



УДК: 517.9

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Сценарий Ландау – Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина, И. Р. Сатаев

Обсуждаются условия, при которых в ансамбле взаимодействующих осцилляторов может наблюдаться сценарий Ландау – Хопфа последовательного рождения многочастотных режимов. Представлена модель в виде сети из пяти глобально связанных осцилляторов, характеризующихся разной степенью возбуждения. Даны иллюстрации рождения торов все более высокой размерности в результате последовательных квазипериодических бифуркаций Хопфа (Неймарка – Сакера).

Ключевые слова: синхронизация, квазипериодические колебания, бифуркации, хаос

1. Введение

Еще в 40-е годы XX века Ландау и Хопф высказали предположение, что гидродинамическая турбулентность рождается при изменении параметра (числа Рейнольдса) благодаря следующей последовательности изменений характера движения [1, 2]. Сначала возникает автоколебательный режим, которому в фазовом пространстве отвечает предельный цикл; этот переход принято теперь называть бифуркацией Андронова – Хопфа. Затем периодический режим теряет устойчивость из-за вторичной бифуркации, по современной терми-

Получено 24 сентября 2012 года

После доработки 19 октября 2012 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-02-00541) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых № 11.G34.31.0039.

Кузнецов Александр Петрович

arkuz@rambler.ru

Кузнецов Сергей Петрович

spkuz@yandex.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна

lvtur@rambler.ru

Сатаев Игорь Рустамович

sataevir@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38



нологии именуемой бифуркацией Неймарка–Сакера. При этом в фазовом пространстве системы динамика осуществляется на объекте, представляющем собой возникший мягким образом двумерный тор. Потом он, в свою очередь, претерпевает аналогичную бифуркацию, в результате чего добавляется еще одна составляющая движения со своей независимой частотой, и возникает трехчастотный тор, и так далее. В результате происходит последовательное добавление все большего числа несоизмеримых частот в спектре колебаний, и возникает все более сложный колебательный режим, то есть развивается турбулентность.

В 1971 году Рюэль и Такенс выступили с работой «О природе турбулентности» [3]. Подвергнув критике теорию Ландау, они аргументировали, что уже после включения в игру относительно небольшого числа частот (трех или четырех в зависимости от некоторых математических деталей) динамика может стать турбулентной и, в частности, демонстрировать характерный для случайного процесса сплошной спектр. Это связывалось с появлением в фазовом пространстве системы «странного аттрактора» (введение этого ключевого термина во многом определило историческое значение работы Рюэля и Такенса). Подчеркивалось наличие неустойчивости фазовых траекторий на странном аттракторе и его нетривиальная геометрическая фрактальная структура. Рюэль и Такенс опирались на определенные математические утверждения, которые на популярном уровне интерпретировались так, что в типичной ситуации трехчастотные торы присутствовать не могут и должны разрушаться с возникновением хаоса, которому соответствует странный аттрактор. Если даже представить себе систему, у которой многомерный тор имеет место, то при малых (по Рюэлю и Такенсу, даже сколь угодно малых) вариациях (возмущениях) уравнений, определяющих динамику, он неизбежно разрушится. Качественно это можно пояснить следующим образом. Представим себе сначала, что в фазовом пространстве возник двухчастотный тор. Его развертка дает прямоугольник, на котором располагается поток траекторий. Если же появился трехчастотный тор, его «развертка» будет представлять собой трехмерный параллелепипед, в котором располагается множество фазовых траекторий, отвечающих возможным движениям системы в установившемся режиме. Поскольку в трехмерном пространстве состояний, как теперь считается общеизвестным, типичным феноменом становится динамический хаос, вместо трехчастотных торов можно ожидать появления хаоса [4].¹

Привлекательность подхода, развитого Ландау и Хопфом, равно как и подхода, выдвинутого Рюэлем и Такенсом, состоит в том, что предлагаемая аргументация носит столь общий характер, что должна относиться не только к гидродинамической турбулентности, но и к сложной динамике многомерных диссипативных систем любой физической природы.

Для проверки правомерности по крайней мере некоторых аспектов предложенной Рюэлем и Такенсом концепции, были предприняты численные эксперименты (в частности, [7]), которые были организованы следующим образом². Рассматривались простейшие модельные отображения для нескольких циклических (фазовых) переменных, для которых вводились возмущения с фиксированными для каждого варианта, но выбираемыми случайным образом при переборе вариантов, коэффициентами. При многократном повторении вычислений статистически анализировалась доля возникающих хаотических, квазипериодических и регулярных режимов. Результат таких экспериментов оказывается интуитивно понятным с физической точки зрения: при малых возмущениях торы сохраняются, а при больших — разрушаются с образованием хаоса. Циклические переменные, о которых идет

¹Для консервативных систем вопросы, связанные с существованием и разрушением многомерных торов, также обсуждаются и представляют принципиальный интерес [5, 6].

²Достаточно подробное обсуждение можно найти также в монографии [4].

речь, можно мыслить как фазы взаимодействующих осцилляторов; конкретно для системы осцилляторов подобное исследование можно найти, например, в работе [8]. Таким образом, заключение об универсальности и типичности сценария Рюэля и Такенса было, очевидно, поспешным; стало ясно, что полная картина сложнее, и она до сих пор остается во многом не выясненной.

С другой стороны, подход Ландау – Хопфа, основанный на неявном предположении о независимости составляющих движения, также может быть подвергнут критике с позиций, выражаясь современным языком, теории синхронизации [9]. Действительно, взаимодействие мод в нелинейной системе может приводить к эффектам синхронизации разного типа, так что независимое развитие и сосуществование колебательных составляющих оказывается нарушенным. При этом могут наблюдаться такие аттракторы, как периодические орбиты, а также резонансные двухчастотные торы, трехчастотные торы и т. д. [10–13]. Если представить себе карту режимов на плоскости каких-либо параметров системы, то на ней возникает картина областей синхронизации с разным числом находящихся в рациональном отношении частотных компонент. Такая картина («языки Арнольда») достаточно хорошо известна в случае синхронизации периодических колебаний (резонансного захвата — *mode locking*), но подобные же явления имеют место и в отношении торов разной размерности [12–14]. Сложность ситуации усугубляется тем, что качественный анализ такого рода динамического поведения до недавнего времени не был подкреплён ни достаточно полными результатами теории бифуркаций квазипериодических движений, ни простыми и надёжными численными алгоритмами их поиска. Сейчас этот недостаток в определенной мере восполняется (см., например, [14–16]). Однако на практике при проведении вычислений типы бифуркаций квазипериодических режимов для достаточно сложных систем приходится идентифицировать по характерной зависимости показателей Ляпунова от параметра [14–16].

В задачах, связанных с ансамблями осцилляторов, проявляются две основных бифуркации квазипериодических режимов. Одна из них — это квазипериодическая седло-узловая бифуркация, или седло-узловая бифуркация торов. В этом случае рождение тора более высокой размерности происходит в результате слияния устойчивого и седлового торов, имевших на единицу меньшую размерность [14, 15]. Именно такие бифуркации, сопровождающиеся жестким изменением колебательного режима, характерны для случая резонансных взаимодействий. Однако со сценарием Ландау – Хопфа должна ассоциироваться совсем другая бифуркация, а именно, мягкое рождение тора более высокой размерности. В литературе (см., например, [14]) такие бифуркации иногда называют квазипериодическими бифуркациями Хопфа (*quasi-periodic Hopf bifurcation*), хотя, в свете установившейся к настоящему времени терминологии, было бы более логичным говорить о квазипериодической бифуркации Неймарка – Сакера.

Таким образом, наличие резонансов модифицирует картину режимов и бифуркаций и делает наблюдение сценария Ландау – Хопфа проблематичным. Хотя этот вопрос в свое время обсуждался [17, 18], интерес к данной проблеме сохраняется [19]. Было бы интересно предложить конкретную модель, для которой такой сценарий все же будет наблюдаться, по крайней мере, с участием достаточно большого количества первых бифуркаций. Итак, предлагается вместо поиска систем в природе (например, гидродинамических) обратиться к целенаправленному конструированию моделей с таким типом поведения, которые могут допускать реализацию на той или иной физической основе (например, в электронике).³

³Формальная модель, в которой осуществляется сценарий последовательного рождения составляющих с несоизмеримыми частотами, выдвинута, собственно, еще в статье Хопфа [2], но мы здесь

Следует отметить, что при обсуждении всех этих вопросов оказываются важными несколько физических моментов. Во-первых, колебательные моды должны характеризоваться разной степенью возбуждения. Если, например, речь идет о связанных осцилляторах Ван дер Поля, то должны быть различными параметры λ_i , отвечающие за отрицательное трение. Именно в этом случае возникают условия для поэтапного включения мод при понижении уровня диссипации (что в контексте гидродинамических задач соответствует увеличению числа Рейнольдса). Во-вторых, все моды должны быть в достаточной мере разнесены по частотам. В противном случае действительно возникает взаимодействие мод, которое разрушает картину Ландау – Хопфа. Наконец, в-третьих, желательно, чтобы взаимодействие осцилляторов было устроено так, чтобы вовлечены были они все, то есть не было бы предпочтительного взаимодействия с пространственно близкими соседями или с разным числом соседей в зависимости от пространственного расположения каждого осциллятора. Только тогда управляющий параметр каждого отдельного осциллятора λ_i будет обеспечивать управление соответствующей квазипериодической бифуркацией. В противном случае может получиться, что, из-за разного числа соседей у составляющих систему осцилляторов, элементы с одинаковой степенью возбуждения будут по-разному влиять на картину возникновения многочастотных режимов [20].

2. Сеть из пяти автоколебательных элементов

Построим модель, которая удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Это будет система из пяти осцилляторов, с эквидистантным спектром собственных частот. В нашей модели оставим единственный частотный параметр Δ , который будет управлять расстройкой осцилляторов между собой, так что при больших значениях этого параметра осцилляторы будут рассинхронизованы. Полагаем, что все они характеризуются разными по величине параметрами, отвечающими за выход за порог возбуждения, что позволяет обеспечить поэтапную активацию соответствующих мод. Кроме того, выберем объединение осцилляторов в ансамбль в виде связи «каждый с каждым», то есть в форме сети, что обеспечит одинаковое число соседей у каждого осциллятора.

Предлагаемая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \frac{\mu}{4}(4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{4}\right)y + \frac{\mu}{4}(4\dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)z + \frac{\mu}{4}(4\dot{z} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{w} - (\lambda_4 - w^2)\dot{w} + \left(1 + \frac{3\Delta}{4}\right)w + \frac{\mu}{4}(4\dot{w} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{v} - (\lambda_5 - v^2)\dot{v} + (1 + \Delta)v + \frac{\mu}{4}(4\dot{v} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь λ_i — параметры возбуждения автономных осцилляторов, Δ определяет частотную отстройку осцилляторов, а частота первого осциллятора принята за единицу. Положим далее $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$.

ставим вопрос о построении модели на основе связанных осцилляторов, допускающей физическую реализацию.



Основной иллюстрацией будет служить карта ляпуновских показателей [12, 13], рассчитанных для отображения Пуанкаре системы (2.1), на плоскости параметров (Δ, μ) «частотная расстройка–величина диссипативной связи». Для ее построения поступаем следующим образом. Сначала выбираем точку на плоскости параметров и в этой точке вычисляем спектр показателей Ляпунова системы Λ_i . Затем, рассматривая четыре наибольших показателя, в зависимости от знаков и количества нулевых показателей среди них, определяем тип режима (аттрактора) в системе:

- а) P – предельный цикл, $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0$,
- б) T_2 – двухчастотный тор, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0$,
- в) T_3 – трехчастотный тор, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0$,
- г) T_4 – четырехчастотный тор, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 < 0$,
- е) T_5 – пятичастотный тор, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 = 0$,
- д) C – хаос, $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0$.

После этого точка на плоскости параметров отмечается определенным цветом, в соответствии с типом режима. В результате сканирования всей плоскости параметров получаем двухпараметрическую карту распределения различных колебательных режимов.

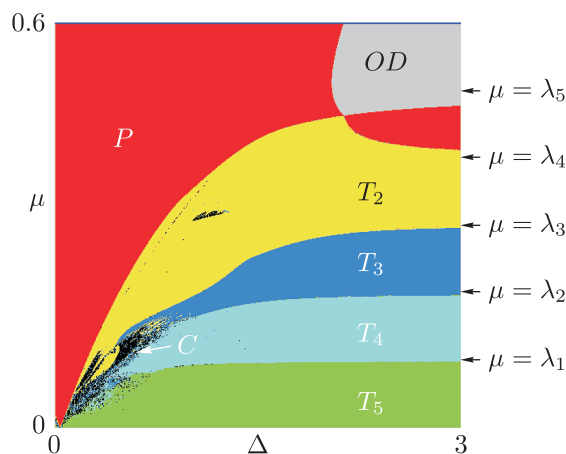


Рис. 1. Карта показателей Ляпунова для сети из пяти неидентичных осцилляторов Ван дер Поля с глобальной связью (2.1), в которой $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.3, \lambda_4 = 0.4, \lambda_5 = 0.5$.

Полученная для системы (2.1) карта на плоскости параметров (Δ, μ) показана на рисунке 1. Благодаря выбранной структуре системы, в ней в значительной мере устранены основные резонансные эффекты. В частности, характерные языки резонансных торов разной размерности (см. [12, 13]) не наблюдаются. Достаточно выраженный язык резонансного двухчастотного тора можно видеть лишь в области $\Delta \leq 0.5$, между областью пятичастотных торов и полной синхронизации. Интересно отметить, что он погружен в область хаоса, возникающую при малых связях.⁴ При этом трехчастотные, четырехчастотные и отчасти пятичастотные торы разрушены, хотя хаос и является слабым. (Типичные значения положительного показателя Ляпунова составляют величины порядка 10^{-3} – 10^{-2} .) Об этой области можно сказать, что здесь в какой-то мере работает сценарий Рюэля и Такенса. Отметим, однако, что небольшой островок хаоса присутствует и в области двухчастотных

⁴Наличие хаоса при малой связи в сетях из небольшого числа элементов было обнаружено в работе [21], и там этот эффект получил название «фазовый хаос» (*phase chaos*).

торов, при величине связи порядка 0.3–0.4. Таким образом, хаос не обязательно возникает в результате разрушения трехчастотного тора, вполне достаточно и меньшей размерности.

С другой стороны, в области большого рассинхронизма осцилляторов $\Delta \geq 1$ при уменьшении параметра диссипации можно наблюдать появление торов все более высокой размерности. Границы соответствующих областей в асимптотике $\Delta \rightarrow \infty$ отвечают величинам μ , равным значениям управляющих параметров λ_i . Для удобства восприятия они отмечены стрелками по правому обрезу карты. Таким образом, при уменьшении параметра диссипативной связи качественно наблюдается картина, характерная для сценария Ландау – Хопфа.

3. Каскад квазипериодических бифуркаций

Убедимся, что здесь имеет место именно каскад квазипериодических бифуркаций Неймарка – Сакера (квазипериодических бифуркаций Хопфа) для торов все более высокой размерности. Для этого обратимся к графикам ляпуновских показателей на рисунке 2, построенным вдоль линии $\Delta = 3$. Можно видеть, что при больших значениях параметра связи все показатели отрицательные, что соответствует режиму «гибели колебаний» (*the oscillator death*). Этот режим характерен для связанных осцилляторов и возникает благодаря диссипативному характеру связи: при достаточно большой ее величине связь подавляет колебания [9]. В точке H происходит бифуркация Андронова – Хопфа, и один показатель Λ_1 становится нулевым. Далее, в точке NS происходит бифуркация Неймарка – Сакера, и еще один показатель Λ_2 становится нулевым. В точке QNS_1 становится равным нулю показатель Λ_3 , и рождается трехмерный тор. Чтобы идентифицировать характер бифуркации, замечаем, что до бифуркации показатели Λ_3 и Λ_4 *совпадали*. Это важный атрибут мягкой квазипериодической бифуркации Неймарка – Сакера [14]. При квазипериодической седлоузловой бифуркации показатели ведут себя иначе [14, 15].

При дальнейшем увеличении параметра оставшиеся показатели изменяются аналогичным образом, так что в точке QNS_2 в результате второй квазипериодической бифуркации Неймарка – Сакера рождается четырехмерный тор, а в точке QNS_3 — пятимерный.

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют развитие сценария Ландау – Хопфа в такой системе. На рисунке 3 показана эволюция фазовых портретов осцилляторов, наблюдающаяся при уменьшении параметра диссипации. На каждом рисунке даны одновременно фазовые портреты всех пяти осцилляторов на плоскости «динамическая переменная – скорость ее изменения». Траектории разных осцилляторов показаны разным цветом. Рисунок 3а отвечает достаточно большой диссипации $\mu = 0.45$. В этом случае наблюдается вложенный в многомерное пространство состояний предельный цикл. Хорошо видно, что колебания пятого осциллятора наиболее интенсивные; это обусловлено тем, что его управляющий параметр λ самый большой. Интенсивность колебаний для остальных осцилляторов последовательно убывает. На рисунке 3б, для случая $\mu = 0.25$, отвечающего трехчастотному тору, траектории всех осцилляторов возмущены квазипериодическим образом. Однако на рисунке 3с, при $\mu = 0.05$, когда реализуется пятичастотный тор, размер возмущений снова падает: малая связь слабо возмущает орбиты.

На рисунке 4 показан спектр Фурье колебаний пятого осциллятора, отвечающий развитию сценария Ландау – Хопфа в системе (2.1). Можно видеть последовательное обогащение спектра колебаний системы все новыми линиями, отвечающими квазипериодичности все более высокой размерности. Отметим, однако, что в случае, показанном на рисунке 4е, степень «сложности» спектра на визуальном уровне не увеличивается, а скорее уменьша-

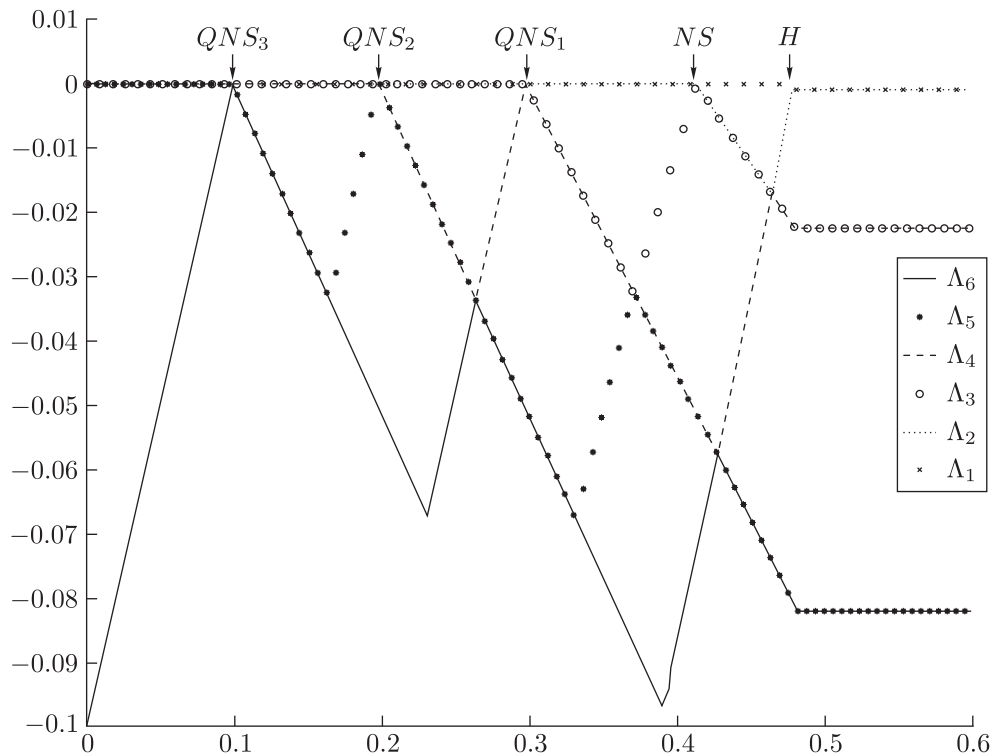


Рис. 2. Графики зависимости шести ляпуновских показателей системы (2.1) от величины диссипативной связи, $\Delta = 3$.

ется, хотя, строго говоря, в системе имеет место пятимерный тор. Причина состоит в существенном уменьшении уровня связи. При очень малой связи аттрактор оказывается слабо возмущенным и становится близким к предельному циклу системы автономных осцилляторов (рис. 3с). Поэтому высота соответствующих линий в спектре становится меньше, хотя в более мелких масштабах спектр остается сложным.

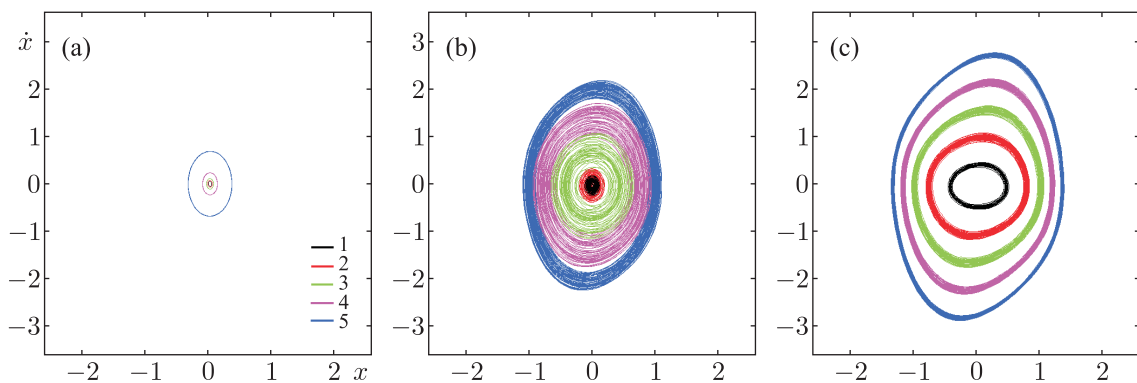


Рис. 3. Эволюция фазовых портретов системы (2.1) при уменьшении диссипации в системе, (а) $\mu = 0.45$, предельные циклы, (б) $\mu = 0.25$, трехчастотный тор, (с) $\mu = 0.05$, пятичастотный тор. Цифры отвечают номеру осциллятора, параметр частотной расстройки $\Delta = 3$.^a

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/2087/0>



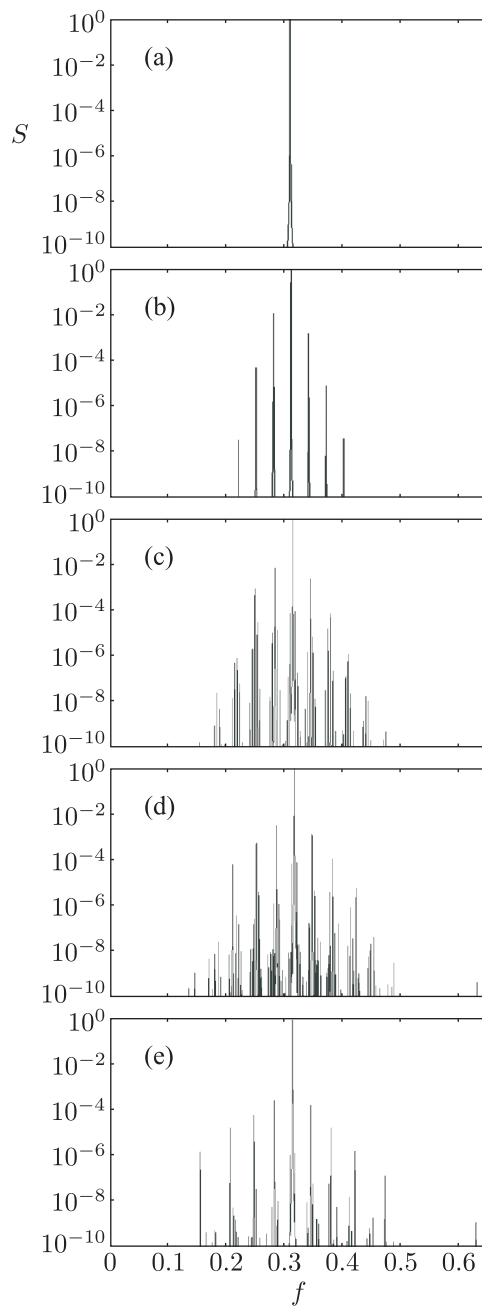


Рис. 4. Эволюция спектра Фурье пятого осциллятора в системе (2.1) при уменьшении диссипации, $\Delta = 3$, (a) $\mu = 0.45$, (b) $\mu = 0.35$, (c) $\mu = 0.25$, (d) $\mu = 0.15$, (e) $\mu = 0.05$.

На рисунке 5 приведены примеры зависимостей обобщенной координаты первого осциллятора $x(t)$ от времени. Представленные графики отвечают режимам двухчастотного, трехчастотного и четырехчастотного торов. На рисунке 5а можно видеть типичную картину биений, характерную для двухчастотных колебаний. Рисунки 5b и 5с демонстрируют заметно более сложный сигнал. Для двухчастотного режима процессы установления происходят очень быстро, после чего система выходит на аттрактор. Однако уже для трехчастотного тора время установления колебаний заметно увеличивается ($t \approx 100$ по визуальной оценке для рис. 5b).

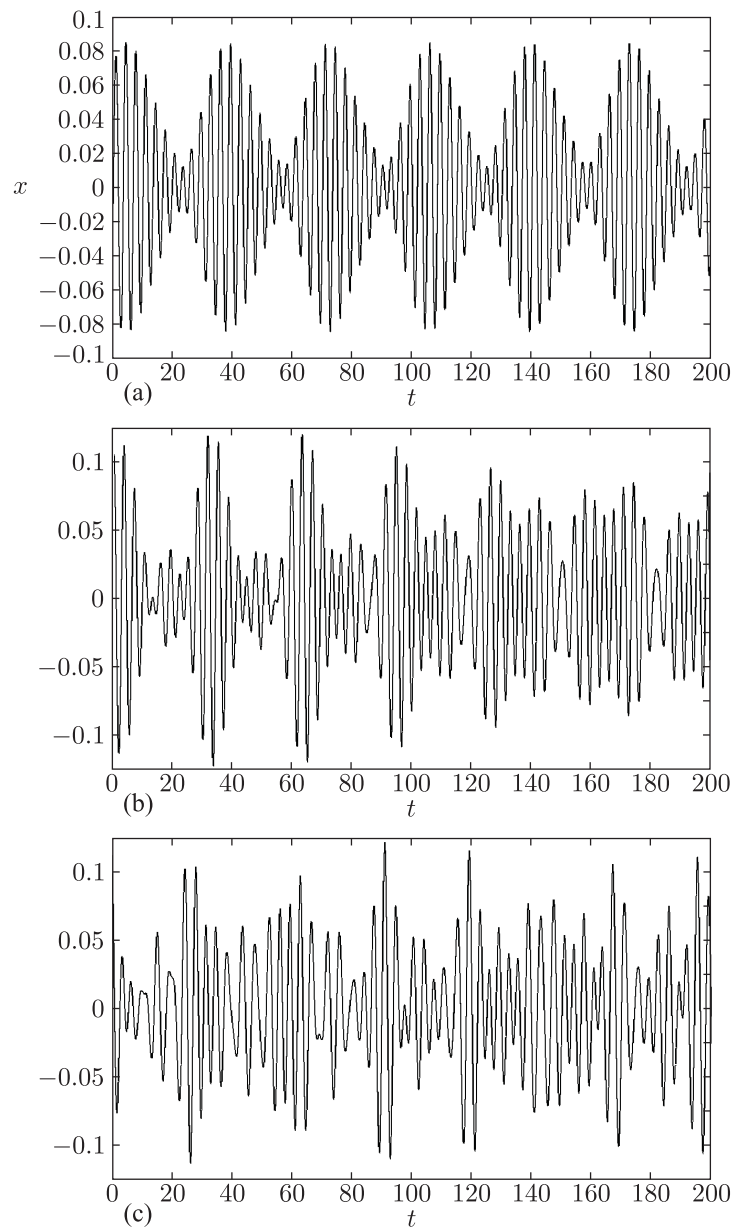


Рис. 5. Реализации для первого осциллятора в системе (2.1): (а) случай двухчастотного тора, $\mu = 0.35$, (б) случай трехчастотного тора, $\mu = 0.25$, (с) случай четырехчастотного тора, $\mu = 0.15$.

4. Заключение

Таким образом, при выполнении ряда условий, в первую очередь, наличия неидентичности по параметрам возбуждения мод и рассинхронизма между модами, в ансамбле автоколебательных элементов может наблюдаться последовательный каскад мягких квазипериодических бифуркаций для торов все более высокой размерности, который можно ассоциировать со сценарием Ландау – Хопфа. Модель, представленная в настоящей статье, может быть реализована, например, в виде электронного устройства, которое будет служить примером физической системы, демонстрирующей данный сценарий развития сложной динамики при изменении управляющего параметра.

Список литературы

- [1] Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8, с. 339–342.
- [2] Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1948, vol. 1, 303–322.
- [3] Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // *Странные аттракторы: Сб. ст. / Я. Г. Синай, Л. П. Шильников. М.: Мир, 1981. С. 117–151.*
- [4] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе: О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
- [5] Денисова Н. В., Козлов В. В. О хаотизации колебаний связанных маятников // Докл. РАН, 1999, т. 367, № 2, с. 191–193.
- [6] Козлов В. В. Ансамбли Гиббса, равномерность энергии симпатических осцилляторов и статистические модели термостата // *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 2, с. 123–140.
- [7] Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Attractors on an N -torus: Quasiperiodicity versus chaos // *Phys. D*, 1985, vol. 15, no. 3, pp. 354–373.
- [8] Battelino P. M. Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // *Phys. Rev. A*, 1988, vol. 38, no. 3, pp. 1495–1502.
- [9] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [10] Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhys. Lett.*, 2009, vol. 86, 30003.
- [11] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е. Регулярные и хаотические автоколебания: Синхронизация и влияние флуктуаций. Долгопрудный: Интеллект, 2009. 312 с.
- [12] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 693–717.
- [13] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 411–425.
- [14] Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 154–184.
- [15] Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 769–787.
- [16] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 1, с. 3–28.
- [17] Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность // *УФН*, 1978, т. 125, с. 123–168.
- [18] Монин А. С. О природе турбулентности // *УФН*, 1978, т. 125, с. 97–122.
- [19] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А. Математические аспекты развития турбулентности по Ландау // *УМН*, 2008, т. 63, № 2(380), с. 21–84.
- [20] Емельянова Ю. П., Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В. Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // *ПНД*, 2011, т. 19, № 5, с. 76–90.
- [21] Popovych O., Maistrenko Yu., Tass P. Phase chaos in coupled oscillators // *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, no. 6, 065201, 4 pp.

Landau – Hopf scenario in the ensemble of interacting oscillators

Alexander P. Kuznetsov¹, Sergey P. Kuznetsov², Ludmila V. Turukina³, I. R. Sataev⁴

Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

¹apkuz@rambler.ru, ²spkuz@yandex.ru, ³lvtur@rambler.ru, ⁴sataevir@rambler.ru

The conditions are discussed for which the ensemble of interacting oscillators may demonstrate Landau – Hopf scenario of successive birth of multi-frequency regimes. A model is proposed in the form of a network of five globally coupled oscillators, characterized by varying degree of excitement of individual oscillators. Illustrations are given for the birth of the tori of increasing dimension by successive quasi-periodic Hopf bifurcation.

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Keywords: synchronization, bifurcations, quasi-periodic dynamics, chaos

Received September 24, 2012, accepted October 19, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 863–873 (Russian)