Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 5. С. 977–979.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

О законах трения скольжения

Поль Пенлеве
(*представлено П. Аппелем*)

Применяя обычные законы трения скольжения к изучению движения произвольной системы, мы приходим к странному результату: как только трение становится более или менее значительным, при некоторых начальных условиях уравнения движения определяют *несколько* возможных движений, а при других начальных условиях они становятся *несовместными.* Я хотел бы более подробно исследовать это общее замечание в случае, когда на твердые тела накладываются простые связи.

Пусть S — твердое тело, на которое действуют данные силы, не зависящие от скоростей, и пусть это тело должно скользить по неподвижной поверхности Σ (соприкасаясь с ней только в одной точке). Запишем шесть уравнений движения с учетом закона трения, то есть выражая тот факт, что тангенциальная относительно S компонента силы реакции (обозначим ее через R_t) направлена противоположно скорости материальной точки M тела S, служащей точкой контакта с поверхностью Σ, а по величине пропорциональна нормальной компоненте R_n силы реакции, $R_t = fR_n$. В итоге мы получим достаточно уравнений, чтобы определить ускорения тела S и силу R_n, и найдем, что R_n удовлетворяет равенству вида

$$R_n = \frac{A}{B - \varepsilon f \alpha C}.$$

Здесь A обозначает многочлен второй степени относительно скоростей q_i', не имеющий членов первой степени, B и C — две функции от параметров q_i, а α — выражение вида $\dfrac{\beta}{+\sqrt{P}}$, где β — линейная, а P — квадратичная форма относительно q_i'. Что касается ε, то оно равно $+1$ или -1, и знак надо выбрать так, чтобы εR_n было больше нуля. Установив все это, рассмотрим произвольную систему начальных условий q_i^0, $q_i'^0$ и предположим, что

$$f > \frac{|B_0|}{|\alpha_0 C_0|}.$$

Тогда оба значения ε нам подходят, и уравнения определяют два возможных движения, если B_0 и $\alpha_0 C_0$ имеют разные знаки; оба значения ε надо отбросить, если знаки величин B_0

Paul Painlevé. Sur les lois du frottement de glissement // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1895, vol. 121, pp. 112–115. Научная редакция перевода и комментарий (с. 981–984) — А. П. Иванов.

и $\alpha_0 C_0$ совпадают. Отсюда делаем следующий вывод: *рассмотрим одновременно две системы начальных условий* $(q_i^0, q_i'^0)$ *и* $(q_i^0, -q_i'^0)$; *как только коэффициент* f *превосходит определенный предел* $\left(\text{а именно } \dfrac{|B_0|}{|\alpha_0 C_0|}\right)$, *одной из систем начальных условий, например, первой, будут соответствовать два движения, тогда как во второй системе связь будет несовместима с законом трения.*

В некоторых частных случаях, например, если S — однородная сфера, получается, что функция C тождественно равна нулю, а R_n принимает такое же значение, как при отсутствии трения. Для этих систем интересующая нас сингулярность не возникает.

Когда связь является *односторонней*, мы будем отсчитывать R_n по направлению нормали к поверхности Σ, проведенной с той стороны, с которой тело S может покинуть поверхность Σ; R_n обращается в нуль или больше нуля. Опять рассмотрим произвольную систему начальных условий $(q_i^0, q_i'^0)$ и предположим (а это всегда возможно), что B_0 больше нуля. Пусть $f > \dfrac{B_0}{|\alpha_0 C_0|}$. Если у нас $A_0 > 0$, то уравнения либо *несовместны*, либо определяют *только одно движение*, в зависимости от того, положительно $\alpha_0 C_0$ или отрицательно. Если же у нас $A_0 < 0$, то движение, при котором S покидает поверхность Σ, — *единственно допустимое* при отрицательном $\alpha_0 C_0$, тогда как при положительном $\alpha_0 C_0$ движение, при котором тело S продолжает соприкасаться с поверхностью Σ, *тоже будет допустимым.* Итак, *из двух систем начальных условий* $(q_i^0, q_i'^0)$ *и* $(q_i^0, -q_i'^0)$ *(когда* f *превосходит* $\dfrac{B_0}{|\alpha_0 C_0|}$*) одна, например, первая, определяет одно и только одно движение*; *что же касается второй, то уравнения либо определяют два движения, либо несовместны.*

Сделанные выше замечания справедливы и в случае, когда S и Σ представляют собой два твердых тела, образующих систему, а также для связей, возникающих при скольжении кривой по поверхности, при пересечении двух кривых и т. д. Кроме того, их можно распространить и на связи между твердыми телами в случае, когда они записываются с помощью двух уравнений, например, на связь, возникающую, когда твердая кривая C [материальная кривая C] все время касается неподвижной кривой Γ. Для такой связи компонента силы реакции, касательная к кривой Γ (обозначим ее через R_t), удовлетворяет уравнению вида

$$R_t = +f\sqrt{A^2 + 2\varepsilon B R_t + C^2 R_t^2},$$

где A^2 обозначает многочлен четвертой степени относительно скоростей, не содержащий членов с нечетными степенями и строго положительный, B — многочлен второй степени относительно q' (не содержащий членов нечетной степени), а C^2 — положительную функцию от q_i. Что касается ε, то оно равно $+1$ или -1, в зависимости от того, куда направлена скорость точки P кривой C, в которой происходит касание с кривой Γ (эта скорость направлена по касательной к кривой Γ). Отсюда следует, что в случае, когда коэффициент f превосходит $\dfrac{1}{|C_0|}$, из двух систем начальных условий $(q_i^0, q_i'^0)$ и $(q_i^0, -q_i'^0)$ первая, например, определяет два движения, а вторая — ни одного.

Сделанные выше выводы тем более справедливы для систем, полученных при комбинировании перечисленных ранее связей (двусторонних или односторонних). Что касается случая *трения покоя* (или *начала движения*), то мы приходим к еще более странным результатам. Впрочем, аналогичные сингулярности должны возникать для любого закона трения, в котором тангенциальная сила реакции выражается через абсолютное значение нормальной компоненты, при условии, что коэффициенты этого закона позволяют придавать отношению $\frac{R_t}{R_n}$ сколь угодно большие значения.

В качестве очень простого примера я укажу следующий: рассмотрим однородный тяжелый цилиндр вращения[1], одно из оснований которого покоится на наклонной плоскости П; в момент времени t_0 мы предоставляем его самому себе, сообщив ему какую-то скорость поступательного движения вдоль линии наибольшего наклона плоскости П. Пусть f — коэффициент трения плоскости, r — радиус основания, $2l$ — высота цилиндра, k^2 — его радиус инерции вокруг прямой, нормальной к его высоте и проходящей через его центр тяжести. Проведя совершенно элементарное рассуждение, мы увидим, что при $f \leqslant \frac{r}{l}$ цилиндр скользит вдоль плоскости; при $\frac{r}{l} < f < \frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}$ цилиндр поворачивается около (скользящей. — *Прим. ред.*) низшей или высшей точки своего основания (в зависимости от того, куда была направлена начальная скорость, вверх или вниз); наконец, при $f > \frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}$ ни одно движение не совместимо со связью и законом трения (этот пример аналогичен стержню, скользящему по опоре с одной точкой контакта. — *Прим. ред.*).

Когда мы оставляем цилиндр в покое, он будет оставаться в покое, если одновременно $\operatorname{tg} i \leqslant \frac{r}{l}$ и $\operatorname{tg} i \leqslant f_0$, где f_0 — коэффициент трения покоя (i — угол наклона плоскости. — *Прим. ред.*). Он будет скользить по плоскости П, если у нас $f \leqslant \frac{r}{l}$ и одновременно $\operatorname{tg} i > f_0$. Наконец, когда f и $\operatorname{tg} i$ превосходят $\frac{r}{l}$ и, кроме того, f меньше, чем $\frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}$, цилиндр будет балансировать вокруг низшей точки своего основания; когда f превосходит $\frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}$, условия несовместны. Кроме того, все вышесказанное остается в силе, когда плотность цилиндра зависит от расстояния до его основания и до оси. Это замечание позволяет нам придавать величине $\frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}$ сколь угодно малые значения.

Аналогичные сингулярности возникают, когда наряду с трением *скольжения* вводят трение *качения* и *вращения*. Мы видим, что эмпирические законы трения *логически* неприемлемы (даже для обычных скоростей и давлений), как только трение становится достаточно заметным. Возможно, имеет смысл провести экспериментальное изучение законов трения с этой точки зрения.

Sur les lois du frottement de glissement

Paul Painlevé

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 977–979 (Russian)

[1]Аналогичные результаты справедливы для любого тяжелого тела, одно из оснований которого покоится на наклонной плоскости.