Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 5. С. 941–955.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.352, 531.355
MSC 2010: 70K20, 70K42

Пространственная задача о буксируемом атмосферном зонде

Е. И. Отставнов

Рассматривается сильно ограниченная задача об относительном равновесии двух тел, находящихся в поле притяжения ньютонова центра и скрепленных нерастяжимой безмассовой нитью. Одно из них подвергается воздействию сил атмосферного сопротивления. Исследуется устойчивость возникающих относительных равновесий.

Ключевые слова: космический лифт, односторонняя связь, сопротивление атмосферы, относительные равновесия, устойчивость

1. Введение

В работе [3] была предложена модельная задача о космическом лифте и дан краткий обзор инженерных идей, лежащих в ее основе. Эту задачу можно назвать сильно ограниченной проблемой динамики связки двух тел, движущейся в поле ньютонова притягивающего центра. Сильное ограничение состоит в фиксации положения одной из точек во вращающейся системе координат. Существуют также ограниченные задачи динамики связанных тела и точки [5, 9] либо пары точек [2], когда центр масс системы движется по заданной кеплеровой орбите. Неограниченная задача [8] снимает и это условие. Сильно ограниченная задача отличается от просто ограниченной тем, что при упругом выходе на связь изменяется импульс только одной точки, а не происходит его перераспределения между телами связки. Ограниченный вариант задачи о динамике системы связанных материальных точек в атмосфере рассматривался ранее в [4], но там соединительный трос предлагался относительно коротким. В духе работы [3] рассмотрим сильно ограниченную задачу, считая одну из точек погруженной в атмосферу планеты, но не будем считать длину троса малой относительно радиуса орбиты второй фиксированной точки. Эта модель может считаться про-

Получено 15 октября 2012 года
После доработки 28 ноября 2012 года

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00406-а.

Отставнов Евгений Игоревич
eotstavnov@ya.ru
Московский государственный строительный университет
129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

стейшим описанием системы для долговременного исследования верхних слоев атмосферы или газа, находящегося в околопланетном пространстве, когда легкий зонд, обладающий малым сопротивлением, буксируется массивной орбитальной станцией. В этом случае затраты на контролируемое удержание зонда могут оказаться ниже, чем для самостоятельной конструкции, независимо маневрирующей в атмосфере.

2. Постановка задачи

Материальная точка-буксир зафиксирована на поверхности сферы радиуса $\widetilde{R}$, равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг некоторой неподвижной оси. Имеется притягивающий потенциал с гравитационной постоянной $\widetilde{\gamma}$ с полюсом в центре сферы. Вторая материальная точка-зонд массы m соединена с первой нерастяжимой безмассовой нитью (тросом) длины $\widetilde{l}$. Он погружен в атмосферу, также равномерно вращающуюся вокруг той же оси с угловой скоростью $\widetilde{\omega}$ относительно сферы. В силу свободы выбора единиц измерения массы, длины и времени можно рассмотреть безразмерные параметры и заменить $\widetilde{R} \to 1$, $m \to 1$, $\Omega \to 1$, $\widetilde{l} \to l$, $\widetilde{\gamma} \to \gamma$, $\widetilde{\omega} \to \omega$.

Введем подвижную правую декартову систему координат $Oxyz$ с началом O в притягивающем центре, осью Oz, совпадающей с осью вращения, осью Ox, построенной так, чтобы закрепленная точка-буксир была в плоскости Oxz, и осью Oy, дополняющей систему до правой тройки. Положение буксира будем характеризовать широтой α.

Примем квадратичный закон зависимости силы сопротивления воздуха от скорости и стационарную экспоненциальную модель плотности $-f|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}$, $f = ce^{-\beta\rho} > 0$. Здесь и ниже $\rho = \sqrt{r^2+z^2}$ обозначает расстояние от зонда до притягивающего центра. Лагранжиан запишем в цилиндрических координатах r, ϕ, z, где $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$:

$$L = \frac{\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\phi}+1\right)^2 + \dot{z}^2}{2} + \frac{\gamma}{\rho}. \tag{2.1}$$

Имеется непотенциальная сила атмосферного сопротивления, действующая на зонд $-f|\boldsymbol{\Delta V}|\boldsymbol{\Delta V}$ и выражаемая в виде

$$Q_r = -ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|\dot{r}, \quad Q_\phi = -ce^{-\beta\rho}r^2|\boldsymbol{\Delta V}|(\dot{\phi}-\omega), \quad Q_z = -ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|\dot{z}. \tag{2.2}$$

Выше скорость зонда относительно атмосферы обозначена как

$$\boldsymbol{\Delta V} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\left(\dot{\phi}-\omega\right)\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z. \tag{2.3}$$

На систему наложена идеальная неудерживающая голономная связь

$$1 + r^2 + z^2 - 2r\cos\phi\cos\alpha - 2z\sin\alpha \leqslant l^2. \tag{2.4}$$

Положим, что при ударе кинетическая энергия убывает (случай абсолютно упругого удара не рассматривается).

Необходимо найти относительные равновесия и условия их устойчивости, где это возможно.

3. Уравнения движения системы

Следуя [3], применим для описания динамики системы уравнения Лагранжа с неопределенными множителями:

$$
\begin{gathered}
\ddot{r} = r\left(\dot{\phi}+1\right)^2 - \frac{\gamma r}{\rho^3} - ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|\dot{r} + \lambda\,(r-\cos\phi\cos\alpha),\\
\frac{d}{dt}\left(r^2\left(\dot{\phi}+1\right)\right) = -ce^{-\beta\rho}r^2|\boldsymbol{\Delta V}|(\dot{\phi}-\omega) + \lambda r\sin\phi\cos\alpha,\\
\ddot{z} = -\frac{\gamma z}{\rho^3} - ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|\dot{z} + \lambda\,(z-\sin\alpha).
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

Кроме того, потребуются уравнения движения в сферических координатах, построенных относительно осей $Oxyz$, но с началом в точке-буксире. Замена дается формулами $x-\cos\alpha = s\cos\theta\cos\psi$, $y = s\cos\theta\sin\psi$, $z-\sin\alpha = s\sin\theta$:

$$
\begin{aligned}
\ddot{s} = &-\frac{\gamma}{2\rho^3}\frac{\partial\rho^2}{\partial s} + s\left(\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta\left(\dot{\psi}+1\right)\right) + \cos\alpha\cos\theta\cos\psi -\\
&- ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|\left(\dot{s} + (1-\omega)\cos\alpha\cos\theta\sin\psi\right) + \widehat{\lambda},\\
\frac{d}{dt}\Big(s^2\cos^2\theta(\dot{\psi}+1)\Big) = &-s\cos\alpha\cos\theta\sin\psi - \frac{\gamma}{2\rho^3}\frac{\partial\rho^2}{\partial\psi} -\\
&- ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|s\cos\theta\left(s\dot{\psi}\cos\theta + \cos\alpha\cos\theta\cos\psi - \omega(s+\cos\alpha\cos\psi)\right),\\
\frac{d}{dt}(s^2\dot{\theta}) = &-s^2\left((\dot{\psi}+1)^2\sin 2\theta/2\right) - s\cos\alpha\sin\theta\cos\psi -\\
&- ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|s\left(s\dot{\theta} - \cos\alpha\sin\theta\sin\psi + \omega\cos\alpha\sin\theta\cos\psi\right).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

В этом случае связь выражается наиболее простым образом $s \leqslant l$ и неопределенный множитель входит только в одно уравнение, что позволяет просто выразить величину натяжения троса:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\lambda} = &\left(\frac{\gamma}{2\rho^3}\frac{\partial\rho^2}{\partial s}\right)_{s=l} - l\left(\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta\left(\dot{\psi}+1\right)\right) - \cos\alpha\cos\theta\cos\psi +\\
&+ \left(ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|\right)_{s=l}(1-\omega)\cos\alpha\cos\theta\sin\psi.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Оставшиеся два уравнения (3.2) естественным образом приводятся к виду, описывающему движение по границе связи, подстановкой $s(t) \equiv l$.

Нить остается натянутой при отрицательном значении неопределенного множителя. Как только он становится неотрицательным, нить ослабевает, и его следует исключить из уравнений движения до тех пор, пока снова не будет достигнуто равенство в (2.4) (или $s = l$).

4. Относительные равновесия зонда

Для случая удерживающей или ненатянутой (т.е. отсутствия) связи более широкий класс задач о движении в среде с малым сопротивлением рассматривался в [7] при $\omega = -1$

в наших обозначениях. Были получены приближенные формулы для сдвига относительных равновесий под действием сопротивления и теоремы об устойчивости, если границу связи можно представить в виде $z = f(x, y)$. Согласно принятой модели сопротивления эти результаты будут справедливы для достаточно удаленных относительных равновесий $\rho \gg 1$, если не происходит схода со связи.

Рассмотрим неподвижные точки системы (3.1) при натянутой связи (2.4). Учитывая, что в данном случае $|\boldsymbol{\Delta V}| = |\omega| r$, получим

$$\begin{aligned} r - \frac{\gamma r}{\rho^3} + \lambda\,(r - \cos\phi\cos\alpha) &= 0,\\ c e^{-\beta\rho}|\omega|\omega r^2 + \lambda\sin\phi\cos\alpha &= 0,\\ -\frac{\gamma z}{\rho^3} + \lambda\,(z - \sin\alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Уравнения симметричны относительно замен $\phi \to -\phi$, $\omega \to -\omega$ и $z \to -z$, $\alpha \to -\alpha$, поэтому без потери общности будем считать $\omega \geqslant 0$ и $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Заметим, что из третьего уравнения (4.1) следует, что при $z \neq 0$ имеем $\lambda \neq 0$, то есть относительные равновесия вне плоскости Oxy невозможны при ненатянутой связи.

Рассмотрим различные случаи и решения (4.1) при натянутой связи.

Случай (A) $\omega = 0$. Из второго уравнения получаем $\sin\phi = 0$ либо $\cos\alpha = 0$.

(A.1) $\cos\alpha = 0$, что равносильно $\sin\alpha = 1$ по решению. Поделив первое уравнение на r, приходим к $1 - \dfrac{\gamma}{\rho^3} = -\lambda$, что возможно только при $\gamma < \rho^3$, то есть внутри сферы радиуса «геостационарной» орбиты. Из третьего уравнения получаем условие совместности $z < \sin\alpha = 1$, так как $\lambda < 0$. Подставив выражение $-\dfrac{\gamma}{\rho^3} = -1 - \lambda$ в третье уравнение, получим $z = -\lambda > 0$ и, возвращаясь к первому, придем к окончательному выражению для семейства относительных равновесий. Дополним его выражением для связи:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\gamma}{\rho^3} &= z,\\ \rho^2 - 2z + 1 &= l^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Уравнения не зависят от ϕ, трос закреплен в северном полюсе единичной сферы, условия задают пересечение сферы с центром на Oz и поверхности вращения вокруг оси Oz, то есть некоторую окружность, параллельную плоскости Oxy. Подставим z из второго уравнения в первое:

$$\begin{aligned} \rho^5 - \rho^3(l^2 + 1) + 2\gamma &= 0,\\ \rho^2 - 2z + 1 &= l^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

По решению должно выполняться $0 < z < 1$, равносильное $\rho \in (l^2 - 1,\, l^2 + 1)$ для натянутости связи. Точное решение для (4.3) получить не удается, но приведем необходимое условие его существования. Полином $f(\rho) = \rho^5 - \rho^3(l^2+1) + 2\gamma$ положителен в нуле, возрастает при $\rho \to +\infty$, имеет нулевую производную только при $\rho^* = \sqrt{\frac{3}{5}(l^2+1)}$, поэтому для существования корней необходимо, чтобы $f(\rho^*) = 2\gamma - \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}\frac{2}{5}(l^2+1)^{5/2} \leqslant 0$.

Этот случай допускает также вырожденные вертикальные решения при $r = 0$, тогда из третьего уравнения (4.1) аналогично получим условие натянутости $z \in (0, 1)$, и уравнение границы связи даст $z = 1 - l$, что ограничивает $0 < l < 1$ и допускает решения при любом $\gamma > 0$.

(A.2) Случай $\sin\phi = 0$. Тогда $\cos\phi = \pm 1$ и решения лежат в плоскости Oxz. Сделаем замену $r = \rho\cos\Phi$, $z = \rho\sin\Phi$. Подставив в первое и третье уравнения (4.1) и рассмотрев их линейные комбинации с коэффициентами $\pm\sin\Phi$, $\pm\cos\Phi$, получим:

$$\begin{gathered}\rho\cos\Phi\sin\Phi \mp \lambda\sin\Phi\cos\alpha + \lambda\cos\Phi\sin\alpha = 0,\\ \rho\cos^2\Phi - \gamma/\rho^2 + \lambda\left(\rho \mp \cos\Phi\cos\alpha - \sin\Phi\sin\alpha\right) = 0.\end{gathered} \tag{4.4}$$

(A.2.1) $\cos\phi = +1$, тогда (4.4) упрощается:

$$\begin{gathered}\rho\cos\Phi\sin\Phi - \lambda\sin\left(\Phi - \alpha\right) = 0,\\ \rho\cos^2\Phi - \gamma/\rho^2 + \lambda\left(\rho - \cos\left(\Phi - \alpha\right)\right) = 0.\end{gathered} \tag{4.5}$$

(A.2.1.1) $\Phi \equiv \alpha \pmod \pi$, тогда из первого уравнения получим $\cos\Phi = 0$ либо $\sin\Phi = 0$, что приводит к уже исследованному случаю вертикальных равновесий и равновесиям в плоскости соответственно. Плоский случай при $\omega = 0$ покрывается результатами [3].

(A.2.1.2) $\Phi \not\equiv \alpha \pmod \pi$, тогда выразим из первого уравнения $\lambda = \dfrac{\rho\cos\Phi\sin\Phi}{\sin\left(\Phi - \alpha\right)}$ ($\lambda < 0$ — условие натянутости троса), подставим во второе и используем формулы приведения:

$$\begin{gathered}\cos 2\Phi + C\sin 2\Phi = \frac{2\gamma}{\rho^3},\\ C = \frac{\rho - \cos\left(\Phi - \alpha\right)}{\sin\left(\Phi - \alpha\right)}.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Условие натянутости связи приводится к виду $1 + \rho^2 - 2\rho\cos\left(\Phi - \alpha\right) = l^2$, откуда можно выразить косинус (а значит, и синус) разности $\cos\left(\Phi - \alpha\right) = \dfrac{\left(\rho^2 + 1 - l^2\right)}{2\rho}$ без использования Φ и решить (4.6) методом дополнительного аргумента:

$$\begin{gathered}2\Phi = (-1)^m \arcsin\left(\frac{2\gamma}{\rho^3\sqrt{1 + C^2}}\right) - \Psi + \pi m, \quad m \in Z,\\ \sin\Psi = 1/\sqrt{1 + C^2}, \quad \cos\Psi = C/\sqrt{1 + C^2}.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Решение существует, если

$$\frac{\gamma\sqrt{4\rho^2 - \left(\rho^2 + 1 - l^2\right)^2}}{l\rho^4} \leqslant 1. \tag{4.8}$$

Полученное выражение определяет кривую относительных равновесий в полярных координатах плоскости Oxz в зависимости от значений параметров задачи. Вместе с условием натянутости (4.7) закрывает данный случай.

(A.2.2) $\cos\phi = -1$. Аналогично предыдущему получим

$$\begin{gathered}\rho\cos\Phi\sin\Phi + \lambda\sin\left(\Phi + \alpha\right) = 0,\\ \rho\cos^2\Phi - \gamma/\rho^2 + \lambda\left(\rho - \cos\left(\Phi + \alpha\right)\right) = 0.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Уравнения исследуются аналогично и дают еще одно семейство равновесий:

$$
\begin{gathered}
2\Phi = (-1)^{m+1} \arcsin\left(\frac{2\gamma}{\rho^3\sqrt{1+D^2}}\right) + \widehat{\Psi} - \pi m, \quad m \in Z, \\
\sin\widehat{\Psi} = 1/\sqrt{1+D^2},\ \cos\widehat{\Psi} = -D/\sqrt{1+D^2}, \\
D = (\rho + \cos(\Phi+\alpha))/\sin(\Phi+\alpha), cos(\Phi+\alpha) = (l^2 - \rho^2 - 1)/(2\rho).
\end{gathered} \tag{4.10}
$$

Решение существует при $\dfrac{2\gamma}{\rho^3\sqrt{1+D^2}} \leqslant 1$.

(Б) $\omega \neq 0$. В силу указанной выше симметрии уравнений для поиска относительных равновесий здесь и всюду ниже будем считать $\omega > 0$, $\cos\alpha \geqslant 0$, $\sin\alpha \geqslant 0$, если не оговорено обратное. При натянутой связи $\lambda < 0$ и знаки ω и $\sin\phi$ совпадают, то есть $\sin\phi > 0$.

Выразим из второго уравнения (4.1) λ и подставим его в первое и третье:

$$
\begin{gathered}
\rho^2 = r^2 + z^2, \\
1 - \frac{\gamma}{\rho^3} = ce^{-\beta\rho}\omega^2 r\left(\operatorname{ctg}\phi - \frac{r}{\sin\phi\cos\alpha}\right), \\
\frac{\gamma z}{\rho^3} + \frac{ce^{-\beta\rho}\omega^2 r^2}{\sin\phi\cos\alpha}(z - \sin\alpha) = 0.
\end{gathered} \tag{4.11}
$$

Рассмотрим случаи различных значений z.

(Б.1) $z = 0$. При этом $\sin\alpha = 0$, $\rho = r$ и поиск относительных равновесий сводится к рассмотрению плоской задачи. Оставшееся первое уравнение (4.11)

$$
\sin\phi\left(\frac{\gamma}{r^3} - 1\right) + c\omega^2 re^{-\beta r}(r - \cos\phi) = 0. \tag{4.12}
$$

Задача поиска относительных равновесий требует отыскания решений (4.12) при условии

$$
\phi \in (0, \pi) \Leftrightarrow \sin\phi > 0 \Leftrightarrow \omega > 0 \tag{4.13}
$$

и натянутой связи.

Рассмотрим отдельно специальный случай $r = \gamma^{\frac{1}{3}}$, при котором зонд находится на «геостационарной» орбите. Согласно (4.12), (4.13), это равносильно

$$
r = \cos\phi = \gamma^{\frac{1}{3}}, \quad \phi \in (0, \pi). \tag{4.14}
$$

Этот случай возможен при $\gamma \leqslant 1$. Случай $r = \gamma = 1$ сводится к ситуации $\omega = 0$ согласно (4.11), так как тут должно выполняться $\sin\phi = 0$.

Если же $r \neq \cos\phi$, то решим (4.12) методом дополнительного аргумента:

$$
\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{c\omega^2 r^4 e^{-\beta r}}{\gamma - r^3}\right) - (-1)^n \arcsin\left(\frac{c\omega^2 r^5 e^{-\beta r}}{\sqrt{(\gamma - r^3)^2 + c^2\omega^4 r^8 e^{-2\beta r}}}\right) + \pi n, \quad n \in Z. \tag{4.15}
$$

Заметим, что r можно использовать вместо параметра l всюду, кроме точек на «геостационарной» орбите, в силу $\dfrac{\partial l^2}{\partial r} = r - \cos\phi \neq 0$ согласно уравнению натянутой связи в данном случае.

(Б.2) $z \neq 0$. Поделим второе уравнение (4.11) на z:

$$\frac{\gamma}{\rho^3} + \frac{ce^{-\beta\rho}\omega^2 r^2}{\sin\phi\cos\alpha}\left(1 - \frac{\sin\alpha}{z}\right) = 0.$$

Оно может быть выполнено, только если сомножитель в скобках отрицателен, то есть $\sin\alpha > z$. Геометрически это означает, что зонд находится ниже точки крепления, но выше экваториальной плоскости Oxy.

Преобразуем (4.11). Будем использовать ρ (вместо l) и $\kappa = ce^{-\beta\rho}\omega^2$ в качестве новых параметров. Исключим r, используя выражение для ρ:

$$\begin{gathered}\sin\phi\left(1 - \frac{\gamma}{\rho^3}\right) = \kappa\sqrt{\rho^2 - z^2}\left(\cos\phi - \frac{\sqrt{\rho^2 - z^2}}{\cos\alpha}\right),\\ z\left(\frac{\gamma\sin\phi}{\rho^3} + \frac{\kappa(\rho^2 - z^2)}{\cos\alpha}\right) = \kappa\operatorname{tg}\alpha.\end{gathered} \tag{4.16}$$

Так как $\sin\phi > 0$, то решим первое уравнение как квадратное относительно $\cos\phi$ с положительным корнем для выражения синуса. Это возможно всюду, кроме вырожденных ситуаций, включающих вертикальные решения $r = 0$ при $\alpha = \pi/2$ и точки $\gamma = \rho^3$, в которых $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - z^2}}{\cos\alpha}$. В общем случае $\cos\phi > (<)\dfrac{\sqrt{\rho^2 - z^2}}{\cos\alpha}$, когда $\rho^3 > (<)\gamma$ и выбираются подходящие корни

$$\begin{gathered}\cos\phi = c(\rho,\kappa,\gamma,z,\alpha) = \frac{ab}{a^2+1} \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+1},\\ a = \frac{\kappa\sqrt{\rho^2 - z^2}\rho^3}{\rho^3 - \gamma},\\ b = \frac{\kappa(\rho^2 - z^2)\rho^3}{(\rho^3 - \gamma)\cos\alpha}.\end{gathered} \tag{4.17}$$

Тогда $\sin\phi = \sqrt{1 - c^2}$ можно представить как функцию параметров и z, и подставить результат во второе уравнение (4.16), что даст неявную зависимость z только от параметров задачи. Формально выражая z и подставляя обратно в выражение для $\sin\phi$, определим угол, а формула $r = \sqrt{\rho^2 - z^2}$ предоставит зависимость последней координаты от параметров.

Также можно решить второе уравнение (4.16) как кубическое относительно z. Исходя из значения дискриминанта (положительный, нулевой, отрицательный)

$$Det = Q^3 - R^2 = \left[\rho^2 + \frac{\gamma\sin\phi\cos\alpha}{\kappa\rho^3}\right]^3 / 27 - \sin^2\alpha/4,$$

получим три, два и одно вещественное решение соответственно:

$$\begin{gathered}Det > 0, \quad A = \frac{1}{3}\arccos\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{Q^3}}, \quad z_k = -2\sqrt{Q}\cos\left(A + \frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = -1, 0, 1,\\ Det = 0, \quad z_1 = -2\sqrt{Q}, \quad z_2 = \sqrt{Q},\\ Det < 0, \quad z = -2\sqrt{Q}ch\left[\frac{1}{3}Arch\left(\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{Q^3}}\right)\right].\end{gathered} \tag{4.18}$$

Из формул видно, что удобно использовать Q в качестве нового независимого параметра. Тогда выразим

$$\sin\phi = \frac{\kappa\rho^3\left(3Q-\rho^2\right)}{\gamma\cos\alpha},$$

$\cos\phi$ представим с помощью тригонометрического тождества и подставим все в первое уравнение (4.16) вместе с z. Это даст условие совместности. Для каждого из случаев опять строится значение $r=\sqrt{\rho^2-z^2}$, что позволяет выразить решение задачи о поиске относительных равновесий, используя избыточный набор параметров и одно условие совместности, не содержащее фазовых переменных. Формулы в явном виде не приводятся из-за их громоздкости.

5. Характер сил сопротивления, действующих на зонд

Рассмотрим структуру сил сопротивления в окрестности относительного равновесия. Так как атмосфера подвижна относительно основной системы координат, то в общем случае силы сопротивления будут иметь в своем составе потенциальную, непотенциальную позиционную и диссипативную составляющую (см. [7]). Для удобства исследования рассмотрим их построение в лагранжевых координатах. Возьмем разложение силы в ряд около относительного равновесия:

$$Q_{atm} = (Q_{atm})_0 + \left(\frac{\partial Q_{atm}}{\partial q}\right)_0\Delta q + \left(\frac{\partial Q_{atm}}{\partial \dot q}\right)_0\Delta\dot q + \ \ldots .$$

Выше нулевым индексом обозначены значения в рассматриваемой точке фазового пространства. Выделим составляющие:

$$\begin{gathered}
Q_{atm} = -\frac{\partial V_{atm}}{\partial q} + K\Delta q + D\Delta\dot q + \ \ldots,\\
V_{atm} = -(Q_{atm})_0\Delta q - \frac{1}{2}\,(S\Delta q,\Delta q),\\
S = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{atm}}{\partial q} + \left(\frac{\partial Q_{atm}}{\partial q}\right)^T\right)_0,\\
K = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{atm}}{\partial q} - \left(\frac{\partial Q_{atm}}{\partial q}\right)^T\right)_0,\\
D = \left(\frac{\partial Q_{atm}}{\partial \dot q}\right)_0.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Используя (2.2), можно убедиться, что матрица D отрицательно определена, однако наличие других составляющих затрудняет применение известных результатов теории устойчивости, требующих обращения только к потенциальной части системы [6].

6. Устойчивость по Ляпунову относительных равновесий. Общие соображения

Рассмотрим механическую систему в фазовых координатах a, v, b, где $a, v \in R$, $b \in R^n$, $n \in N$. Пусть на систему наложена идеальная неудерживающая голономная связь $a \leqslant 0$

и коэффициент восстановления при ударе строго меньше единицы $k \in [0, 1)$ (удар не является абсолютно упругим). Используем уравнения с неопределенными множителями. Здесь и ниже динамика рассматривается в окрестности положений равновесия. Без потери общности считаем его началом координат фазового пространства. Введем два набора уравнений движения: отвечающие свободному движению

$$\begin{gathered} \dot{a} = v, \\ \dot{v} = F + G(a, v, b) + \ldots, \\ \dot{b} = B(a, v, b), \end{gathered} \tag{6.1}$$

и уравнения движения при натянутой связи,

$$\dot{b} = B(0, 0, b). \tag{6.2}$$

Уравнения в таком виде можно получить, если матрица кинетической энергии невырожденна. Так как связь натянута, то $F = O(1) > 0$; $G, B = O(|a|+|v|+||b||)$ при $(a, v, b) \to (0, 0, 0)$. Для краткости ниже база явно указываться не будет.

Теорема 1 (об устойчивости относительных равновесий).
1) Если начало координат системы при натянутой связи (6.2) *неустойчиво, то неустойчиво относительное равновесие механической системы в целом.*
2) Пусть выполнены следующие условия:

2.1) начало координат является устойчивым в системе (6.2),

2.2) система при натянутой связи допускает функцию Ляпунова $V(b)$, $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(6.2)} \leqslant 0$,

2.3) разложение V *по фазовым переменным начинается со слагаемых не ниже второго порядка малости.*

Тогда нулевое решение полной механической системы также устойчиво. Устойчивость асимптотическая, если это имеет место для системы на связи и определяется с помощью V.

Доказательство. По предположению и непрерывности связь натянута в окрестности состояния равновесия. Следовательно, в этой окрестности решения системы на связи являются решениями всей механической системы. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Движение свободной системы близко к движению точки в однородном поле сил, так как главный член в правой части (6.1) — постоянное слагаемое F. Поэтому, находясь не слишком далеко от равновесия, система будет либо двигаться по границе связи, либо отскакивать и возвращаться. Время между отскоком и возвратом можно оценить как $T \approx -\dfrac{2v_0}{F}$, где v_0 — значение v в момент отскока после удара. Используя приближенный интеграл энергии $v_0^2/2 = v^2/2 - Fa$, можно аналогично оценить время возврата системы на связь (время до удара) как величину порядка компоненты скорости нормальной связи (ср. [6]).

Изменение a на гладком участке траектории, после схода со связи: $a = 0 + v_0 t + Ft^2/2 + \ldots$, то есть $a = O(v_0^2)$.

Пусть $W = W(a, v, b) = V(b) + v^2/2 - Fa$. В начале координат $W(0, 0, 0) = 0$ и функция положительно определена, так как $a \leqslant 0$, $F > 0$, V — функция Ляпунова.

Рассмотрим отображение последования, отображающее точки фазового пространства в момент отскока от связи t_0 в точки после возврата и удара. Каким образом при этом будеть меняться W?

От отскока до возврата слагаемое $v^2/2 - Fa$ изменится на величину порядка $T\max(v)\times \times\max(G) = O(v_0^3) + O(||b||v_0^2)$ (влиянием членов порядка a пренебрегаем, так как $a = O(v_0^2)$). При ударе после возврата эта часть W дополнительно уменьшится как $k(v_0^2/2 + \ldots) - v_0^2/2 = = \frac{k-1}{2}v_0^2 + \ldots = O(v_0^2) < 0$.

Для касательной составляющей на свободном участке получим: $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(6.1)} = V_b' B(a,v,b) = = V_b'\left(B(0,0,b) + B_a' a + B_v' v + \ldots\right) = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{(6.2)} + O(v_0||b||) + O(v_0^2)$, так как по предположению разложение V начинается с квадратов или выше и разложение B по b не производится. За время свободного движения T получим, соответственно, $\int_{t_0}^{t_0+T}\dot V|_{(6.2)}\,dt + O(v_0^2||b||) + + O(v_0^3)$.

Для W изменение за рассматриваемый промежуток составит

$$\begin{aligned}\Delta W = &\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\dot V|_{(6.2)}dt + O(v_0^2||b||) + O(v_0^3) + \frac{k-1}{2}v_0^2 + \ldots = \\ = &\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\dot V|_{(6.2)}dt - \frac{|1-k|}{2}v_0^2 + O(v_0^2||b||) + \ldots < 0.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Неравенство справедливо, так как система при натянутой связи устойчива ($\dot V \leqslant 0$ при натянутой связи) и коэффициент восстановления строго меньше единицы.

На непрерывном участке траектории свободной системы с началом при натянутой связи (то есть в момент схода со связи t_0) справедлива оценка $W(t) \leqslant CW(t_0)$ с некоторой $C > 0$, не зависящей от значений фазовых переменных. Действительно, аналогично предыдущим оценкам используя время между натяжениями связи, имеем:

$$\begin{aligned}W(t) = W(t_0) + \int\limits_{t0}^{t_0+t}\dot W dt \leqslant W(t_0) + \int\limits_{t0}^{t_0+T}\dot V|_{(6.2)}dt + |t - t_0|\left(C_1|v_0|||b|| + C_2 v_0^2\right) \leqslant \\ \leqslant W(t_0) + T\left(C_1|v_0|||b|| + C_2v_0^2\right) \leqslant W(t_0) + C_3 v_0^2 \leqslant \\ \leqslant W(t_0) + 2C_3v_0^2/2 - 2C_3Fa(t_0) + 2C_3V(t_0) = (1 + 2C_3)W(t_0).\end{aligned} \tag{6.4}$$

Поясним последний переход. Так как траектория начинается при натянутой связи, то $a(t_0) = = 0$. Так как V — функция Ляпунова, то она неотрицательна, а значит, $V(t_0) \geqslant 0$.

Возможны два основных сценария развития динамики. Первый — бесконечная серия ударов без промежуточных выходов на движение по границе связи, иначе система должна выйти из малой окрестности, чтобы сойти со связи. Второй — выход на движение при натянутой связи через конечное число ударов.

Рассмотрим (конечную или бесконечную) последовательность поочередных моментов отскоков после ударов на траектории без отрезков движения при натянутой связи $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$. Построим кусочно-непрерывную функцию $K(t) = CW(t_n), t \in [t_n, t_{n+1})$. Согласно предыдущим результатам, она не возрастает. Для вектора фазовых переменных $p = (a, v, b)$ и подходящей функции класса Хана $a(||p||) \leqslant W(p)$ аналогично доказательству теоремы Ляпунова об устойчивости вдоль траектории имеем для подходящих значений $j \geqslant 0$:

$$Ca(||p||) \leqslant CW(p(t)) = K(t_j) \leqslant K(t_0) = CW(p(t_0)) = CW(t_0). \tag{6.5}$$

Следовательно, для отрезков траекторий указанного вида имеет место устойчивость (на конечном или бесконечном промежутке времени в зависимости от величины интервала) нулевого состояния системы и имеет место устойчивость при первом сценарии.

Так как система при натянутой связи не может перейти к свободному движению внутри некоторой окрестности начала координат, нулевое решение (6.2) устойчиво, на конечном временном отрезке с ударами устойчивость не разрушается, то имеет место устойчивость для второго сценария. ■

Остается заметить, что после замены $a = s - l, v = \dot{s}, b = (\psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta})$ уравнения (3.2) могут быть использованы в качестве (6.1), а их ограничение на связь $s = l$ — в качестве (6.2), что сводит задачу об исследовании устойчивости относительных равновесий зонда при натянутом тросе к изучению устойчивости в системе, где трос не ослабевает (при натянутой связи).

7. Устойчивость по Ляпунову относительных равновесий. Буксируемый зонд

Удобно опять выделить два основных случая.

Случай $\omega = 0$ допускает относительно простое исследование, так как при этом силы сопротивления атмосферы будут обладать полной диссипацией в системе $0xyz$ и, в частности, при движениях системы при натянутой связи. Следовательно, (не)устойчивость может быть определена путем исследования ограничения второй вариации приведенного потенциала на границу связи. Используя сферические координаты из третьего параграфа, приведем вторые производные:

$$\begin{aligned}
V^*_{\psi\psi} &= l\cos\theta\cos\psi\cos\alpha\left(1 - \frac{\gamma}{\rho^3}\right) + 3\frac{\gamma}{\rho^5}l^2\cos^2\theta\sin^2\psi\cos^2\alpha,\\
V^*_{\psi\theta} &= -l\sin\theta\sin\psi\cos\alpha\left(1 - \frac{\gamma}{\rho^3}\right) +\\
&\quad + 3\frac{\gamma}{\rho^5}l^2\cos\theta\sin\psi\cos\alpha(\sin\theta\cos\psi\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha),\\
V^*_{\theta\theta} &= l\cos\theta\cos\psi\cos\alpha\left(1 - \frac{\gamma}{\rho^3}\right) + l^2\cos 2\theta -\\
&\quad - \frac{\gamma}{\rho^3}l\sin\theta\sin\alpha + 3\frac{\gamma}{\rho^5}l^2(\sin\theta\cos\psi\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha)^2.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Критерий Сильвестра даст достаточные условия устойчивости в виде $V^*_{\psi\psi} > 0$ и $V^*_{\psi\psi}V^*_{\theta\theta} - {V^*_{\psi\theta}}^2 > 0$. Если знак одного из неравенств изменится на противоположный, то будет иметь место неустойчивость [10]. Промежуточные вырожденные ситуации удобнее исследовать методами теории бифуркаций в каждой конкретной ситуации. Могут ли быть выполнены эти условия? Рассмотрим предельный случай больших значений ρ, тогда простая проверка с учетом выбора знаков в предыдущих параграфах показывает, что при $\cos\psi > 0$ эти условия выполнены, а при $\cos\psi < 0$ нарушаются оба. При этом связь всегда натянута, согласно (3.3).

Предыдущие исследования [3] плоского случая позволяют прямо обобщить результаты об устойчивости плоской задачи $z(t) \equiv 0, \alpha = 0$ при $\omega = 0$, дополнив устойчивость свойством асимптотичности.

В общем случае $\omega \neq 0$ устойчивость относительных равновесий удобнее исследовать в основных цилиндрических координатах, что, конечно, эквивалентно сферическим, позволяющим использовать теорему 1, кроме точек вырождения замен переменных.

Линеаризуем (3.1) вместе с уравнением связи $r = r_0 + \xi$, $\phi = \phi_0 + \mu$, $z = z_0 + \zeta$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$:

$$\begin{gathered}\ddot{\xi} = R_r\xi + Z_r\zeta + V_r\dot{\xi} + \Phi_r\mu + R_{\dot{\phi}}\dot{\mu} + \Delta\lambda A,\\ r_0^2\ddot{\mu} = R_\phi\xi + \Phi_{\dot{r}}\dot{\xi} + Z_\phi\zeta + \Phi_\phi\mu + V_\phi\dot{\mu} + \Delta\lambda B,\\ \ddot{\zeta} = R_z\xi + Z_z\zeta + V_z\dot{\zeta} + \Delta\lambda C A\xi + B\mu + C\zeta = 0.\end{gathered} \tag{7.2}$$

Выше обозначено

$$\begin{gathered}R_r = 1 + \lambda_0 + 3\gamma r_0^2/\rho_0^5 - \gamma/\rho_0^3, Z_r = 3\gamma r_0 z_0/\rho_0^5, \quad V_r = -ce^{-\beta\rho_0}r_0\omega,\\ \Phi_r = \lambda_0\cos\alpha\sin\phi_0, R_{\dot{\phi}} = 2r_0, \quad A = r_0 - \cos\phi_0\cos\alpha,\\ \Phi_\phi = \lambda_0 r_0\cos\phi_0\cos\alpha, \quad V_\phi = -2ce^{-\beta\rho_0}r_0^3\omega, \quad Z_\phi = -ce^{-\beta\rho_0}\omega^2 r_0^3 z_0/\rho_0,\\ \Phi_{\dot{r}} = -r_0, R_\phi = \lambda_0\sin\phi_0\cos\alpha + ce^{-\beta\rho_0}r_0^2\omega^2\left(3 - \beta r_0^2/\rho_0\right), \quad B = r_0\sin\phi_0,\\ Z_z = \lambda_0 + 3\gamma z_0^2/\rho_0^5 - \gamma/\rho_0^3, \quad R_z = 3\gamma z_0 r_0/\rho_0^5, \quad V_z = -ce^{-\beta\rho_0}r_0\omega, \quad C = z_0 - \sin\alpha.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Возможны два случая: $C = 0$ или $C \neq 0$. Заметим, что C — это производная уравнения границы связи по z, то есть указанные случаи описывают (не)возможность представить выражение натянутой связи в виде $z = f(x, y) = f(r, \phi)$.

A) $C = 0$ эквивалентно $z_0 = \alpha = 0$ согласно результатам четвертого параграфа. При этом последнее уравнение (7.2) отделяется и принимает вид

$$\ddot{\zeta} = (\lambda_0 - \gamma/\rho_0^3)\zeta - ce^{-\beta\rho_0}r_0\omega\dot{\zeta}.$$

Так как связь натянута и по предположению $\omega > 0$, то $\lambda_0 < 0$ и решение $\zeta(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво, как и относительное равновесие по переменной z. Согласно теореме, устойчивость системы определяется устойчивостью системы при натянутой связи. Переменная z исключена из рассмотрения, поэтому рассматривается плоская задача, в которой натянутость связи означает переход к системе с одной степенью свободы. Используем уравнения (3.2) при $sin\theta = 0$ и $s = l$. Оставшееся существенное уравнение:

$$l^2\ddot{\psi} = -l\sin\psi + \frac{\gamma}{\rho^3}l\sin\psi - ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|_0 l(\cos\psi - \omega(l + \cos\psi)) - ce^{-\beta\rho}|\boldsymbol{\Delta V}|_0 l^2\dot{\psi}. \tag{7.4}$$

Оно описывает динамику маятника под действием потенциальной и диссипативной силы, поэтому для данной системы достаточно исследовать характер критических точек потенциала. Рассмотрим знаки его вторых производных при $\rho_0 \to +\infty$ и при $\rho_0 \to 0+$. Главными слагаемыми будут $l\cos\psi_0$ и $-\dfrac{\gamma l\cos\psi_0}{{\rho_0}^3} > 0$ соответственно (напомним, что атмосфера отклоняет зонд в сторону $\sin\psi > 0$ по решению). Отсюда, на ветви решения, уходящей в бесконечность при $\psi_0 \to 0+$ или выходящей из начала координат, будет иметь место устойчивость, а на ветви, стремящейся к бесконечности при $\psi_0 \to \pi - 0$ — неустойчивость. Промежуточные случаи исследуются методами теории бифуркаций.

Приведем примеры кривых относительных равновесий. При фиксированных γ, β и $c\omega^2$ будем менять значения l (или ρ), определяя соответствующий угол согласно (4.15). Для наглядности произведен переход в систему Oxy (см. рис. 1). Плюсами и минусами на чертеже указаны устойчивые и неустойчивые относительные равновесия.

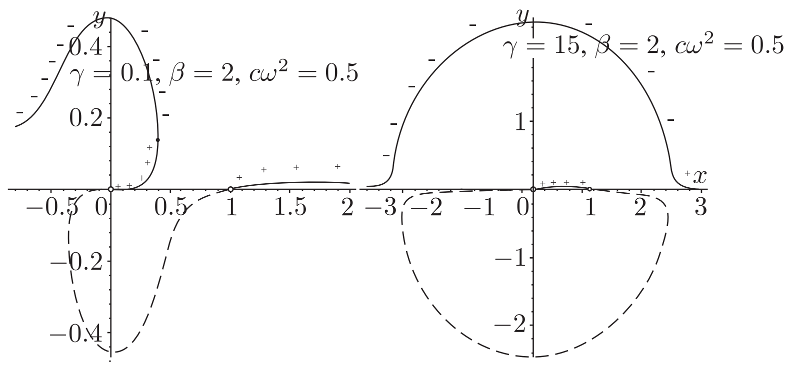

Рис. 1. Относительные равновесия задачи.

Сравним их с аналогичной диаграммой для предыдущей задачи [3] без силы сопротивления атмосферы (рис. 2).

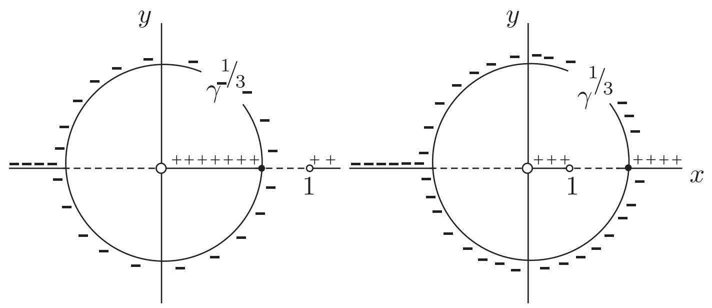

Рис. 2. Равновесия задачи [3] при $\gamma < 1$ (слева) и $\gamma > 1$ (справа).

Можно убедиться, что в практически важном случае малой ω оставшиеся в верхней полуплоскости части кривых мало деформируются в целом. Существенным отличием является исчезновение точек бифуркации $(\pm\gamma^{1/3}, 0)$. Согласно [1], бифуркации такого вида являются нетипичными и не сохраняются при малом шевелении векторного поля, что и было обнаружено.

Б) $C \neq 0$. Используя результаты предыдущих параграфов, можно исследовать устойчивость и в общем случае с помощью критерия Рауса – Гурвица, однако формулы при этом становятся слишком громоздкими и затрудняющими общий анализ, поэтому они не приводятся. Представляется более удобным проводить рассмотрение с конкретными значениями параметров по мере надобности, используя (7.3).

Рассмотрим асимптотическое поведение при большом удалении от начала координат. Считая величины r_0, ρ_0, l большими, учитывая, что λ_0 порядка $-r_0 \approx -l$ (согласно (3.3)), выразим ξ, используя уравнение связи, и оставим в (7.2) только главные слагаемые в правой части:

$$\xi = -(B\mu + C\zeta)/r_0 + \ \ldots,$$
$$\ddot{\mu} = \frac{\lambda_0}{r_0}\cos\phi_0\cos\alpha\mu + \ \ldots, \tag{7.5}$$
$$\ddot{\zeta} = \lambda_0\zeta + \ \ldots .$$

Кроме вырожденного случая закрепления троса в северном полюсе сферы, нулевое решение будет асимптотически устойчивым при $\cos\phi_0 > 0$ и неустойчивым при $\cos\phi_0 < 0$, так как $\lambda_0 \approx -l\cos^2\theta_0 < 0$. Здесь $\cos\theta \neq 0$, иначе получаем несуществующее решение $x = y = 0$, $z \neq 0$.

Вырожденные случаи вертикальных решений при закреплении буксира на оси вращения сферы (в северном полюсе) сводятся к задаче о движении сферического маятника во вращающейся системе координат с точкой закрепления на оси вращения, когда эта же ось является осью симметрии поля активных сил. Действительно, вращение сферы не оказывает влияния на движение кабины, поэтому всегда можно перейти в систему координат, в которой атмосфера покоится, и использовать стандартную технику аналогично случаю $\omega = 0$ выше. При этом система без сопротивления будет допускать интеграл площадей и понижение порядка, что дополнительно упростит исследование. Однако этот случай имеет малую практическую ценность, поэтому не рассматривался.

Автор выражает благодарность В. В. Белецкому за обсуждение результатов этой статьи.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: РХД, УдГУ, 2000. 400 с.

[2] Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. М.: ЛКИ, 2009. 432 с.

[3] Белецкий В. В., Иванов М. Б., Отставнов Е. И. Модельная задача о космическом лифте // Космические исследования, 2005, т. 43, № 2, с. 157–160.

[4] Белецкий В. В., Пивоваров М. Л. О влиянии атмосферы на относительное движение гантелеобразного спутника // ПММ, 2000, т. 64, № 5, с. 721–731.

[5] Burov A., Troger H. On relative equilibria of a tethered system with variable tether length // ZAMM, 2001, vol. 81, suppl. 4, pp. 815–816.

[6] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.

[7] Иванов А. П. Влияние малых сил сопротивления на относительное равновесие // ПММ, 1994, т. 58, № 5, с. 22–30.

[8] Косенко И. И., Степанов С. Я. Устойчивость положений относительного равновесия орбитальной связки с учетом ударных взаимодействий: Неограниченная задача // МТТ, 2006, № 4, с. 86–96.

[9] Набиуллин М. К. Устойчивость положений равновесия космической орбитальной тросовой системы // МТТ, 2004, № 4, с. 7–18.

[10] Четаев Н. Г. Устойчивость движения. 4-е изд., испр. М.: Наука, 1990. 175 с.

A spatial problem of a towed atmospheric probe

Evgeni I. Otstavnov

Moscow State University of Civil Engineering
Yaroslavskoye shosse 26, Moscow, 129337, Russia
eotstavnov@ya.ru

A highly restricted problem of a relative equilibrium for two bodies is considered. They are put into a newtonian gravitational field and tied with inextensible massless fiber. One body is exposed to an air resistance. Stability of relative equilibria is under investigation.

MSC 2010: 70K20, 70K42
Keywords: space elevator, one-sided restricition, air resistance, relative equilibria, stability

Received October 15, 2012, accepted November 28, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 941–955 (Russian)