ящиков и Y — число шаров в первом ящике. Найти распределение случайных величин X и Y, построить их функции распределения, найти математические ожидания и дисперсии. Решить ту же задачу для неразличимых шаров.

10.21. Три различимых шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число занятых ящиков и Y — число шаров в первом ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y, ковариацию и коэффициент корреляции этих величин. Являются ли величины X и Y независимыми?

10.22. Доказать, что если две случайные величины X и Y принимают только два значения каждая и $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, то X и Y независимыми.

10.23. Случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью: $Y = aX + b$, где и b — постоянные. Найти коэффициент корреляции X и Y.

10.24. Пусть ξ — случайная величина такая, что $P(0 < \xi < 1) = 1$. Доказать, что $D\xi < M\xi$.

10.25. Доказать, что для любых случайных величин ξ_1 и ξ_2, имеющих конечные дисперсии, справедливы неравенства

$$(\sqrt{D\xi_1} - \sqrt{D\xi_2})^2 \leqslant D(\xi_1 + \xi_2) \leqslant (\sqrt{D\xi_1} + \sqrt{D\xi_2})^2.$$

10.26. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений «единиц» и числом выпадений «шестерок» при n независимых бросаниях правильной игральной кости.

10.27. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти коэффициент корреляции случайных величин $a\xi_1 + b\xi_2$ и $a\xi_1 - b\xi_2$.

10.28. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы,

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2},$$

$$P(\xi_2 = 1) = P(\xi_2 = -1) = \frac{1}{4}, \quad P(\xi_2 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Будут ли случайные величины $\xi_1\xi_2$ и ξ_2 независимыми? Будут ли $\xi_1\xi_2$ и ξ_2 некоррелированными?

Пример 10.4. Плотность распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию ξ.

Р е ш е н и е. Математическое ожидание случайной величины ξ находим из равенства $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Для вычисления данного интеграла разобьем область интегрирования на три промежутка, тогда

$$M\xi = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} x \cdot 3x^2 dx + \int_{0}^{\infty} 0\,dx = 3\int_{0}^{1} x^3 dx = \frac{3}{4}.$$

Аналогично находим

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 0 + \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx + 0 = 3\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5},$$

следовательно, $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \dfrac{3}{80}$.

Пример 10.5. Случайная величина ξ подчинена показательному закону распределения с параметром α. Найти вероятность того, что ξ примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Р е ш е н и е. Сначала найдем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \alpha \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Далее, поскольку ξ имеет показательное распределение, то

$$P\{\xi < M\xi\} = P\big\{\xi < 1/\alpha\big\} = F_\xi\big(1/\alpha\big) = 1 - e^{-\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}} = 1 - e^{-1}.$$

Пример 10.6. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$; $\xi_1 = \cos\xi$, $\xi_2 = \sin\xi$. Найти $M\xi_1$, $M\xi_2$, $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$. Являются ли ξ_1 и ξ_2 независимыми?

Р е ш е н и е. Плотность $f_\xi(x)$ случайной величины ξ равна $\dfrac{1}{2\pi}$ при $x \in [0, 2\pi]$ и $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [0, 2\pi]$. Поскольку $\xi_1 = \varphi(\xi)$, где $\varphi(x) = \cos x$, то

$$M\xi_1 = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_\xi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0.$$

Аналогично находим

$$M\xi_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

$$M\xi_1\xi_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2x dx = 0.$$

Следовательно, ковариация данных случайных величин

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1 \cdot M\xi_2 = 0.$$

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы, поскольку существуют борелевские множества B_1 и B_2, для которых

$$P\big\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\big\} \neq P\{\xi_1 \in B_1\} \cdot P\{\xi_2 \in B_2\}.$$

Действительно, рассмотрим множества $B_1 = B_2 = \big(\sqrt{2}/2, 1\big]$. Найдем

$$P\{\xi_1 \in B_1\} = P\Big\{\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\xi \leqslant 1\Big\} = P\Big\{-\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{4}\Big\} = \frac{1}{4}.$$

Последнее равенство следует из условия равномерного распределения случайной величины ξ на отрезке $[0, 2\pi]$. Так же находим

$$P\{\xi_2 \in B_2\} = P\Big\{\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\xi \leqslant 1\Big\} = P\Big\{\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{3\pi}{4}\Big\} = \frac{1}{4},$$
$$P\big\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\big\} = P\Big\{-\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < \xi < \frac{3\pi}{4}\Big\} = P(\varnothing) = 0.$$

10.29. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, если:
а) $\xi = \omega^2$; б) $\xi = \omega - 1/2$; в) $\xi = \sin\pi\omega$; г) $\xi = \sin 2\pi\omega$.

10.30. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

10.31. Плотность распределения случайной величины ξ определяется равенством

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \ x \in [-1, 0], \\ 1 - x, \ x \in (0, 1], \\ 0, \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Найти $M\xi$ и $D\xi$.

10.32. Плотность распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} Cx^3, \ x \in [0,1], \\ 0, \ x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти постоянную C, $M\zeta$ и $D\zeta$, где $\zeta = 2 - 5\xi$.

10.33. Доказать, что математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно параметру a нормального распределения, а среднее квадратическое отклонение равно параметру σ.

10.34. Плотность распределения случайной величины ξ определяется формулами $f(x) = 0$ при $x < 1$, $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$ при $x \geqslant 1$. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и $\xi_1 = 1/\xi$.

10.35. Плотность распределения случайной величины ξ определяется формулами $f_\xi(x) = \sin x$ при $x \in [0, \pi/2]$, $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [0, \pi/2]$. Найти математические ожидания случайных величин ξ и $\xi_1 = \xi^2$.

10.36. Случайная величина ξ подчинена закону Лапласа:

$$f(x) = ae^{-\lambda|x|} \quad (\lambda > 0).$$

Найти коэффициент a, построить графики плотности распределения и функции распределения, найти $M\xi$ и $D\xi$.

10.37. По сторонам прямого угла xOy концами скользит линейка AB длины l, занимая случайное положение, причем все значения абсциссы X ее конца A на оси Ox в пределах от 0 до l одинаково вероятны. Найти математическое ожидание расстояния R от начала координат до линейки.

10.38. Плотность совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1,\xi_2}(u,v) = u + v$ при $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ и $f_{\xi_1,\xi_2}(u,v) = 0$ в остальных случаях. Найти $M\xi_1$, $M\xi_2$, $D\xi_1$, $D\xi_2$, $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

10.39. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Найти $M \sin \xi$, $M \cos \xi$, $D \sin \xi$, $D \cos \xi$.

10.40. Плотность совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = \dfrac{2}{\pi(u^2 + v^2)^3}$ при $u^2 + v^2 \geqslant 1$ и $f_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти $M\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

10.41. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром a. Найти $M\xi(1 - e^{-a\xi})$.

10.42. Случайная точка A имеет равномерное распределение в круге радиуса R. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния ξ точки A от центра круга.

10.43. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) задана плотностью распределения: $f(x, y) = \dfrac{1}{6\pi}$ внутри эллипса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; $f(x, y) = 0$ вне этого эллипса. Доказать, что ξ_1 и ξ_2 зависимые некоррелированные случайные величины.

10.44. Для выполнения некоторой работы необходимо выполнить последовательно две операции. Время выполнения первой операции (случайная величина ξ_1) имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 3]$, время выполнения второй операции ξ_2 имеет также равномерное распределение, но на отрезке $[2, 5]$. Время выполнения второй операции не зависит от продолжительности первой операции. Найти распределение вероятностей, математическое ожидание и дисперсию времени $\xi_1 + \xi_2$ выполнения всей работы.

10.45. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = \min(\xi, M)$, где постоянная $M > 0$, случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $a > 0$.

10.46. Заключен договор страхования жизни на один год. Страховая сумма равна $X = 5000$, вероятность смерти застрахованного в течение года $p = 0,004$. Найдите дисперсию выплат по договору.

10.47. Вероятность техногенной аварии на застрахованном объекте стоимостью 10 млн. равна $p = 0,0004$. В случае аварии ущерб X равномерно распределен от нуля до полной стоимости объекта. Найдите среднее значение и дисперсию X.

10.48. За время действия определенного вида договоров застрахованные заявляют два страховых случая в три раза чаще, чем четыре случая. Найдите дисперсию числа заявляемых страховых случаев, если оно имеет распределение Пуассона.

10.49. Потери от пожаров и хищений имущества являются независимыми показательно распределенными случайными величинами со средними значениями 1 и 5 соответственно. Найдите вероятность того, что максимальный из этих ущербов будет больше, чем 3.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1.

Вариант 1.

1. Колода карт из 36 листов делится наугад на две равные пачки по 18 листов. Найти вероятность того, что в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой — все четыре.

2. В прямоугольном треугольнике с катетами 4 и 5 случайным образом выбирается точка. Найти вероятность, что расстояние от этой точки до меньшего катета не превосходит 1.

3. Из 30 чисел $(1, 2, \ldots, 29, 30)$ случайно отбирается 10 различных чисел. Найти вероятности событий: $A = \{$все числа нечетные$\}$,
$B = \{$ровно 5 чисел делится на 3$\}$.

4. В первом ящике находится 7 белых и 2 черных, во втором — 2 белых и 7 черных шаров. Из первого ящика без возвращения извлекается 1 шар, а из второго — 2 шара. Все извлеченные шары кладутся в третий ящик, из которого наудачу извлекается один шар. Какова вероятность, что он белый?

Вариант 2.

1. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна $0,8$. Какова вероятность того, что при трех выстрелах он хотя бы раз поразит мишень?

2. На единичном отрезке случайным образом выбираются две точки. Найти вероятность, что расстояние между ними больше $1/2$.

3. Из 30 чисел $(1, 2, \ldots, 29, 30)$ случайно отбирается 10 различных чисел. Найти вероятность события A — «5 чисел четных и 5 нечетных, причем ровно одно из чисел делится на 10».

4. В ящике находится 8 новых теннисных мячей и 5 игранных. Из ящика наудачу вынимают два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут наудачу два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми.

Вариант 3.

1. Из карточек азбуки составлено слово «СТАТИСТИКА». Затем из этих 10 карточек по схеме случайного выбора без возвращения отобрано 5 карточек. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово «ТАКСИ».

2. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, случайно бросают монету радиуса r. Найти вероятность, что упавшая монета не заденет границу ни одного из треугольников.

3. В ящике находится 8 белых и 6 красных мячей. Из ящика наудачу достают 3 мяча. Зависимы или независимы события: «появилось хотя бы 2 белых мяча» и «все мячи одного цвета» ?

4. Два стрелка стреляют по мишени. Один из них попадает в цель в среднем в 5 случаях, а второй — в 8 случаях из 10. Перед выстрелом они бросают правильную монету для определения очередности. Посторонний наблюдатель знает условия стрельбы, но не знает, кто в данный момент стреляет. Он видит, что стрелок попал в цель. Какова вероятность, что стрелял первый стрелок?

Вариант 4.

1. В ящике 10 белых и 9 черных шаров. Из ящика вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: «шары одного цвета» или «шары разных цветов»?

2. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 случайным образом выбирается точка. Найти вероятность, что расстояние от этой точки до гипотенузы не превосходит 1.

3. Монета брошена 6 раз. Зависимы или независимы события: «появилось нечетное число гербов» и «появились 5 или 6 гербов» ?

4. Из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все вопросы, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность, что он подготовлен отлично.

Контрольная работа № 2.

Вариант 1.

1. Вероятность появления черной крысы при скрещивании черной и белой в одном опыте равна $0,6$. Какова вероятность того, что появится именно черная крыса в большинстве из 60 опытов?

2. Проводится 5 независимых испытаний, каждое из которых состоит в подбрасывании двух монет. Пусть случайная величина ξ равна числу пар гербов, появившихся при 5 испытаниях. Построить функцию распределения ξ, найти $M\xi$ и $D\xi$.

3. Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}([0,1])$, P — мера Лебега. Найти функцию распределения случайной величины $\xi(\omega) = 2\omega$ при $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{3}$, $\xi(\omega) = \frac{2}{3}$ при $\frac{1}{3} < \omega \leqslant 1$.

4. Плотность случайной величины ξ равна $f(x) = x + 1$ при $x \in [-1, 0]$, $f(x) = -x+1$ при $x \in [0,1]$ и равна 0 для остальных x. Найти функцию распределения ξ, $M\xi$ и вероятность $P\{\xi \in [-0,6; 0,4]\}$.

Вариант 2.

1. Вероятность выпуска нестандартной электролампы равна $0,1$. Чему равна вероятность того, что в партии из 2000 ламп число стандартных будет не менее 1790 штук?

2. Четыре неразличимых шара случайным образом раскладываются по трем ящикам. Пусть случайная величина ξ равна числу занятых ящиков. Построить функцию распределения случайной величины ξ, найти математическое ожидание и дисперсию ξ.

3. Найти функцию распределения случайной величины $\xi(\omega) = \omega$ при $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{3}$, $\xi(\omega) = \omega - \frac{1}{3}$ при $\frac{1}{3} < \omega \leqslant 1$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}([0,1])$, P — мера Лебега.

4. Плотность случайной величины ξ равна $f(x) = 2x - 1$ при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и равна 0 для остальных x. Найти функцию распределения, математическое ожидание и вероятность $P\{\xi \in [0,8; 1,2]\}$.

Вариант 3.

1. Вероятность всхожести хранящегося на складе зерна равна 0,8. Отбираются первые попавшиеся 100 зерен. Требуется определить вероятность, что среди них число всхожих зерен окажется от 68 до 90 штук.

2. Бросается пять игральных костей. Пусть случайная величина ξ равна количеству нечетных чисел, выпавших на этих костях. Построить функцию распределения случайной величины ξ, найти математич. ожидание и дисперсию ξ.

3. Найти функцию распределения случайной величины $\xi(\omega) = 1$ при $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{4}$, $\xi(\omega) = \omega^2$ при $\frac{1}{4} < \omega \leqslant 1$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}([0, 1])$, P — мера Лебега.

4. Плотность распределения случайной величины ξ равна $f(x) = x$ при $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2 - x$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x. Найти функцию распределения, $M\xi$ и вероятность $P\{\xi \in [1; 1,5]\}$.

Вариант 4.

1. Из ящика, содержащего 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти вероятность того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.

2. Три пассажира случайным образом рассаживаютя в поезд, состоящий из четырех вагонов. Пусть случайная величина ξ равна числу занятых вагонов. Построить функцию распределения случайной величины ξ, найти математич. ожидание и дисперсию ξ.

3. Найти функцию распределения случайной величины $\xi(\omega) = \omega + 1$ при $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2}$, $\xi(\omega) = 2$ при $\frac{1}{2} < \omega \leqslant 1$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}([0, 1])$, P — мера Лебега.

4. Плотность распределения случайной величины ξ равна $f(x) = 2x + 1$ при $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и равна 0 для остальных x. Найти функцию распределения, $M\xi$ и вероятность $P\{\xi \in [-0,2; 0,3]\}$.

Контрольная работа № 3.

Вариант 1.

1. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\xi_1 = -2\xi$.

2. Найти распределение суммы независимых случайные величин ξ_1 и ξ_2, если ξ_1 равномерно распределена на отрезке $[0,2]$, а ξ_2 имеет показательное распределение с параметром $a > 0$.

3. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[1,3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

4. Плотность совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами $f(u,v) = \dfrac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}$ при $u^2+v^2 \geqslant 1$, $f(u,v) = 0$ в остальных случаях. Найти математическое ожидание $\xi_1^2 + \xi_2^2$.

Вариант 2.

1. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\xi_1 = 2\xi + 1$.

2. Случайные величин ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 и ξ_2 имеют показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти плотность распределения $\xi_1 - \xi_2$.

3. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 имеет равномерное распределение на отрезке $[0,2]$, ξ_2 имеет плотность $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$, $x \in (-\infty, \infty)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = \xi_1 - \xi_2$.

4. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$ и $(0,2)$. Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ и плотности ξ_1 и ξ_2.

Вариант 3.

1. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\xi_1 = \xi^2$.

2. Найти распределение разности независимых случайные величин ξ_1 и ξ_2, если ξ_1 и ξ_2 имеют показательное распределение с одним и тем же параметром $a > 0$.

3. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

4. Плотность совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 равна $f(u,v) = \dfrac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}$ при $u^2 + v^2 \geqslant 1$, $f(u,v) = 0$ в остальных случаях. Найти математическое ожидание $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Вариант 4.

1. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\xi_1 = -\xi$.

2. Найти распределение суммы независимых случайные величин ξ_1 и ξ_2, если ξ_1 и ξ_2 имеют распределение Пуассона с параметрами a_1 и a_2.

3. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 имеет равномерное распределение на отрезке $[-1,3]$, ξ_2 — показательное с параметром $a > 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = \xi_1 - \xi_2$.

4. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ и плотности ξ_1 и ξ_2.

Ответы

1.1. $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$, $P(C)=5/6$. 1.2. $P(A)=1/2$, $P(B)=3/8$, $P(C)=7/8$. 1.3. $1-C_{21}^5/C_{28}^5$. 1.4. а) $5/9$; б) $2/9$; в) $7/9$. 1.5. $1/2$. 1.6. а) $6!/6^6$; б) $1/6^5$; в) $21/6^6$. 1.7. $10/6^3$. 1.8. а) $(6^n-5^n)/6^n$; б) $n5^{n-1}/6^n$. 1.9. Вероятность первого события равна $1-5^4/6^4$, второго — $1-35^{24}/36^{24}$. 1.10. $C_{n+k-m}^{n-m}/C_{n+k}^n$. 1.11. $P(A)=\frac{1}{1785}$, $P(B)=\frac{1}{3927}$. 1.12. а) $(5/6)^{10}$; б) $C_{10}^3\cdot 5^7 6^{-10}$; в) $1-(5/6)^{10}$; г) $1-(5^{10}+10\cdot 5^9)/6^{10}$. 1.13. Вероятности равны. 1.14. а) $n/(2n-1)$; б) $(n-1)/(2n-1)$. 1.15. C_{90}^{10}/C_{100}^{10}. 1.16. $25!/(5!)^5 5^{25}$. 1.23. $2/N-1$; $2/N$. 1.24. $3/16$.

2.1. а) $x, 0\leqslant x\leqslant 1$; $1, x\geqslant 1$; б) $4x(1-x), 0\leqslant x\leqslant 1/2$; $1, x\geqslant 1/2$; в) $\pi x^2, 0\leqslant x\leqslant 1/2$; $x^2(\pi-4arccos\dfrac{1}{2x})+\sqrt{4x^2-1}$, $1/2<x\leqslant 1/\sqrt{2}$; 1, $x>1/\sqrt{2}$; г) $\dfrac{1}{4}\pi x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$; $x^2\big(\dfrac{\pi}{4}-arccos\dfrac{1}{x}\big)+\sqrt{x^2-1}$, $1<x\leqslant\sqrt{2}$; 1, $x>\sqrt{2}$. 2.2. а) $x(3-2x)$, $0\leqslant x\leqslant 1/2$; 1, $x\geqslant 1/2$; б) 0, $x\leqslant 1$; $x-1$, $1\leqslant x\leqslant 2$; 1, $x\geqslant 2$; в) $1-(1-x\sqrt{5})^2$, $0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{5}$; 1, $x>1/\sqrt{5}$. 2.3. а) $1/2$; б) $3/4$; в) $1/3$. 2.4. $2r/a\pi$. 2.5. $1-2R/a$. 2.6. $2/\pi$. 2.7. $13/24$. 2.10. $1/3$. 2.11. $\sqrt{2}-1$. 2.12. $\dfrac{(2a-b)^2}{4a^2}$, $0\leqslant b\leqslant 2a$; 0, $b>2a$. 2.13. $\Big(1-\dfrac{b}{a}\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\Big)^2$, $0\leqslant b\leqslant 2a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$; 0, $b>2a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. 2.14. $(4\pi-3\sqrt{3})/6\pi$. 2.15. $5/6$, $1/6$. 2.17. $1/2$. 2.18. $1/3$. 2.19. $1/4$.

3.1. $1/7$. 3.2. $1/2$. 3.3. а) $1/75$; б) $1/25$; в) $1/15$; г) $1/24$; д) $1/6$; е) $1/91$. 3.4. $1/19$, $i=0$, $2/19$, $i=1,2,\dots,9$, 0, $i=10,\dots,18$. 3.7. $3/7$. 3.15. а) зависимы, б) зависимы, в) могут быть как зависимы, так и независимы. 3.17. Зависимы. 3.18. а) независимы, б) зависимы, в) зависимы, г) независимы, д) зависимы. 3.20. а) A_ℓ, B_k независимы при любых ℓ, k; б) независимы в) зависимы. 3.21. Независимы пары $\{A_i, A_j\}$, с $i,j\in\{1,2,5,6\}$ и тройки $\{A_1,A_5,A_6\}$, $\{A_2,A_5,A_6\}$. 3.22. При $r\leqslant 0$, $r\geqslant 2/3$, $r=1/3$.

4.2. $\dfrac{5}{1764}$. 4.13. $\dfrac{83}{210}$, $\dfrac{43}{210}$, $\dfrac{2}{5}$. 4.14. $\dfrac{a+b}{a+2b}$.

5.2. $\dfrac{2}{3}$. 5.3. $\dfrac{2N_kM_k}{(N_k+M_k)(N_k+M_k-1)}\Big[\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{2N_iM_i}{(N_i+M_i)(N_i+M_i-1)}\Big]^{-1}$, $k=1,2,3$. 5.4. $\dfrac{N-2}{2N-2}$. 5.5. $\dfrac{N_1(N_2+1)+M_1N_2}{(N_1+M_1)(N_2+M_2+1)}$. 5.8. $0,87107\ldots$ 5.9. $11/30$. 5.16. $p_0(1-p)^n+(1-p_0)np(1-p)^{n-1}$.

6.7. $1-(7/8)^{20}$. 6.8. $C_4^2(2/3)^2(1/3)^2$. 6.12. $C_n^m p^{m+n}q^{n-m}$.
6.13. $C_{\ell-1}^{k-1}p^kq^{\ell-k}$. 6.14. $\left(\dfrac{25}{36}\right)^{k-1}\dfrac{11}{36}$. 6.15. а) $\dfrac{7}{8}$; б) $\dfrac{2}{3}$; в) $\dfrac{1}{3}$.
6.16. $C_n^{\frac{n+m}{2}}p^{\frac{n+m}{2}}q^{\frac{n-m}{2}}$, если $\frac{n+m}{2}$ — целое, 0 в противном случае.
6.23. $0,98101$. 6.26. $0,6321$. 6.27. $0,80085$. 6.28. $0,6321$. 6.29. $0,96$.

7.2. Нет, не обязана. Например, Ω — отрезок $[0,1]$, A — σ-алгебра счетных подмножеств и их дополнений, P — мера Лебега.
7.3. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет.
7.6. а) $\big\{\varnothing,\Omega,[0,\frac14),[\frac14,\frac34),[\frac34,1],[0,\frac34),[\frac14,1],[0,\frac14)\cup[\frac34,1]\big\}$; б) σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$; в) $\{\varnothing,\Omega\}$.
7.7. Всевозможные множества вида $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(A+2\pi k)$, где A — борелевские симметричные относительно начала координат подмножества отрезка $[-\pi,\pi]$, $A+a$ — сдвиг множества A на a вправо. 7.8. Нет.
7.9. а) Нет; б) да; в) да.

8.2. $P(X=\pm10)=\frac{1}{2^{10}}$, $P(X=\pm8)=\frac{10}{2^{10}}$, $P(X=\pm6)=\frac{C_{10}^2}{2^{10}}$, $P(X=\pm4)=\frac{C_{10}^3}{2^{10}}$, $P(X=\pm2)=\frac{C_{10}^4}{2^{10}}$, $P(X=0)=\frac{C_{10}^5}{2^{10}}$.
8.4. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет. 8.5. а) Да; б) да; в) нет.

$$8.6.\ F_{\xi_1}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, & 1<x<3,\\ 1, & x\geqslant 3;\end{cases}\qquad F_{\xi_2}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

$$8.8.\ F(x)=\begin{cases}0,\ x<0,\\ \dfrac{x^2}{4},\ x\in[0,2],\\ 1,\ x>2,\end{cases}\qquad P(\xi\in[1/2,1])=\frac{3}{16}.$$

8.11. а) $1-e^{-\alpha\sqrt{x}}$, $x>0$; б) $1-e^{-\alpha x^2}$, $x>0$; в) $1-\exp\{-\alpha e^{\alpha x}\}$,

$-\infty < x < \infty$; г) $\dfrac{1-\alpha e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. 8.12. а) $C = 3$; б) $f_{\xi_1}(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$; в) $0,026$. 8.13. а) $1/2$, $x \in [1,3]$; б) 1, $x \in [-1,0]$; в) e^{-x}, $x > 0$. 8.15. $f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$, $0 < x < 1$. 8.16. а) Сдвинется влево на 1; б) сдвинется вправо на 2; в) масштаб по оси абсцисс удвоится, а по оси ординат уменьшится вдвое; г) график переменится на свое зеркальное отражение относительно оси ординат. Для графика функции распределения: а) Сдвинется влево на 1; б) сдвинется вправо на 2; в) масштаб по оси абсцисс удвоится;
г) график нужно зеркально отразить относительно оси ординат и каждую ординату вычесть из единицы.

8.19. $F(x)=\begin{cases}0, & x \leqslant 0,\\ x/2, & x\in(0,2),\\ 1, & x \geqslant 2.\end{cases}$

8.20. а) $F(x)=\begin{cases}0, & x \leqslant 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & x\in(0,2),\\ 1, & x \geqslant 2;\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & x \leqslant 0,\\ 1-(1-x)^2, & x\in(0,1),\\ 1, & x \geqslant 1.\end{cases}$

8.22. а) $F(x) = \begin{cases}0, & x \leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & x\in(0,2),\\ 1, & x \geqslant 2;\end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases}0, & x \leqslant 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & x\in(0,2),\\ 1, & x \geqslant 2.\end{cases}$

8.23. $F(x) = \begin{cases}0, & x \leqslant 0,\\ 1-\dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{x}{2}, & x\in(0,2),\\ 1, & x \geqslant 2.\end{cases}$ 8.24. а) Можно ($c = 2$);

б) нельзя (интеграл расходится); в) можно $\left(c = -\dfrac{8}{3}\right)$.

8.25. $G(x) = \begin{cases}F(x), & x \geqslant 0,\\ 0, & x < 0.\end{cases}$ 8.28. 8,2%. 8.29. а) $pF(x) + qG(x)$;

б) $F(x)(p + qG(x))$; в) $F(x) + qG(x)(1 - F(x))$. 8.30. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k F_k(x)$.

8.31. Достаточно сделать замену переменной $y = F(x)$.

9.1. 0,11. 9.2. $F(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2}\Big(\mathrm{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big(\mathrm{arctg}y+\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $\dfrac{1}{48}$.

9.3. $C=\dfrac{3}{4}$, $F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ или } y\leqslant 0,\\ x^2y^3/8, & 0<x\leqslant 1, 0<y\leqslant 2,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1, y>2,\\ y^3/8, & x>1, 0<y\leqslant 2,\\ 1, & x>1, y>2.\end{cases}$

9.4. $e^{-2}-e^{-4{,}5}$. 9.5. Каждая функция распределения G в $\mathbb{R}^2$ должна удовлетворять условию $G(x_2,y_2)-G(x_2,y_1)-G(x_1,y_2)+G(x_1,y_1)\geqslant 0$ при любых $x_1\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y_2$. 9.6. $P(\langle\xi,e\rangle=0)=P(\langle\xi,e\rangle=3)=1/6$, $P(\langle\xi,e\rangle=1)=P(\langle\xi,e\rangle=2)=1/3$. 9.7. Распределение с плотностью $f(x)=2x+1$ при $-1/2\leqslant x\leqslant 1/2$ и $f(x)=0$ при остальных x.

9.8. $f(x,y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & x\leqslant 0 \text{ или } y\leqslant 0;\end{cases}$

$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\mu y}), & x>0, y>0,\\ 0, & x\leqslant 0 \text{ или } y\leqslant 0.\end{cases}$

9.11. $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x,y\leqslant 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях };\end{cases}$

$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ или } y\leqslant 0,\\ xy, & 0<x\leqslant 1, 0<y\leqslant 1,\\ x, & 0<x\leqslant 1, y>1,\\ y, & x>1, 0<y\leqslant 1,\\ 1, & x>1, y>1.\end{cases}$

Случайные величины независимыми. 9.12. $a=\dfrac{1}{\pi^2}$, случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, $f_1(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_2(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$, $P=\dfrac{1}{4}$. 9.13. $1-\dfrac{1}{2^x}$, $0<x<2$. 9.14. а) $C=1$; б) $p_{\xi_1}(x)=p_{\xi_2}(x)=x+\dfrac{1}{2}$, $0<x<1$; в) $3x^2$, $0<x<1$. 9.16. $4x^{-5}$, $x\geqslant 1$. 9.17. $1-e^{-1}$.

9.18. $P(A)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}$, $P(B)=e^{-\lambda_1\tau}\big(1-e^{-\lambda_2\tau}\big)$, $P(C)=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

9.19. а) $\frac{1}{a}\Big(1-\Big|\frac{x}{a}-1\Big|\Big)$, $x\in[0,2a]$, 0, $x\notin[0,2a]$; б) $\frac{1}{a}\Big(1-\Big|\frac{x}{a}\Big|\Big)$, $|x|\leqslant a$, 0, $|x|>a$; в) $\frac{1}{2}$, $x\in[0,1]$, $\frac{1}{2x^2}$, $x\geqslant 1$, 0, $x<0$. 9.20. а) xe^{-x}, $x\geqslant 0$; б) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$; в) e^{-x}, $x\geqslant 0$; г) $\frac{1}{1+x^2}$, $x\geqslant 0$. 9.21. $\frac{1}{2}\min\Big\{1, \frac{3}{2}-\Big|x-\frac{3}{2}\Big|\Big\}$, $x\in[0,3]$, 0, $x\notin[0,3]$. 9.22. $1-e^{-x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $e^{-(x-1)}-e^{-x}$, $x\geqslant 1$. 9.23. а) $1-|1-x|$, $x\in[0,2]$, 0 в остальных точках; б) $\frac{x^2}{2}$, $x\in[0,1]$, $\frac{3}{4}-\Big(x-\frac{3}{2}\Big)^2$, $x\in(1,2]$, $\frac{(3-x)^2}{2}$, $x\in(2,3]$, 0 в остальных точках; $P\{0,5\leqslant \xi_1+\xi_2+\xi_3\leqslant 2,5\}=\frac{23}{24}$.

10.4. 2. 10.5. $P(\xi=0)=0,216$, $P(\xi=1)=0,432$, $P(\xi=2)=0,288$, $P(\xi=3)=0,064$, $M\xi=1,2$, $D\xi=0,72$, $\sigma=0,85$.
10.6. $P(\xi=k)=C_n^k\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$, $k=0,\ldots,n$, $M\xi=\frac{n}{2}$, $D\xi=\frac{n}{4}$, $\sigma=\frac{\sqrt{n}}{2}$.
10.7. $P(\xi=k)=C_n^k q^k p^{n-k}$, $k=0,\ldots,n$, $M\xi=nq$, $D\xi=npq$.
10.9. $P(\zeta=-1)=q_1p_2$, $P(\zeta=0)=q_1q_2+p_1p_2$, $P(\zeta=1)=p_1q_2$, $M\zeta=p_1-p_2$, $D\zeta=p_1q_1+p_2q_2$. 10.11. а) $M\xi=D\xi=\lambda$; б) $M\xi=np$, $D\xi=npq$. 10.12. а) 16; б) 5. 10.13. $M(\xi_1\xi_2)=0,396$; $M(\xi_1+\xi_2)=2,02$.
10.23. 1, если $a>0$ и -1, если $a<0$. 10.26. $-\frac{1}{5}$. 10.27. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.
10.28. $\xi_1\xi_2$ и ξ_2 зависимы, но некоррелированы. 10.30. $M\xi=(a+b)/2$, $D\xi=(b-a)^2/12$. 10.34. $M\xi=\frac{3}{2}$, $D\xi=\frac{3}{4}$, $M\xi_1=\frac{3}{4}$, $D\xi_1=\frac{3}{80}$.
10.37. $\frac{\ell}{3}$. 10.38. $M\xi_i=\frac{7}{12}$, $D\xi_i=\frac{11}{144}$, $i=1,2$, $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=-\frac{1}{144}$.
10.39. $M\sin\xi=M\cos\xi=0$, $D\sin\xi=D\cos\xi=\frac{1}{2}$. 10.40. $\frac{4}{3}$. 10.41. $1-(1+a)^{-2}$ при $a>-1$; $-\infty$ при $a\leqslant -1$. 10.42. $M\xi=\frac{2R}{3}$, $D\xi=\frac{R^2}{18}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
2. Зубков А.Н., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989. 320 с.
3. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1986. 328 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005. 448 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. 479 с. http: // www. alleng. ru/d/math321.htm.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2004. 404 с.
7. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Учебное пособие для студентов вузов. М.: Издательский центр «Академия», 2003. 448 с.
8. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Юнита-Дана, 2004. 573 с. http: // www. alleng. ru/d/math328.htm.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: Айрис-пресс, 2008. 288 с.
10. Феллер В. Введение в теория вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1984. 528 с.
11. Феллер В. Введение в теория вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1984. 738 с.
12. Иваницкий А.Ю. Теория риска в страховании. М.: Факториал Пресс, 2007. 128 с.

Учебное издание

Мастерков Юрий Викторович
Родина Людмила Ивановна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие

Компьютерный набор и верстка Л.И. Родиной
Авторская редакция

Подписано в печать 26.02.13. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,67.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корп. 4.
Тел./факс: +7 (3412) 500-295 E-mail: editorial@udsu.ru