Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 5. С. 981–984.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

Комментарий к статье П. Пенлеве «О законах трения скольжения»

А. П. Иванов

В 1895 году были опубликованы знаменитые «Лекции о трении» П. Пенлеве, в которых автор указал на парадоксальные ситуации в динамике систем с кулоновым трением, когда при данных начальных условиях движение не существует либо определено неоднозначно. Обсуждения этих примеров, называемых «парадоксами Пенлеве», продолжаются поныне. В добавлении к русскому переводу «Лекций» приведены статьи самого Пенлеве, а также Л. Лекорню, Ф. Клейна, Г. Гамеля и других известных ученых. Заметим, что из четырех статей Пенлеве с общим названием «О законах трения скольжения» были переведены лишь три, опубликованные в оригинале в 1905 году. Первая из этих статей, с которой мы теперь имеем возможность ознакомиться в переводе, датирована 1895 годом. Она интересна прежде всего содержащимся в ней примером парадокса. Автор опустил расчеты и привел лишь результаты; считаем целесообразным дополнить недостающие детали.

Так как цилиндр не вращается вокруг своей оси, достаточно рассмотреть его сечение вертикальной плоскостью, содержащей линию наибольшего ската. Введем на плоскости систему координат OXY, направляя ось абсцисс вдоль указанной линии, а ось ординат — по нормали к плоскости (в область возможного движения), и разложим силу тяжести G на составляющие $G_x = G\sin i$ и $G_y = -G\cos i$ (рис. 1a).

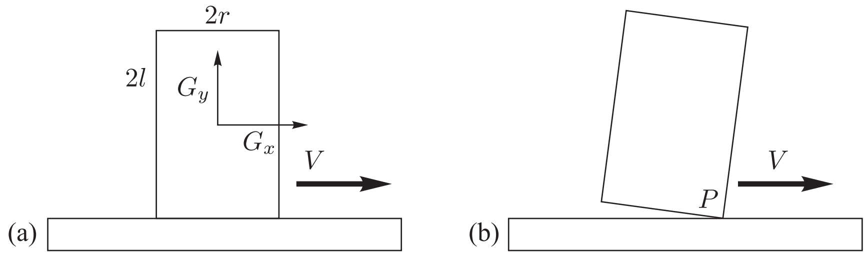

Рис. 1. Пример Пенлеве: (a) цилиндр скользит по плоскости, (b) цилиндр «балансирует» вокруг точки P.

Иванов Александр Павлович
apivanov@orc.ru
Московский физико-технический институт
141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

В первом варианте цилиндр имеет начальную скорость V (вниз по плоскости) либо $-V$ (вверх по плоскости). Ограничимся рассмотрением первого из этих случаев (второй случай вполне аналогичен). При скольжении с полным контактом (рис. 1a) нормальная реакция R_n во всех точках основания цилиндра неотрицательна; вне зависимости от ее распределения интегральная сила трения равна $R_t = fG_y$. Эта сила создает момент $M_f = flG_y$ относительно центра масс цилиндра, который должен быть скомпенсирован главным моментом нормальной реакции M_n, зависящим от распределения R_n в точках контакта. Максимальное значение M_n равно, очевидно, $-rG_y$ (что соответствует сосредоточению всей реакции опоры в крайней точке P). Таким образом, скольжение с полным контактом реализуется при условии

$$fl \leqslant r. \tag{1}$$

Случай «балансировки», то есть скольжения с одновременным поворотом относительно крайней точки P, требует более детального анализа. Теорема о движении центра масс и теорема моментов выражаются формулами

$$m\ddot{x} = G_x - fR_n, \quad m\ddot{y} = R_n + G_y, \quad mk^2\ddot{\varphi} = (fl - r)R_n, \tag{2}$$

где x и y — координаты центра цилиндра, φ — угол его поворота (отсчитывается по часовой стрелке). К системе (2) следует добавить кинематическое соотношение $\ddot{y} = r\ddot{\varphi}$, выражающее наличие контакта в точке P. Тогда четыре уравнения позволяют найти четыре неизвестных величины: R_n, а также обобщенные ускорения. В частности,

$$R_n = -k^2 G_y \left(k^2 + r^2 - flr\right) \tag{3}$$

и условие одностороннего контакта $R_n \geqslant 0$ имеет вид

$$f \leqslant \frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}, \tag{4}$$

что совпадает с выводами Пенлеве. Если неравенство (4) имеет противоположный смысл, то движение невозможно (то есть система (2) не имеет физически допустимых решений). Заметим, что этот парадокс аналогичен другому известному примеру: стержень на шероховатой опоре.

Перейдем к обсуждению второго варианта постановки цилиндра: без начальной скорости. При данных силах имеются четыре возможных типа движения: (i) равновесие, (ii) начало скольжения вправо с полным контактом, (iii) начало скольжения вправо с поворотом вокруг точки P, (iv) начало поворота вокруг точки P без скольжения. Рассмотрим эти возможности поочередно.

(i) В равновесии

$$R_n = -G_y, \quad R_t = -G_x, \quad M_f + M_n = 0. \tag{5}$$

Первые два равенства возможны, если $\operatorname{tg} i \leqslant f_0$, а третье равенство — если $\operatorname{tg} i \leqslant r/l$.

(ii) При скольжении без вращения третье равенство (5) может быть выполнено при условии (1), причем в силу первого из уравнений (2) имеем $G_x \geqslant fG_y$, откуда

$$f \leqslant r/l, \quad f < \operatorname{tg} i. \tag{6}$$

Следует заметить, что обе формулы (6) получены из анализа одной и той же силы трения, поэтому коэффициент трения в них одинаков (у Пенлеве во второй формуле стоит f_0). По-видимому, для начала скольжения с нулевой скоростью следует считать $f = f_0$.

(iii) В данном случае в уравнениях (2) $\ddot{\varphi} > 0$, причем ускорение точки контакта также положительно:

$$\ddot{x}(P) = \ddot{x} - l\ddot{\varphi} > 0.$$

Кроме того, выполнено условие (4) положительности нормальной реакции. Совокупность перечисленных требований равносильна системе

$$f < \frac{(k^2 + r^2)\operatorname{tg} i + lr}{k^2 + l^2 + lr\operatorname{tg} i}, \quad \frac{r}{l} < f \leqslant \frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}. \tag{7}$$

В плоскости параметров $\operatorname{tg} i$ и f первое неравенство определяет гиперболу с горизонтальной асимптотой $f = \frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}$ (рис. 2).

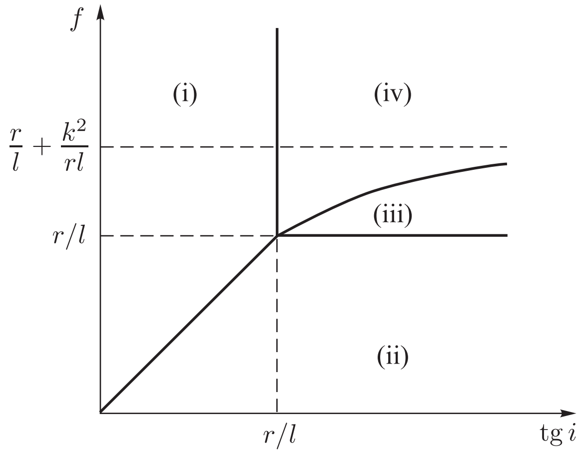

Рис. 2. Разбиение плоскости параметров.

(iv) В этом случае также $\ddot{\varphi} > 0$, причем $\ddot{x}(P) = \ddot{y}(P) = 0$. Эти требования выражаются условиями

$$\operatorname{tg} i > r/l, \quad \frac{|R_t|}{R_n} = \frac{(k^2 + r^2)\operatorname{tg} i + lr}{k^2 + l^2 + lr\operatorname{tg} i}.$$

Поскольку точка P не скользит по плоскости, коэффициент трения не меньше, чем отношение $\frac{|R_t|}{R_n}$. Следовательно, на плоскости параметров (рис. 2) область (iv) задается неравенствами

$$\operatorname{tg} i > r/l, \quad f \geqslant \frac{(k^2 + r^2)\operatorname{tg} i + lr}{k^2 + l^2 + lr\operatorname{tg} i}. \tag{8}$$

Подведем итог. Если в примере Пенлеве начальная скорость цилиндра отлична от нуля, то он может скользить, опираясь на плоскость всей площадкой основания или единственной точкой (в терминологии Пенлеве «балансировать»). При достаточно больших значениях коэффициента трения возникает парадокс несуществования движения при данных начальных условиях. В случае, когда начальная скорость цилиндра равна нулю, движение всегда определено однозначно. В зависимости от значений параметров цилиндр или покоится, или скользит с опорой на все основание, или «балансирует» вокруг крайней точки (которая либо покоится, либо скользит по опоре).

Заметим, что к настоящему моменту доказано, что решение уравнений динамики с трением покоя при нулевых начальных скоростях всегда существует, хотя и может быть неединственным. (См. Pang J.-S., Trinkle J. C. Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction // Math. Progr., 1996, vol. 73, pp. 199–226).

Comments on the P. Painlevé paper "Sur les lois du frottement de glissement"

Alexander P. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology
Institutskii per. 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia
apivanov@orc.ru

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 981–984 (Russian)