УДК 517.977.8

© *А. С. Банников*

НЕКОТОРЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ[1]

Рассматривается нестационарная задача конфликтного взаимодействия одного или нескольких убегающих с группой преследователей при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков. Получены достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения группы убегающих от группы преследователей в линейной нестационарной задаче и разрешимости глобальной задачи уклонения группы убегающих от группы преследователей в нестационарной задаче группового преследования с диагональной матрицей. Получена двухсторонняя оценка минимального числа убегающих, достаточного для разрешимости задачи уклонения из любой начальной позиции при заданном числе преследователей в играх с диагональной матрицей. Для нестационарной задачи простого преследования с фазовыми ограничениями предложена позиционная процедура управления с поводырём, гарантирующая попадание хотя бы одного из преследователей в любую окрестность терминального множества. Получены достаточные условия уклонения одного убегающего от группы преследователей в дифференциальных играх второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальные игры, глобальная задача уклонения, локальная задача уклонения, управление с поводырём, позиционная стратегия, фазовые ограничения.

Содержание

[1]Работа поддержана РФФИ (гранты № 12–01–00195 и № 12–01–37077).

Введение

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон с противоположными или несовпадающими целями, способных воздействовать на процесс. Динамические процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Предлагаемая работа посвящена дифференциальным играм преследования–убегания двух сторон, представленных группой преследователей с одной стороны, и как одного убегающего, так и группы убегающих, с другой. Потребность изучения таких задач возникает при решении ряда прикладных задач из механики, экономики, военного дела, радиоэлектроники, биологии и некоторых других областей.

Одной из первых работ в этой области, по всей видимости, следует считать работу Г. Штейнгауза, опубликованную в 1925 году, в которой он формулирует задачу преследования как дифференциальную игру преследования. Становление теории дифференциальных игр связано с исследованиями Р. Айзекса, А. Брайсона, У. Флеминга, Б. Н. Пшеничного.

Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли академики Н. Н. Красовский и Л. С. Понтрягин.

К настоящему времени теория дифференциальных игр получила существенное развитие.

В работе [77] Б. Н. Пшеничного рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего, при условии, что скорость убегающего и преследователей по норме не превосходят единицы. Были получены необходимые и достаточные условия поимки. Ф. Л. Черноусько в работе [93] рассматривал задачу уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследующих точек, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Был построен такой способ управления, который обеспечивает уклонение от всех преследователей на конечное расстояние, причём движение уклоняющейся точки остаётся в фиксированной окрестности заданного движения.

Указанные работы, по существу, были первыми, посвящёнными задаче группового преследования группой преследователей одного убегающего.

Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх из любых начальных положений на полубесконечном интервале времени впервые была поставлена и решена в линейном случае Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко [71–74].

В работе [23] Н. Л. Григоренко получены необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от нескольких преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением, и множество управлений каждого из игроков — один и тот же выпуклый компакт.

Работа [20] обобщает результат Б. Н. Пшеничного на случай l-поимки. В работе [112] Б. К. Хайдаров рассмотрел задачу позиционной l-поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что каждый из игроков обладает простым движением.

В работах [38, 80] получены условия оптимальности времени преследования в дифференциальной игре одного убегающего и нескольких преследователей, движение которых является простым. В работе [37] Р. П. Иванов рассмотрел задачу простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Было доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то будет уклонение, иначе — поимка и получена оценка времени поимки.

Работа [59] Н. Н. Петрова обобщает результат Р. П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

Задачи простого преследования с «линией жизни» рассмотрены Л. А. Петросяном в [68].

А. М. Ковшов в [40] рассмотрел задачу простого преследования одного убегающего группой преследователей на сфере.

По всей видимости, первой работой, посвящённой задаче преследования группой преследователей группы убегающих была работа [58]. В данной работе рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единицы и целью преследователей является поимка всех убегающих. Были получены достаточные условия уклонения от встречи и получены оценки сверху и снизу минимального числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

Работа [110] обобщает результаты предыдущей работы на линейные дифференциальные игры.

В работе [60] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единицы, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а убегающие в начальный момент времени выбирают своё управление на интервал $[0, +\infty)$. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

В работе [88] Н. Ю. Сатимов и М. Ш. Маматов рассмотрели задачу преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что преследователи и убегающие обладают простым движением с единичной по норме максимальной скоростью, и убегающие, кроме того, используют одно и то же управление (жёстко скоординированные убегающие). Цель группы преследователей — поймать хотя бы одного убегающего. Были приведены достаточные условия поимки. Работы Д. А. Вагина и Н. Н. Петрова [18, 67] дополняют предыдущую работу.

На сегодняшний день разработано достаточно много идейно различных методов и маневров уклонения от встречи: например, метод маневра обхода [71–74] и его модификации [26–28, 30, 52, 53, 76, 79], методы постоянных и переменных направлений [48, 75, 83, 95–102, 105], метод инвариантных подпространств [78,82,99], методы, использующие исчисление Микусинского [49, 51,118], рекурсивные методы [25,32,94,108,116,117,119,120] и так далее. Между этими методами, безусловно, существуют глубокие связи, многие из которых до сих пор не выяснены.

Среди других работ, посвящённых задаче простого преследования, отметим работы [1, 15, 21, 31, 44, 46, 47, 69, 85, 86, 106, 113, 114].

Обобщением задачи простого преследования является пример Понтрягина [71]. Данному примеру посвящена обширная литература, так как он является модельным для анализа полученных различных условий поимки и убегания.

В работе [63] Н. Н. Петров рассмотрел задачу преследования группой преследователей одного убегающего в примере Понтрягина с равными динамическими возможностями игроков. Были получены достаточные условия поимки. В работе [66] рассмотрена задача о многократной поимке одного убегающего группой преследователей в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями.

Задача преследования жестко скоординированных убегающих группой преследователей в примере Понтрягина при равных динамических и инерционных возможностях участников рассмотрена в [19]. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего.

В работе [64] Н. Н. Петров рассмотрел задачу преследования группой преследователей группы убегающих в примере Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями игроков, при условии, что каждый преследователь ловит не более одного убегающего и убегающие выбирают свои управления при $t = 0$ сразу на $[0, \infty)$ и не покидают пределы многогранного множества D. Были получены достаточные условия поимки. «Мягкая» поимка одного убегающего группой преследователей для инерционных объектов рассматривалась Р. П. Ивановым в работе [39].

Пример Понтрягина с различными инерционными и динамическими возможностями участников рассматривался также в работах [24, 33–36, 56, 70, 71, 84, 107].

Квазилинейные динамические процессы представляют естественное обобщение рассмотренных выше задач. При условии дискриминации убегающего в работах Н. Л. Григоренко [24], А. А. Чикрия [107] рассмотрены различные различные методы группового преследования одного убегающего в квазилинейных динамических процессах. Получены достаточные условия поимки и r-поимки. В работе [70] Ю. В. Пилипенко и А. А. Чикрий рассматривали квазилинейные процессы, для которых условие Л. С. Понтрягина [71] выполнено лишь на некоторых интервалах числовой полуоси. Последнее обстоятельство может иметь место, например, если однородная система осуществляет периодические колебательные движения. При дискриминации убегающего получены достаточные условия поимки группой преследователей.

Среди других работ, посвященных задачам преследования и убегания в квазилинейных процессах со многими участниками отметим [22, 29, 41, 62, 65, 87, 89, 103, 104, 111].

§ 1. Геометрические свойства множества достижимости

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается уравнением вида
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t), \ u \in U. \tag{1.1}$$
Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1.1), соответствующее управлению $u(t)$ и начальному условию $x(t_0) \in M_0$, где M_0 — выпуклый компакт. Обозначим через $X(t; t_0, M_0, U)$ множество достижимости управляемого объекта в момент $t \geqslant t_0$ из множества M_0.

Определение 1.1. Говорят, что пара $\{u(t), x(t)\}$ *удовлетворяет условию максимума* на отрезке $[t_0, t_1]$ и *условию трансверсальности* на множестве M_0, если существует такое решение $\psi(t)$ сопряженной системы $\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t)$ с начальным условием $\psi(t_0) \in \partial S$, что выполнены следующие условия:

- $(u(t), \psi(t)) = C(U; \psi(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$,
- $(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0; \psi(t_0))$.

Лемма 1.1. *Пусть пара $\{\hat{u}(t), \hat{x}(t)\}$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_1]$ и условию трансверсальности на множестве M_0:*
$$(\hat{u}(t), \psi(t)) = C(U; \psi(t)) \quad \text{для почти всех } t \in [t_0, t_1], \tag{1.2}$$
$$(\hat{x}(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0; \psi(t_0)). \tag{1.3}$$
Тогда $\hat{x}(t_1) \in \partial X(t_1; t_0, M_0, U)$.

Доказывать будем методом от противного. Пусть $\hat{x}(t_1)$ — внутренняя точка множества $X(t_1; t_0, M_0, U)$. Так как $\psi(t) \neq 0$ для всех t, то существует точка $x(t_1) \in \partial X(t_1; t_0, M_0, U)$, что
$$(\hat{x}(t_1), \psi(t_1)) < (x(t_1), \psi(t_1)). \tag{1.4}$$
Пусть $u(t)$ — управление, отвечающее $x(t_1)$. В силу условия (1.2) для почти всех t
$$(\hat{u}(t), \psi(t)) \geqslant (u(t), \psi(t)). \tag{1.5}$$
В силу условия (1.3)
$$(\hat{x}(t_0), \psi(t_0)) \geqslant (x(t_0), \psi(t_0)). \tag{1.6}$$
Так как $\psi(t)$ — нетривиальное решение системы $\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t)$, то ψ имеет вид $\psi(t) = (F^{-1}(t))^*\psi(t_0)$, где $\psi(t_0) \in \partial S$, $F(t) = F(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad F(t_0, t_0) = E.$$
Решения $\hat{x}(t)$, $x(t)$ представим в виде
$$\hat{x}(t) = F(t)\left(\hat{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)\hat{u}(s)\,ds\right), \qquad x(t) = F(t)\left(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)u(s)\,ds\right).$$
Поэтому
$$(\hat{x}(t), \psi(t)) = (\hat{x}(t), (F^{-1}(t))^*\psi(t_0)) = (F^{-1}(t)\hat{x}(t), \psi(t_0)) =$$

$$= (\hat{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)\hat{u}(s)\,ds, \psi(t_0)) = (\hat{x}(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (\hat{u}(s), \psi(s))\,ds.$$

Аналогично $(x(t), \psi(t)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (u(s), \psi(s))\,ds$. Из (1.5) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (u(s), \psi(s))\,ds \leqslant \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}(s), \psi(s))\,ds. \tag{1.7}$$

Складывая (1.6) и (1.7), получаем

$$(x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (u(s), \psi(s))\,ds \leqslant (\hat{x}(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}(s), \psi(s))\,ds,$$

или

$$(x(t_1), \psi(t_1)) \leqslant (\hat{x}(t_1), \psi(t_1)). \tag{1.8}$$

Полученное неравенство противоречит (1.4). Тем самым лемма 1.1 доказана.

Л е м м а 1.2. *Пусть M_0 — выпуклый компакт. Точка $x(t_1)$ принадлежит множеству $\partial X(t_1; t_0, M_0, U)$ при $t_1 > t_0$ тогда, когда пара $\{u(t), x(t)\}$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_1]$ и условию трансверсальности на множестве M_0:*

$$(u(t), \psi(t)) = C(U; \psi(t)) \quad \textit{для почти всех } t \in [t_0, t_1],$$

$$(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0; \psi(t_0)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть управление $u(t)$ таково, что переводит точку $x(t_0) \in M_0$ в $x(t_1) \in \partial X(t_1; t_0, M_0, U)$ по траектории

$$x(t) = F(t)\left(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)u(s)\,ds\right).$$

Так как $X(t_1; t_0, M_0, U)$ — выпуклый компакт, то существует гиперплоскость π, опорная для $X(t_1; t_0, M_0, U)$ в граничной точке $x(t_1)$. Пусть $\psi(t_1)$ — единичный вектор внешней нормали к плоскости π в точке $x(t_1)$, тогда

$$(x, \psi(t_1)) \leqslant (x(t_1), \psi(t_1)) \quad \text{для всех } x \in X(t_1; t_0, M_0, U).$$

Определим нетривиальное решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t)$$

такое, что $\psi(t_1) = (F^{-1}(t_1))^*\psi(t_0)$. Тогда

$$(x(t), \psi(t)) = (F(t)(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)u(s)\,ds), (F^{-1}(t))^*\psi(t_0)) =$$
$$= (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (F^{-1}(s)u(s), \psi(t_0))\,ds = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (u(s), \psi(s))\,ds\,.$$

Предположим теперь, что $(u(t), \psi(t)) < C(U, \psi(t))$ на некотором ненулевом промежутке времени из интервала $[t_0, t_1]$. Определим управление $\hat{u}(t) \in U$ на $[t_0, t_1]$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$(\hat{u}(t), \psi(t)) = C(U; \psi(t)).$$

Тогда для соответствующего решения $\hat{x}(t)$ с начальным условием $\hat{x}(t_0) = x(t_0))$ будем иметь $(\hat{x}(t_1), \psi(t_1)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}(s), \psi(s))\,ds$. Поскольку $\int_{t_0}^{t_1} (u(s), \psi(s))\,ds < \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}(s), \psi(s))\,ds$, то и $(x(t_1), \psi(t_1)) < (\hat{x}(t_1), \psi(t_1))$. А это неравенство противоречит выбору вектора $\psi(t_1)$ как вектора внешней нормали к плоскости π в точке $x(t_1)$. Значит, $(u(t), \psi(t)) = C(U; \psi(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть $(x(t_0), \psi(t_0)) < C(U; \psi(t_0))$. Рассмотрим точку $\hat{x}(t_0) \in M_0$, такую что $(\hat{x}(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0; \psi(t_0))$. Соответствующее управлению $\hat{u}(t)$ решение имеет следующий вид

$$\hat{x}(t) = F(t) \left(\hat{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s) \hat{u}(s) \, ds \right)$$

и $(\hat{x}(t), \psi(t)) = (\hat{x}(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (\hat{u}(s), \psi(s)) \, ds$. Скалярное произведение

$$(\hat{x}(t_1), \psi(t_1)) \leqslant (x(t_1), \psi(t_1)) \quad \text{для всех } \hat{u} \in U.$$

Рассмотрим управление $\hat{u}(t) = u(t)$ почти всюду на $[t_0, t_1]$. Тогда

$$C(M_0; \psi(t_0)) = (\hat{x}(t_0), \psi(t_0)) \leqslant (x(t_0), \psi(t_0)),$$

что противоречит предположению $(x(t_0), \psi(t_0)) < C(U; \psi(t_0))$. Значит, условие трансверсальности $(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0; \psi(t_0))$ выполнено. Лемма 1.2 полностью доказана.

Л е м м а 1.3. *Пусть M_0 — выпуклый компакт. Если $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$, каждая из пар $\{u_i(t), x_i(t)\}$, $i = 1, 2$, удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, и условию трансверсальности на множестве M_0, а кроме того, опорная функция $C(U; \psi_1)$ дифференцируема по ψ_1 вдоль $\psi_1(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, то $x_1(t_1) \neq x_2(t_1)$.*

Пусть выполнены условия условия леммы, но $x_1(t_1) = x_2(t_1)$. Тогда

$$F(t_1) \left(x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F^{-1}(s) u_1(s) \, ds \right) = F(t_1) \left(x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F^{-1}(s) u_2(s) \, ds \right).$$

Так как $F(t_1)$ невырождена, то

$$x_2(t_0) - x_1(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F^{-1}(s)(u_1(s) - u_2(s)) \, ds,$$

и значит,

$$(x_2(t_0) - x_1(t_0), \psi_1(t_0)) = (\int_{t_0}^{t_1} F^{-1}(s)(u_1(s) - u_2(s)) \, ds, \psi_1(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} (u_1(s) - u_2(s), \psi_1(s)) \, ds.$$

В силу условия трансверсальности $(x_1(t_0), \psi_1(t_0)) = C(M_0; \psi_1(t_0))$, поэтому выполнено неравенство $(x_2(t_0) - x_1(t_0), \psi_1(t_0)) \leqslant 0$. С другой стороны, так как пара $\{u_1(t), x_1(t)\}$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_0, t_1]$, то $\int_{t_0}^{t_1} (u_1(s) - u_2(s), \psi_1(s)) \, ds \geqslant 0$. Значит,

$$(x_2(t_0) - x_1(t_0), \psi_1(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} (u_1(s) - u_2(s), \psi_1(s)) \, ds = 0.$$

Это возможно лишь в случае, когда $(u_1(s) - u_2(s), \psi_1(s)) = 0$ для почти всех $s \in [t_0, t_1]$. Из дифференцируемости $C(U, \psi_1)$ по ψ_1 вдоль $\psi_1(t)$ следует, что максимум в выражении $\max\limits_{u \in U}(u, \psi_1(t))$ достигается на единственном векторе $u_1(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Получаем равенство управлений $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $[t_0, t_1]$ и

$$x_1(t_1) - x_2(t_1) = F(t)(x_1(t_0) - x_2(t_0)) \neq 0,$$

что противоречит предположению о совпадении $x_1(t_1) = x_2(t_1)$. Лемма 1.3 доказана.

§ 2. Достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения

Рассматривается линейная нестационарная задача конфликтного взаимодействия управляемых объектов с участием n преследователей и m убегающих при одинаковых динамических возможностях всех участников. Цель преследователей — переловить всех убегающих, цель убегающих — хотя бы одному из них избежать поимки. В стационарном случае задача рассматривалась в [107]. Получены достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей и m убегающих. Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$, имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in U.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид:

$$\dot{y}_j(t) = A(t)y_j(t) + v_j(t), \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v_j \in U,$$

причём $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j. Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт, $A(t)$ — действительная квадратная матрица порядка k, измеримая на всей оси t, норма $\|A(t)\|$ интегрируема на любом компактном подмножестве оси t. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v_j(t)$, принимающие при $t \geqslant t_0$ значения из множества U.

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что в дифференциальной игре Γ из начального состояния $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ *разрешима* на полубесконечном интервале $[t_0, +\infty)$ *локальная задача уклонения*, если существуют такие управления $v_1(t), \ldots, v_m(t)$ убегающих, что при любых управлениях $u_1(t)$,…,$u_n(t)$ преследователей найдется номер $s \in \{1, \ldots, m\}$ такой, что $y_s(t) \neq x_i(t)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ при всех $t \geqslant t_0$.

Пусть G — некоторое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Полагаем

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_\nu(t)), \quad y(t) = (y_1(t), \ldots, y_\mu(t))$$

и определим множества индексов

$$I(x(t), G) = \{i|\ i \in \{1, \ldots, \nu\},\ x_i(t) \in G\},$$
$$J(y(t), G) = \{j|\ j \in \{1, \ldots, \mu\},\ y_j(t) \in G\},$$

причем, если существуют индексы $j_l \in J(y(t), \partial G)$, $l = 1, \ldots, s$, $s > 1$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$, такие, что $y_{j_1}(t) = y_{j_2}(t) = \cdots = y_{j_s}(t)$, то считаем, что $j_l \notin J(y(t), \partial G)$ для $l = 2, \ldots, s$. Обозначим через $|I|$ количество элементов конечного множества I.

Предположим, что G — выпуклый компакт. Обозначим через $\psi_j(t)$ решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t), \tag{2.1}$$

соответствующее начальному условию $\psi_j(t_0) = p_j$, где p_j — единичный опорный вектор к множеству G в граничной точке y_j^0, $j \in J(y(t_0), \partial G)$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть существует выпуклый компакт G, что*

$$|J(y(t_0), \partial G)| > |I(x(t_0), \mathbb{R}^n \backslash G)|,$$

и для любого $j \in J(y(t_0), \partial G)$ опорная функция $C(U; \psi_j)$ дифференцируема по ψ_j вдоль траектории $\psi_j(t)$ системы (2.1) *для почти всех $t \geqslant t_0$. Тогда в дифференциальной игре Γ из начального состояния z_0 разрешима локальная задача уклонения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве управления убегающего E_j, $j \in J(y(t_0), \partial G)$ выберем функцию $v_j(t) \in U$, $t \geqslant t_0$, удовлетворяющую условию

$$(v_j(t), \psi_j(t)) = C(U; \psi_j(t)), \quad t \geqslant t_0. \tag{2.2}$$

Из предположения теоремы о дифференцируемости опорной функции вдоль траектории $\psi_j(t)$ для почти всех $t \geqslant t_0$ следует, что множество U строго выпукло в каждом из направлений $\psi_j(t)$ при почти всех $t \geqslant t_0$, и максимум в выражении (2.2) достигается на единственном элементе $v_j(t) = v_j(\psi_j(t))$, причем v_j зависит от ψ_j непрерывно. Но так как $\psi_j(t)$ — абсолютно непрерывная функция, то функция $v_j(\psi_j(t))$ как суперпозиция двух почти везде непрерывных функций является непрерывной функцией времени для почти всех $t \geqslant t_0$, а значит, измеримой. Управления убегающих E_j, $j \notin J(y(t_0), \partial G)$ произвольны.

Покажем, что преследователь P_i, $i \in I(x(t_0), G)$, не может поймать ни одного убегающего E_j, $j \in J(y(t_0), \partial G)$. Рассмотрим сначала случай $i \in I(x(t_0), \operatorname{Int} G)$. Из лемм 1.1, 1.2 следует, что при любом управлении $u_i(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, $u_i(\tau) \in U$, справедливо соотношение

$$x_i(t) \notin \partial X(t; t_0, G, U),$$

в то время как

$$y_j(t) \in \partial X(t; t_0, G, U)$$

для любых $j \in J(y(t_0), \partial G)$. Следовательно, $x_i(t) \neq y_j(t)$ при $t \geqslant t_0$ для любого $j \in J(y(t_0), \partial G)$.

Теперь покажем, что если в момент t_1 для некоторого индекса i

$$x_i(t_1) \in \partial X(t_1; t_0, G, U) \quad \text{и} \quad x_i(t_1) \neq y_j(t_1),$$

$j \in J(y(t_0), \partial G)$, то $x_i(t_1 + t) \neq y_j(t_1 + t)$ при $t > 0$.

Предположим противное: существует такое число $t_2 > 0$, управление $u_i(\tau)$, $\tau \in [t_1, t_1 + t_2]$, такие, что $x_i(t_1 + t_2) = y_j(t_1 + t_2)$. Тогда, учитывая включение $y_j(t) \in \partial X(t; t_0, G, U)$, $t \geqslant t_0$, получим, что

$$x_i(t_1 + t_2) \in \partial X(t_1 + t_2; t_0, G, U) = \partial X(t_2; t_1, X(t_1; t_0, G, U), U).$$

Поэтому пара $\{u_i(t), x_i(t)\}$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_1, t_1 + t_2]$ и условию трансверсальности на множестве $X(t_1; t_0, G, U)$. Пара $\{v_j(t), y_j(t)\}$ также удовлетворяет условию максимума на отрезке $[t_1, t_1 + t_2]$ и условию трансверсальности на множестве $X(t_1; t_0, G, U)$. Поскольку опорная функция $C(U; \psi_j)$ дифференцируема по ψ_j вдоль траектории $\psi_j(t)$ при почти всех t из отрезка $[t_1, t_1 + t_2]$, то, в силу леммы 1.3, $x_i(t_1 + t_2) \neq y_j(t_1 + t_2)$. Противоречие. Отсюда следует, что если $i \in I(x(t_0), \partial G)$, то $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $j \in J(y(t_0), \partial G)$, $t \geqslant t_0$.

Преследователь P_i, $i \in I(x(t_0), \mathbb{R}^n \backslash G)$, может поймать не более одного убегающего E_j, $j \in J(y(t_0), \partial G)$. Действительно, на основании леммы 1.3 заключаем, что

$$y_{j_0}(t) \neq y_{j_1}(t) \quad \text{для любых } j_0, j_1 \in J(y(t_0), \partial G),\ j_0 \neq j_1,\ t \geqslant t_0, \tag{2.3}$$

то есть одновременная поимка преследователем P_i, $i \in I(x(t_0), \mathbb{R}^n \backslash G)$, двух убегающих

$$E_{j_0}, E_{j_1},\ j_0, j_1 \in J(y(t_0), \partial G),$$

невозможна.

Предположим, что в момент $t_1 > t_0$ преследователь P_i, $i \in I(x(t_0), \mathbb{R}^n \backslash G)$, ловит убегающего E_{j_0}, $j_0 \in J(y(t_0), \partial G)$, то есть выполнено равенство $x_i(t_1) = y_{j_0}(t_1)$. Из соотношений (2.2), (2.3) получаем, что $x_i(t_1 + t) \neq y_{j_1}(t_1 + t)$ для всех $j_1 \in J(y(t_0), \partial G) \backslash \{j_0\}$, $t > 0$. Следовательно, преследователи могут поймать не более $|I(x(t_0), \mathbb{R}^n \backslash G)|$ убегающих E_j, $j \in J(y(t_0), \partial G)$. Поскольку

$$|J(y(t_0), \partial G)| > |I(x(t_0), \mathbb{R}^n \backslash G)|,$$

то теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть U — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Если существуют выпуклые компакты G_1, G_2 такие, что $x_i^0 \in G_1 \cup G_2$ для любого $i \in \{1, \ldots, \nu\}$*

и

$$|I(x(t_0),G_1\backslash G_2)|<|J(y(t_0),\mathbb{R}^n\backslash(G_1\cup G_2))|+|J(y(t_0),\partial G_2)|, \tag{2.4}$$

то в дифференциальной игре Γ *из начального состояния* z^0 *разрешима локальная задача уклонения.*

Доказательство. Определим управление $v_j(t)$, $t\geqslant t_0$, для каждого убегающего $j\in J(y(t_0),\partial G_2)$ из условия

$$(v_j(t),\psi_j(t))=C(U;\psi_j(t)), \tag{2.5}$$

где $\psi_j(t)$ — решение сопряженной системы (2.1), соответствующее начальному условию $\psi_j(t_0)=p_j$, p_j — единичный опорный вектор к множеству G_2 в граничной точке y_j^0. Можем считать, что множество G_2 имеет гладкую границу. В противном случае возьмем достаточно малое число $\delta>0$ такое, чтобы выполнялись соотношения

$$X(t_0+\delta;t_0,y_j^0,U)\cap(\bigcup_{i=1,2}X(t_0+\delta;t_0,G_i,U))=\varnothing \tag{2.6}$$

при любом $j\in J(y(t_0),\mathbb{R}^n\backslash(G_1\cup G_2))$;

$$X(t_0+\delta;t_0,G_2,U)\cap X(t_0+\delta;t_0,x_i^0,U)=\varnothing \tag{2.7}$$

при любом $i\in I(x(t_0),G_1\backslash G_2)$, и зададим управление $v_j(t)$ для любого убегающего $j\in\{1,\dots,\mu\}\backslash J(y(t_0),\partial G_2)$ на полуинтервале $[t_0,t_0+\delta)$ произвольным образом.

Из соотношений (2.6), (2.7) и лемм 1.1, 1.2, 1.3 получим, что в момент $t=t_0+\delta$ при любых управлениях преследователей

$$|I(x(t_0),G_1\backslash G_2)|=|I(x(t_0+\delta),X(t_0+\delta;t_0,G_1,U)\backslash X(t_0+\delta;t_0,G_2,U))|, \tag{2.8}$$

$$|J(y(t_0),\mathbb{R}^n\backslash(G_1\cup G_2))|=|J(y(t_0+\delta),\mathbb{R}^n\backslash(X(t_0+\delta;t_0,G_1,U)\cup X(t_0+\delta;t_0,G_2,U)))|, \tag{2.9}$$

$$|J(y(t_0),\partial G_2)|\leqslant|J(y(t_0+\delta),\partial X(t_0+\delta;t_0,G_2,U))| \tag{2.10}$$

и $X(t_0+\delta;t_0,G_2,U)$ — компакт с гладкой границей. В момент времени $t=t_0+\delta$ в качестве множеств G_1, G_2, фигурирующих в условиях теоремы, возьмем множества $X(t_0+\delta;t_0,G_1,U)$, $X(t_0+\delta;t_0,G_2,U)$.

Итак, множество G_2 имеет гладкую границу. Для всех индексов i, $i\in I(x(t_0),\partial G_2)$ определим траекторию $\overline{x}_i(t)$, $t\geqslant t_0$, которая исходит из точки x_i^0 и соответствует управлению $\overline{u}_i(t)$, выбираемому из равенства

$$(\overline{u}_i(t),\overline{\psi}_i(t))=C(U;\overline{\psi}_i(t)), \tag{2.11}$$

где $\overline{\psi}_i(t)$ — решение сопряженной системы (2.1) при $\overline{\psi}_i(t_0)=\overline{p}_i$; $\overline{p}_i$ — единичный опорный вектор к множеству G_2 в граничной точке x_i^0. Так как U — строго выпуклое множество и G_2 — компакт с гладкой границей, то траектории

$$y_j(t),\ j\in J(y(t_0),\partial G_2),\quad \overline{x}_i(t),\ i\in I(x(t_0),\partial G_2),\ t\geqslant t_0,$$

определяются единственным образом. Поэтому, если $x_i(t)\in\partial X(t;t_0,G_2,U)$ в момент $t>t_0$ при некотором управлении $u_i(\tau)$, $\tau\in[t_0,t]$, то $x_i(t)=\overline{x}_i(t)$, $i\in I(x(t_0),\partial G_2)$. Зададим управления убегающих y_j,

$$j\in\{1,\dots,\mu\}\backslash\left(J(y(t_0),\mathbb{R}^n\backslash(G_1\cup G_2))\cup J(y(t_0),\partial G_2)\right),$$

при $t\geqslant t_0$ произвольным образом.

Доказательство теоремы проведем по индукции относительно числа убегающих, начальные положения которых принадлежат множеству $\mathbb{R}^n\backslash(G_1\cup G_2)$.

Пусть $|J(y(t_0),\mathbb{R}^n\backslash(G_1\cup G_2))|=l$. Если $l=0$, то из условий теоремы следует существование такого выпуклого компакта G_2, что

$$|J_0(y(t_0), \partial G_2)| > |I(x(t_0), \mathbb{R}^n \backslash G_2)|.$$

Можно применить теорему 2.1.

Рассмотрим случай $l = 1$. Определим для произвольного выпуклого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ функцию

$$\varphi(x, p, K) = (x, p) - C(K; p), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

и многозначное отображение

$$P(x, K) = \{p \in \partial S | \quad \varphi(x, p, K) \geqslant 0\} \tag{2.13}$$

на множестве $\operatorname{dom} P = \mathbb{R}^n \backslash \operatorname{Int} K$. Управление

$$v_j(t), \quad t \in [t_0, t(p_j)), \quad j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2)),$$

определим из условия максимума (2.5), в котором $\psi_j(t)$ — решение сопряженной системы (2.1), соответствующее начальному условию

$$\psi_j(t_0) = p_j, \quad p_j \in P(y_j^0, G_1), \tag{2.14}$$

причем вектор p_j такой, что справедливы соотношения

$$y_j(t(p_j), p_j) \neq \overline{x}_i(t(p_j)), \quad i \in I(x(t_0), \partial G_2), \tag{2.15}$$

$$y_j(t(p_j), p_j) \neq y_s(t(p_j)), \quad s \in J(y(t_0), \partial G_2), \tag{2.16}$$

где $t(p_j)$ — первый момент времени, когда $y_j(t, p_j) \in X(t; t_0, G_2, U)$.

Здесь через $y_j(t, p_j)$, $j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))$, $t \geqslant t_0$, обозначена траектория игрока E_j, соответствующая управлению $v_j(t)$, выбираемому из равенства (2.5), в котором $\psi_j(t)$ — решение системы (2.1) при $\psi_j(t_0) = p_j$. Если такой момент $t(p_j)$ не существует, то положим $t(p_j) = +\infty$. В этом случае игрок E_j, $j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))$, при так выбранном управлении избежит поимки. Действительно, рассмотрим скалярное произведение

$$(y_j(t) - x_i(t), \psi_j(t)) = (y_j^0 - x_i^0, p_j) + \int_{t_0}^{t} (v_j(s) - u_i(s), \psi_j(s))\, ds, \quad i \in I(x(t_0), G_1 \backslash G_2).$$

Оно неотрицательно при всех $t \geqslant t_0$, причём равно нулю тогда и только тогда, когда $(y_j^0 - x_i^0, p_j) = 0$ и $v_j(s) = u_i(s)$ при почти всех $s \geqslant t_0$. Но тогда $y_j(t) - x_i(t) = F(t)(y_j^0 - x_i^0) \neq 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Значит, ни один преследователь P_i, $i \in I(x(t_0), G_1 \backslash G_2)$, не может поймать убегающего E_j, $j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))$. А так как $t(p_j) = +\infty$, то ни один преследователь P_i, $i \in I(x(t_0), G_2)$, не может поймать убегающего E_j, $j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))$. Поэтому считаем, что $t(p_j) < +\infty$.

Покажем, что если p_j^1,$p_j^2 \in P(y_j^0, G_1)$, $p_j^1 \neq p_j^2$, то

$$y_j(t, p_j^1) \neq y_j(t, p_j^2) \quad \text{при } t \geqslant t_0. \tag{2.17}$$

Допустим противное: существует такой момент $t > t_0$, что выполнено равенство $y_j(t, p_j^1) = y_j(t, p_j^2)$. Тогда

$$(y_j(t, p_j^1), p_j^1) = (y_j(t, p_j^2), p_j^1)$$

и, следовательно,

$$\int_{t_0}^{t} (v_j^1(s) - v_j^2(s), \psi_j^1(s))\, ds = 0. \tag{2.18}$$

Так как U — компакт с гладкой границей, то неравенство $(v_j^1(s), \psi_j^1(s)) > (v_j^2(s), \psi_j^1(s))$ справедливо при любом $s \in [t_0, t]$. Поэтому интеграл в равенстве (2.18) положителен. Получили противоречие. Тем самым соотношение (2.17) доказано.

Заметим также, что если при некотором

$$p_j^1 \in P(y_j^0, G_1), \quad j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2)),$$

выполнено равенство

$$y_j(t(p_j^1), p_j^1) = \overline{x}_s(t(p_j^1)) \tag{2.19}$$

для некоторого $s \in I(x(0), \partial G_2)$, то при любом другом векторе $p_j^2 \in P(y_j^0, G_1)$, $p_j^1 \neq p_j^2$ (предполагаем, что $t(p_j^2) < +\infty$), справедливо соотношение

$$y_j(t(p_j^2), p_j^2) \neq \overline{x}_s(t(p_j^2)). \tag{2.20}$$

Докажем это. Предположим противное:

$$y_j(t(p_j^2), p_j^2) = \overline{x}_s(t(p_j^2)). \tag{2.21}$$

Из соотношений (2.17), (2.19), (2.21) следует, что $t(p_j^1) \neq t(p_j^2)$. Не ограничивая общности, можем считать, что $t(p_j^1) < t(p_j^2)$. Так как

$$\overline{x}_s(t(p_j^1)) \in \partial X(t(p_j^1); t_0, y_j^0, U), \qquad \overline{x}_s(t(p_j^2)) \in \partial X(t(p_j^2); t_0, y_j^0, U),$$

и выполнено равенство (2.19), то в силу лемм 1.1, 1.2, 1.3

$$\overline{x}_s(t(p_j^2)) = y_j(t(p_j^2), p_j^1),$$

что противоречит соотношению (2.17). Тем самым неравенство (2.20) доказано.

Таким образом, убегающий E_j, $j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))$, зная начальные положения игроков $P_i, i \in I(x(t_0), \partial G_2)$, $E_s, s \in J(y(t_0), \partial G_2)$, выбирает в качестве $\psi_j(t_0)$ такой вектор $p_j \in P(y_j^0, G_1)$, что для соответствующей траектории $y_j(t, p_j)$, $t \geqslant t_0$, в момент $t = t(p_j)$ справедливы соотношения (2.15), (2.16).

Итак, пусть в момент $t = t(p_j)$ впервые выполнено включение

$$y_j(t) \in X(t; t_0, G_2, U), \quad j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2)).$$

Если $x_i(\tau) \in X(\tau; t_0, G_2, U)$, $i \in I(x(t_0), G_1 \backslash G_2)$ при $\tau \in (t_0, t(p_j))$, то в силу лемм 1.1, 1.2 преследователь P_i не может поймать на интервале $(\tau, +\infty)$ ни одного убегающего E_s, $s \in J(y(t_0), \partial G_2)$, то есть на отрезке $[t_0, t(p_j)]$ любой преследователь P_i, $i \in I(x(t_0), G_1 \backslash G_2)$, может поймать не более одного убегающего E_s, $s \in J(y(t_0), \partial G_2)$. Учитывая соотношения (2.4), (2.15), (2.16) и включения $y_j(t(p_j)) \in \partial X(t(p_j); t_0, G_2, U)$, получим

$$|I(x(t(p_j)), X(t(p_j); t_0, G_1, U) \backslash X(t(p_j); t_0, G_2, U))| < |J(y(t(p_j)), \partial X(t(p_j); t_0, G_2, U))|. \tag{2.22}$$

Управление $v_j(t)$ при $t \geqslant t(p_j)$ будем выбирать из условия (2.5), взяв в качестве $\psi_j(t)$ решение сопряженной системы (2.1) при

$$\psi_j(t(p_j)) = p'_j, \tag{2.23}$$

где p'_j — единичный вектор, опорный к множеству $X(t(p_j); t_0, G_2, U)$ в граничной точке $y_j(t(p_j))$. Из неравенства (2.22) получаем, что хотя бы один из убегающих избежит поимки.

Пусть выполнены условия теоремы и при $l \leqslant r$ в дифференциальной игре Γ из начального состояния z^0 разрешима локальная задача уклонения. Покажем, что теорема верна и при $l = r+1$. Зафиксируем некоторое выпуклое компактное множество G, такое, что $0 \in \operatorname{Int} G$. Можем считать, что

$$J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2)) = \{1, 2, \dots, r+1\}$$

и

$$y_s^0 \in \partial(G_1 + \varepsilon_s G),\ \varepsilon_s > 0,\ s = 1, \dots, r+1,$$

причем $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_{r+1}$. Действительно, для любого номера $j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))$ найдется такое число $\varepsilon_j > 0$, при котором $y_j^0 \in \partial(G_1 + \varepsilon_j G)$. Предположим, что существуют индексы j_1, $j_2 \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2))$, $j_1 \neq j_2$, для которых $\varepsilon_{j_1} = \varepsilon_{j_2}$. Выберем такое число $\delta > 0$, чтобы выполнялись соотношения (2.6), (2.7).

Пусть p^1, p^2 — единичные векторы, опорные к $G_1 + \varepsilon_{j_1} G$ соответственно в точках $y_{j_1}^0$, $y_{j_2}^0$. Управление игрока E_{j_i} на полуинтервале $[t_0, t_0 + \delta)$ будем выбирать из равенства

$$(v_{j_i}(t), \psi_{j_i}(t)) = C(U; \psi_{j_i}(t)),$$

где $\psi_{j_i}(t)$ — решение сопряженной системы (2.1) при $\psi_{j_i}(t_0) = p^1$, $i = 1, 2$. Тогда

$$y_{j_1}(t_0 + \delta) \in \partial(X(t_0 + \delta; t_0, G_1, U) + \varepsilon_{j_1} F(t_0 + \delta) G),$$
$$y_{j_2}(t_0 + \delta) \in \mathrm{Int}(X(t_0 + \delta; t_0, G_1, U) + \varepsilon_{j_1} F(t_0 + \delta) G),$$

множество $F(t_0 + \delta)G$ выпукло и компактно и $0 \in \mathrm{Int}\, F(t_0 + \delta)G$, поэтому

$$y_{j_2}(t_0 + \delta) \in \partial(X(t_0 + \delta; t_0, G_1, U) + \varepsilon_{j_2^1} F(t_0 + \delta) G),\ 0 < \varepsilon_{j_2^1} < \varepsilon_{j_1}.$$

Управление игрока E_j для любого $j \in J(y(t_0), \mathbb{R}^n \backslash (G_1 \cup G_2)) \backslash \{j_1, j_2\}$ выберем на $[t_0, t_0 + \delta)$ из условия (2.5), в котором $\psi_j(t)$ — решение сопряженной системы (2.1) при $\psi_j(t_0) = p_j$, где p_j — единичный вектор, опорный к к множеству $G_1 + \varepsilon_j F$ в граничной точке y_j^0. В момент $t = t_0 + \delta$ в качестве множеств G_1, G_2, фигурирующих в условии теоремы, возьмем множества $X(t_0 + \delta; t_0, G_1, U)$, $X(t_0 + \delta; t_0, G_2, U)$, а в качестве множества G — множество $F(t_0 + \delta)G$. Если необходимо, этот прием повторяем. Затем производим перенумерацию убегающих.

Итак, в момент времени $t = t_0$ мы зафиксировали такое выпуклое компактное множество G, $0 \in \mathrm{Int}\, G$, что $y_s^0 \in \partial(G_1 + \varepsilon_s G)$, $s = 1, \dots, r+1$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{r+1} > 0$. До момента $t = t(p_1)$, в который убегающий E_1 впервые попадает на множество $X(t; t_0, G_2, U)$, управление $v_1(t)$ находим из условия максимума

$$(v_1(t), \psi_1(t)) = C(U; \psi_1(t)), \tag{2.24}$$

где $\psi_1(t)$ — решение сопряженной системы (2.1) при $\psi_1(t_0) = p_1$, а $p_1 \in P(y_1^0, G_1 + \varepsilon_2 G)$, причем $y_1(t(p_1)) \neq \overline{x}_s(t(p_1))$ для любого $s \in I(x(t_0), \partial G_2)$, $y_1(t(p_1)) \neq y_s(t(p_1))$ для любого $s \in J(y(t_0), \partial G_2)$. Если такой момент времени $t(p_1)$ не существует, то положим $t(p_1) = +\infty$. В этом случае при так выбранном управлении убегающий E_1 избежит поимки. На интервале $[t(p_1), +\infty)$ управление $v_1(t)$ выбираем из условия (2.24), в котором $\psi_1(t)$ — решение сопряженной системы (2.1) при $\psi_1(t(p_1)) = p_1'$, где p_1' — единичный вектор, опорный к множеству $X(t(p_1); t_0, G_2, U)$ в граничной точке $y_1(t(p_1))$.

Считая управление игроков $E_1, \dots, E_{j-1}$, $j \leqslant r+1$, заданными, построим управление игрока E_j. Управление $v_j(t)$ при $t \in [t_0, t(p_j))$ находим из равенства (2.5), в котором $\psi_j(t)$ — решение системы (2.1) при $\psi_j(t_0) = p_j$, где вектор $p_j \in P(y_j^0, G_1 + \varepsilon_{j+1} F)$, если $j < r+1$, $p_{r+1} \in P(y_{r+1}^0, G_1)$, причем

$$y_j(t(p_j)) \neq \overline{x}_s(t(p_j)),\ s \in I(x(t_0), \partial G_2),$$
$$y_j(t(p_j)) \neq y_s(t(p_j)),\ s \in J_0(y(t_0), \partial G_2),$$
$$y_j(t(p_j)) \neq y_s(t(p_j)),\ s = 1, \dots, j-1,$$

где $t(p_j)$ — момент времени, при котором впервые выполнено включение $y_j(t) \in X(t; t_0, G_2, U)$. Предполагаем, что такой момент $t(p_j)$ существует. При $t \geqslant t(p_j)$ управление $v_j(t)$ определим из равенства (2.5), где $\psi_j(t)$ — решение системы (2.1) при $\psi_j(t(p_j)) = p_j'$, p_j' — единичный вектор, опорный к множеству $X(t(p_j); t_0, G_2, U)$ в граничной точке $y_j(t(p_j))$.

Обозначим $t^* = \min_{j\in J(y(t_0),\mathbb{R}^n\setminus(G_1\cup G_2))} t(p_j)$. Учитывая способ построения убегающих и леммы 1.1, 1.2, получим

$$|J(y(t^*)),\mathbb{R}^n\setminus(X(t^*;t_0,G_1,U)\cup X(t^*;t_0,G_2,U))| \leqslant r,$$
$$|I(x(t^*),X(t^*;t_0,G_1,U)\setminus X(t^*;t_0,G_2,U))| < |J(y(t^*),\mathbb{R}^n\setminus(X(t^*;t_0,G_1,U)\cup X(t^*;t_0,G_2,U)))|+$$
$$+|J_0(y(t^*),\partial X(t^*;t_0,G_2,U))|.$$

Согласно предположению индукции, в дифференциальной игре Γ из начального состояния $z(t^*)$ разрешима локальная задача уклонения. Теорема доказана.

§ 3. Достаточные условия разрешимости глобальной задачи уклонения в нестационарной задаче с простой матрицей

В 1976 Б. Н. Пшеничным была опубликована работа, в которой были получены необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования с равными возможностями игроков [77]. Естественным обобщением указанной задачи является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы — преследователи и убегающие. Цель группы преследователей — поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих — противоположна. В [23] для задачи простого преследования группой преследователей группу убегающих были получены достаточные условия разрешимости глобальной задачи уклонения. В [37] были получены достаточные условия разрешимости глобальной задачи уклонения в линейной стационарной дифференциальной игре с участием группы преследователей и группы убегающих при равных возможностях всех участников. В данной работе рассматривается нестационарная задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих при равных возможностях всех участников. Целью группы преследователей является поимка всех убегающих, а целью группы убегающих является предоставление возможности по крайней мере одному из них уклониться от встречи. Получены достаточные условия разрешимости локальной и глобальной задач уклонения.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей и m убегающих. Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1,\dots,n$, имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = -a(t)x_i(t) + u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in U.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j, $j = 1,\dots,m$, имеет вид

$$\dot{y}_j(t) = -a(t)y_j(t) + v_j(t), \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v_j \in U,$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$, для всех $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$. Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт, $a(t)$ — действительная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v_j(t)$, принимающие при $t \geqslant t_0$ значения из множества U.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n,m,z^0)$, где $z^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$. Определим функцию v следующим образом: $v(p) = c'(U;p)$, где $c'(U;p)$ — градиент опорной функции $c(U;p)$. Пусть далее

$$f_\pm(t) = \exp\Big(\pm\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big), \quad g(t) = \int_{t_0}^{t} f_+(s)\,ds, \quad \lambda_0 = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{g(t)},$$

H^+, H^- — открытые положительное и отрицательное полупространства, определяемые гиперплоскостью H. Пусть σ — некоторое разбиение $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots <$ промежутка $[t_0,+\infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

О п р е д е л е н и е 3.1. Назовём кусочно-программной стратегией V_j убегающего E_j, отвечающей разбиению σ, семейство отображений $\{b_j^l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l, x_1(\tau_l),\dots,x_n(\tau_l),y_1(\tau_l),\dots,y_m(\tau_l)),$$

$$\min_{i=1..n}\min_{\tau\in[\tau_0,\tau_l]}\|x_i(\tau)-y_1(\tau)\|,\ldots,\min_{i=1..n}\min_{\tau\in[\tau_0,\tau_l]}\|x_i(\tau)-y_m(\tau)\|)$$

измеримую функцию $v_j^l(t)$, определенную на $[\tau_l,\tau_{l+1})$ и такую что $v_j^l(t)\in U$ для всех $t\in[\tau_l,\tau_{l+1})$.

О п р е д е л е н и е 3.2. В игре $\Gamma(n,m,z^0)$ из состояния z^0 *разрешима локальная задача уклонения*, если существуют разбиение σ промежутка $[t_0,+\infty)$, кусочно-программные стратегии $V_1,\ldots,V_m$ убегающих $E_1,\ \ldots,\ E_m$, отвечающие разбиению σ такие, что для любых траекторий преследователей $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ найдется номер s такой, что неравенство $y_s(t)\neq x_i(t)$ будет выполнено для всех $t\geqslant t_0$ и всех $i\in\{1,\ldots,n\}$.

О п р е д е л е н и е 3.3. В дифференциальной игре $\Gamma(n,m,z^0)$ *разрешима глобальная задача уклонения*, если из любого начального состояния z^0 разрешима локальная задача уклонения.

Л е м м а 3.1. *Пусть в игре* $\Gamma(n,m,z^0)$ *существует гиперплоскость* H *такая, что* $x_i^0\in\overline{H^-}$, $i=1,\ldots,n$, $y_j^0\in\overline{H^+}$, $j=1,\ldots,m$. *Тогда в игре* $\Gamma(n,m,z^0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p — единичный вектор нормали гиперплоскости H, направленный в H^+. Рассмотрим решение $\psi(t)$ сопряженной системы

$$\dot\psi(t)=a(t)\psi(t)\tag{3.1}$$

с начальным условием $\psi(t_0)=p$. Тогда $\psi(t)=f_+(t)p$. В качестве стратегий убегающих V_j, $j=1,\ldots,m,$ выберем одну и ту же функцию $w(t),\ t\geqslant t_0,$ удовлетворяющую условию

$$(w(t),\psi(t))=c(U;\psi(t)).$$

В силу строгой выпуклости U и сонаправленности $\psi(t)$ и p функция $w(t)$ постоянна и равна $v(p),\ y_j(t)=f_-(t)(y_j^0+g(t)v(p))$.

Покажем, что ни один из преследователей $P_i,\ i=1,\ldots,n,$ не может поймать ни одного убегающего E_j, $j=1,\ldots,m$. Пусть u_i — управление преследователя P_i. Тогда

$$x(t)=f_-(t)(x_i^0+\int_{t_0}^t f_+(s)u_i(s)\,ds).$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(x_i(t)-y_j(t),\psi(t))&=(f_-(t)(x_i^0-y_j^0+\int_{t_0}^t f_+(s)(u_i(s)-v(p))\,ds),f_+(t)p)=\\ &=(x_i^0-y_j^0+\int_{t_0}^t f_+(s)(u_i(s)-v(p))\,ds,p)=(x_i^0-y_j^0,p)+\int_{t_0}^t(u_i(s)-v(p),f_+(s)p)\,ds=\\ &=(x_i^0-y_j^0,p)+\int_{t_0}^t(u_i(s),\psi(s))-c(U;\psi(s))\,ds.\end{aligned}$$

Оно неположительно при всех $t\geqslant t_0$, причем равно нулю тогда и только тогда, когда $x_i^0\in H$, $y_j^0\in H$ и $u_i(s)=v(p)$ почти всюду на $[t_0,t]$. Тогда $x_i(t)-y_j(t)=f_-(t)(x_i^0-y_j^0)\neq 0$ для всех $t\geqslant t_0$ в силу условия $x_i^0\neq y_j^0$ для всех $i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m.$ Значит, в игре $\Gamma(n,m,z^0)$ разрешима локальная задача уклонения. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Если начальная позиция хотя бы одного убегающего не принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей, то в силу леммы 3.1 разрешима локальная задача уклонения.

Л е м м а 3.2. *Пусть в игре* $\Gamma(n,m,z^0)$ *существуют гиперплоскости* H_1, H_2, *множества* $I\subset\{1,\ldots,n\},\ J\subset\{1,\ldots,m\},$ *такие, что выполнены следующие условия:*

1) $H_1 \parallel H_2$, $H_2^+ \subset H_1^+$;

2) $|J| \geqslant |I| + 1$;

3) $x_i^0 \in \overline{H_2{}^+}$, $i \in I$, $x_i^0 \in \overline{H_1{}^-}$, $i \notin I$, $y_j^0 \in H_1{}^+ \cap H_2{}^-$, $j \in J$;

4) *для любой пары индексов* s, $l \in J$, $s \neq l$, *выполнено* $y_s^0 - y_l^0 \nparallel v(p) - v(-p)$, p — *единичный вектор нормали* H_1, *направленный в* H_1^+.

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Доказательство. Рассмотрим решения $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ сопряженной системы (1) с начальными условиями $\psi_1(t_0) = p$, $\psi_2(t_0) = -p$. Тогда $\psi_1(t) = f_+(t)p$, $\psi_2(t) = -f_+(t)p$. Пусть функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, удовлетворяют условию

$$(w_i(t), \psi_i(t)) = c(U; \psi_i(t)), \quad i = 1, 2.$$

Так как $f_+(t) > 0$ для всех $t > t_0$ и U — строго выпуклый компакт, то $w_1(t) \equiv v(p)$, $w_2(t) \equiv v(-p)$. Кроме того, если $v(p) = v(-p)$, то $U = \{v(p)\}$ — одноточечное множество, поэтому в силу единственности решения дифференциального уравнения все траектории $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $y_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, попарно не пересекаются. Это означает, что ни один преследователь не может поймать ни одного убегающего, и в дифференциальной игре $\Gamma(n, m, z^0)$ разрешима локальная задача уклонения. Поэтому в дальнейшем считаем, что U содержит более одной точки. Заметим также, что $(v(p) - v(-p), p) \neq 0$, так как в противном случае $U \subset \hat{H}$, где $\hat{H}$ — опорная гиперплоскость к U, проходящая через $v(-p)$ с вектором нормали p, что противоречит строгой выпуклости U. Значит, $(v(p) - v(-p), p) > 0$.

Определим стратегии убегающих E_j, $j \in J$, полагая

$$v_j(t) = \begin{cases} v(-p), & t \in [t_0, t_j), \\ v(p), & t \in [t_j, +\infty), \end{cases}$$

где t_j — момент времени попадания убегающего E_j на гиперплоскость $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^k | (x, p) = (y_{j_0}(t), p)\}$ — это гиперплоскость, параллельная H_1, проходящая в каждый момент времени t через позицию $y_{j_0}(t)$ убегающего E_{j_0}, $j_0 \in J$, находящегося при $t = t_0$ ближе всего к H_1. Выясним, при каких условиях такой момент времени t_j существует. Убегающий E_j попадет на гиперплоскость $H(t)$ тогда и только тогда, когда $(y_j(t), p) = (y_{j_0}(t), p)$. Если $j = j_0$, то $t_j = t_0$, $v_j(t) = v(p)$. Если $j \neq j_0$, то $v_j(t) = v(-p)$ и $(y_j(t) - y_{j_0}(t), p) = (f_-(t)(y_j^0 - y_{j_0}^0 + g(t)(v(-p) - v(p))), p) = 0$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$g(t) = \frac{(y_j^0 - y_{j_0}^0, p)}{(v(p) - v(-p), p)} \tag{3.2}$$

имеет решение при $t \geqslant t_0$. Функция $g(t)$ непрерывна и строго монотонно возрастает. Скалярное произведение $(y_j^0 - y_{j_0}^0, p) \geqslant 0$ в силу выбора j_0. Если $(y_j^0 - y_{j_0}^0, p) = 0$, то $t_j = t_0$ и $v_j(t) = v(p)$. Если же $(y_j^0 - y_{j_0}^0, p) > 0$, то уравнение (3.2) имеет единственное решение t_j при условии, что либо $\lambda_0 = 0$ (и, таким образом, $g(t)$ неограниченно возрастает), либо выполнено неравенство $\frac{(y_j^0 - y_{j_0}^0, p)}{(v(p) - v(-p), p)} < \frac{1}{\lambda_0}$ при $\lambda_0 > 0$. Если хотя бы при одном $j \in J$ последнее неравенство не выполнено, тогда убегающий E_{j_0} избежит поимки. Покажем это.

Пусть u_i — управление преследователя P_i, $i \in I$. Тогда при любом $t \geqslant t_0$

$$\begin{aligned} (y_{j_0}(t) - x_i(t), \psi_1(t)) &= (y_{j_0}^0 - x_i^0 + f_+(s)(v(p) - u_i(s))\, ds, p) = \\ = (y_{j_0}^0 - x_i^0, p) + \int_{t_0}^{t} (v(p) - u_i(s), \psi_1(s))\, ds &\leqslant (y_{j_0}^0 - x_i^0, p) + \int_{t_0}^{t} (v(p) - v(-p), \psi_1(s))\, ds = \\ &= (y_{j_0}^0 - x_i^0, p) + g(t)(v(p) - v(-p), p) < 0, \end{aligned}$$

так как
$$g(t) < \frac{1}{\lambda_0} \leqslant \frac{(y_j^0 - y_{j_0}^0, p)}{(v(p) - v(-p), p)} < \frac{(x_i^0 - y_{j_0}^0, p)}{(v(p) - v(-p), p)}.$$

Выясним теперь, при каких условиях траектории, соответствующие так определенным стратегиям убегающих, попарно не пересекаются. Рассмотрим двух убегающих E_i и E_j, i, $j \in J$, со стратегиями V_i и V_j.

$$v_i(t) = \begin{cases} v(-p), & t \in [t_0, t_i), \\ v(p), & t \in [t_i, +\infty), \end{cases} \qquad v_j(t) = \begin{cases} v(-p), & t \in [t_0, t_j), \\ v(p), & t \in [t_j, +\infty). \end{cases}$$

Можно считать, что $t_i \leqslant t_j$. Так как $v_i(t) = v_j(t)$ при $t \in [t_0, t_i]$ и при $t \in [t_j, +\infty)$, то убегающие могут столкнуться только в момент времени $T \in [t_i, t_j]$. Тогда

$$y_i(T) = f_-(T)(y_i^0 + \int_{t_0}^{T} f_+(s)v_i(s)\,ds) = f_-(T)(y_i^0 + g(t_i)v(-p) + (g(T) - g(t_i))v(p)),$$
$$y_j(T) = f_-(T)(y_j^0 + \int_{t_0}^{T} f_+(s)v_j(s)\,ds) = f_-(T)(y_j^0 + g(T)v(-p)),$$

и $y_i(T) = y_j(T)$ тогда и только тогда, когда $y_j^0 - y_i^0 = (g(T) - g(t_i))(v(p) - v(-p))$, при этом $T = t_j$ (в силу определения t_j) и $g(t_j) - g(t_i) > 0$, так как по условию $y_j^0 \neq y_i^0$.

Из условия 4 следует, что траектории убегающих E_j, $j \in J$, не пересекаются. Покажем, что стратегии V_j, $j \in J$, есть стратегии уклонения. Из леммы 3.1 следует, что для любой траектории $x_i(t)$, $i \notin I$, выполнено $x_i(t) \neq y_j(t)$ при любом $t \geqslant t_0$ и для любого номера $j \in J$.

Кроме того, из леммы 3.1 следует, что для любой траектории $x_i(t)$, $i \in I$, выполнено $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $j \in J$, $t \in [t_0, \max\limits_{j \in J} t_j]$.

Покажем, что каждый из преследователей P_i, $i \in I$, ловит не более одного убегающего E_j, $j \in J$. Пусть это утверждение неверно, то есть существуют $i \in I$, $j_1, j_2 \in J$, $t_1, t_2 > \max\limits_{j \in J} t_j$ такие, что
$$x_i(t_1) = y_{j_1}(t_1), \quad x_i(t_2) = y_{j_2}(t_2) \tag{3.3}$$
для некоторой траектории $x_i(t)$.

Так как $y_{j_1}(t) \neq y_{j_2}(t)$ для всех $t \geqslant t_0$, то $t_1 \neq t_2$. Пусть $t_1 < t_2$, тогда в момент времени t_1 убегающий E_{j_2} и преследователь P_i находятся на одной гиперплоскости $H(t_1)$, поэтому, в силу леммы 1, $y_{j_2}(t) \neq x_i(t)$ при любом $t \geqslant t_1$. А это противоречит (3.3). Следовательно, каждый из преследователей P_i, $i \in I$, ловит не более одного убегающего E_j, $j \in J$. В силу условия 2 получаем, что в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ разрешима локальная задача уклонения. Лемма доказана.

Л е м м а 3.3. *Пусть в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ параметр $\lambda_0 = 0$, существуют гиперплоскости H_1, H_2, …, H_{2l}, множества I_1, I_2,…, I_l, J_1, J_2, …, J_l такие, что выполнены следующие условия:*

1) *$H_1 \parallel H_2 \parallel \cdots \parallel H_{2l}$, $H_j^+ \subset H_{j-1}^+$, $j = 2, \ldots, 2l$, p — единичный вектор нормали гиперплоскости H_1, направленный в H_1^+;*

2) *$I_s \subset \{1, \ldots, n\}$, $J_q \subset \{1, \ldots, m\}$, $s, q = 1, \ldots, l$, $I_s \cap I_q = \emptyset$, $s \neq q$, $J_s \cap J_q = \emptyset$, $s \neq q$;*

3) *$x_i^0 \in \overline{H_1^-}$, $i \notin \bigcup\limits_{s=1}^{l} I_s$;*

4) *$x_i^0 \in \overline{H_{2s}^+} \cap \overline{H_{2s+1}^-}$, $i \in I_s$, $s = 1, \ldots, l-1$, $x_i^0 \in \overline{H_{2l}^+}$, $i \in I_l$;*

5) *$y_j^0 \in H_{2s-1}^+ \bigcap H_{2s}^-$, $j \in J_s$, $s = 1, \ldots, l$;*

6) *$|J_1| + [|J_2| - |I_1|]^+ + \cdots + [|J_l| - (|I_1| + |I_2| + \cdots + |I_{l-1}|)]^+ \geqslant |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_l|$, где $a^+ = \max(a, 0)$;*

7) *для любой пары индексов* $i, j \in \bigcup\limits_{s=1}^{l} J_s$, $i \neq j$, *выполнено* $y_i^0 - y_j^0 \nparallel v(p) - v(-p)$.

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I_0 = \bigcup\limits_{s=1}^{l} I_s$, $J_0 = \bigcup\limits_{s=1}^{l} J_s$. Стратегии убегающих E_j, $j \notin J_0$ задаем произвольно, а для $j \in J_0$ полагаем

$$v_j(t) = \begin{cases} v(-p), & t \in [t_0, t_j^1), \\ v(p), & t \in [t_j^1, +\infty), \end{cases} \qquad j \in J_1,$$

$$v_j(t) = \begin{cases} v(-p), & t \in [t_0, t_j^q), \\ v(p), & t \in [t_j^q, t^q), \\ v(-p), & t \in [t^q, t^{q*}), \\ v(p), & t \in [t^{q*}, +\infty), \end{cases} \qquad j \in J_q, \ q \neq 1.$$

Пусть $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^k | (x, p) = (y_{j_0}(t), p)\}$ — гиперплоскость, параллельная H_1, проходящая через начальную позицию убегающего E_{j_0}, $j_0 \in J_1$, ближайшего к H_1. Движение убегающих E_j, $j \in J_q$, $q \geqslant 2$, происходит следующим образом: на интервале $[t_0, t^q)$ убегающие «выравниваются» так, чтобы в момент t^q всем попасть на некоторую гиперплоскость $\tilde{H}_q \parallel H_1$; на интервале $[t^q, t^{q*}]$ убегающие сближаются с гиперплоскостью $H(t)$; в момент t^{q*} убегающие E_j, $j \in J_q$, $q \geqslant 2$, попадают на гиперплоскость $H(t)$ и остаются на ней. Моменты времени t_j^i, $i = 1, \ldots, l$, $j \in J_i$, определяются из уравнения

$$g(t_i^j) = \frac{(y_j^0 - y_{j_i^0}^0, p)}{(v(p) - v(-p), p)},$$

где $j_i^0 \in J_i$ — номер убегающего, ближайшего к H_{2i-1}. Моменты времени t^i, $i = 2, \ldots, l$, определяются из уравнения $g(t^i) = \dfrac{(y_{j_i^1}^0 - y_{j_i^0}^0, p)}{(v(p) - v(-p), p)}$ где j_i^1, $j_i^0 \in J_i$ — номера убегающих, ближайших к H_{2i} и H_{2i-1}. Моменты времени t^{i^*}, $i = 2, \ldots, l$, определяются из уравнения

$$g(t^{i^*}) = \frac{(y_{j_i^1}^0 - y_{j_1^0}^0, p)}{(v(p) - v(-p), p)},$$

где $j_i^1 \in J_i$ — номер убегающего, ближайшего к H_{2i}, $j_1^0 \in J_1$ — номер убегающего, ближайшего к H_1.

Из леммы 3.2 следует, что для любой траектории $x_i(t)$, $i \notin I_0$, выполнено $x_i(t) \neq y_j(t)$, $t \geqslant t_0$, $j \in J_0$.

Покажем, что если $i \in I_q$, то P_i ловит не более $l - q + 1$ убегающих. Из леммы 3.2 следует, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $j \in J_r$, $r \leqslant q$, $t \in [t_0, t^{r*}]$. Из леммы 3.2 следует также, что $y_j(t) \neq x_i(t)$, $j \in J_s$, $s > q$, $t \in [t_0, t^s]$. Далее, если $x_i(t^*) \in H(t^*)$, то на интервале $(t^*, +\infty)$ преследователь P_i не ловит ни одного из убегающих E_j, $j \in J_0$.

Если же $x_i(t) \notin H(t)$ при $t \leqslant T$, то на отрезке $[t_0, T]$ преследователь P_i может поймать не более одного убегающего E_j, $j \in J_s$, $s > q$. Отсюда получаем, что P_i ловит не более $(l - q + 1)$ убегающих.

Перейдем к доказательству леммы. Обозначим

$$r_s = [|J_s| - (|I_1| + \cdots + |I_{s-1}|)]^+, \quad s = 2, \ldots, l.$$

Если $r_s = 0$, $s = 2, \ldots, l$, то лемма 3.3 следует из леммы 3.2.

Пусть $r_s > 0$, $s = 2, \ldots, l$. В силу предыдущего утверждения каждый из преследователей P_i, $i \in I_s$, ловит не более $(l - s + 1)$ убегающих. Поэтому все преследователи P_i, $i \in I_0$, могут поймать не более $l|I_1|+(l-1)|I_2|+\dots+2|I_{l-1}|+|I_l|$ убегающих, а тогда

$$|J_1|+|J_2|+\dots+|J_l|-[l|I_1|+(l-1)|I_2|+\dots+2|I_{l-1}|+|I_l|]=$$
$$|J_1|+r_2+r_3+\dots+r_l-[|I_1|+|I_2|+\dots+|I_{l-1}|+|I_l|]>0.$$

Поэтому в этом случае разрешима локальная задача уклонения от встречи.

Если $r_s>0$ не для всех s, рассмотрим только те s, для которых $r_s>0$. Обозначим данные значения s через $s_1,s_2,\dots,s_q$; $2\leqslant s_1<s_2<\dots<s_q\leqslant l$. Введем множества $J'_1,\dots,J'_{q+1}$, $I'_1,\dots,I'_{q+1}$ следующим образом:

$$J'_1=J_1,\quad J'_{j+1}=J_{s_j},\quad j=1,2,\dots,q,\quad I'_1=I_1\bigcup I_2\bigcup I_{s_1-1},$$
$$I'_2=I_{s_1}\bigcup I_{s_1+1}\bigcup\dots\bigcup I_{s_2-1},$$
$$I'_j=I_{s_{j-1}}\bigcup I_{s_{j-1}+1}\bigcup\dots\bigcup\quad I_{s_j-1},\quad j=3,\dots,q,$$
$$I'_{q+1}=I_{s_q}\bigcup I_{s_q+1}\bigcup\dots\bigcup I_l.$$

Тогда все условия леммы 3.3 для множеств $J'_1,\dots,J'_{q+1}$, $I'_1,\dots,I'_{q+1}$ и плоскостей $H'_1,\dots,H'_{2q+2}$ будут выполнены, причем

$$r'_s=\left[|J'_s|-\left(|I'_1|+\dots+|I'_{s-1}|\right)\right]^+>0,\quad s=2,\dots,q+1.$$

Здесь
$$H'_1=H_1,\quad H'_2=H_2,\quad H'_{2i+1}=H_{2s_i-1},\quad H'_{2i+2}=H_{2s_i},\quad i=1,\dots,q.$$

Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n,m,z_0)$ разрешима локальная задача уклонения. Лемма доказана.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $\lambda_0=0$, U — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда для любых натуральных чисел p, m, таких, что $m\geqslant p2^p+2$ в игре $\Gamma(2^p+1,m,z_0)$ разрешима глобальная задача уклонения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n=2^p+1$, $x_1^0,\dots,x_n^0$ — начальные позиции преследователей, $y_1^0,\dots,y_m^0$ — начальные позиции убегающих. Считаем, что точки $x_1^0,\dots,x_n^0$, $y_1^0,\dots,y_m^0$ попарно различны. Пусть q — единичный вектор такой, что

$$(q,x_i^0-x_j^0)\neq0,\quad 1\leqslant j<i\leqslant n,\tag{3.4}$$

$$(q,y_i^0-y_j^0)\neq0,\quad 1\leqslant j<i\leqslant m,\tag{3.5}$$

$$(q,y_j^0-x_i^0)\neq0,\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,m,\tag{3.6}$$

$$y_i^0-y_j^0\nparallel v(q)-v(-q),\quad 1\leqslant j<i\leqslant m.\tag{3.7}$$

Такой вектор q существует, так как соотношения (3.4)–(3.6) относительно q определяют конечное число гиперплоскостей, проходящих через начало координат, а условию (3.7) удовлетворяет конечное число векторов единичной сферы. Докажем это. Множество U — строго выпуклый компакт с гладкой границей, теми же свойствами обладают множества $-U$ и $U-U$. Опорная функция множества $-U$ имеет вид $c(-U;p)=c(U;-p)$, множества $U-U$ $c(U-U;p)=c(U;p)+c(-U;p)=c(U;p)+c(U;-p)$. Градиент опорной функции $U-U$ равен $c'(U;p)-c'(U;-p)=v(p)-v(-p)$ и эта функция взаимно однозначно и непрерывно отображает единичную сферу на границу множества $U-U$. Поэтому для каждого вектора $z_{ij}=y_i^0-y_j^0$, $1\leqslant j<i\leqslant m$, существует ровно два вектора p_{ij} и $-p_{ij}$ таких, что $v(p_{ij})-v(-p_{ij})\parallel z_{ij}.$

Пусть $H_1,\dots,H_n$ — гиперплоскости с нормалью q такие, что $x_i^0\in H_i$, $i=1,\dots,n$, причем $H_i^+\subset H_{i+1}^+$, $i=1,\dots,n-1$. Считаем, что q направлен в H_n^+, и $y_j^0\in H_1^-\cap H_n^+$, $j=1,\dots,m$.

Зададим стратегии $V_1(t)$, …, $V_m(t)$ следующим образом. При $p=1$ рассмотрим множества $A_1=\{j|y_j^0\in H_1^-\cap H_2^+\}$, $A_2=\{j|y_j^0\in H_2^-\cap H_3^+\}$. Пусть d_j^1 (d_j^2) — расстояние от y_j^0, $j\in A_1$

$(j \in A_2)$ до H_1 (H_3).

Пусть $A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, $A_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$, $d^1_{\alpha_1} \leqslant d^1_{\alpha_2} \leqslant \ldots \leqslant d^1_{\alpha_s}$, $d^2_{\beta_1} \leqslant d^2_{\beta_2} \leqslant \ldots \leqslant d^2_{\beta_r}$. Тогда полагаем

$$v_{\beta_1}(t) = v_1, t \in [t_0, \infty),$$

$$v_{\beta_j}(t) = \begin{cases} v_2, & t \in [t_0, t^2_{\beta_j}), \\ v_1, & t \in [t^2_{\beta_j}, \infty), \end{cases} \quad j = 2, \ldots, r,$$

$$v_{\alpha_1} = \begin{cases} v_2, & t \in [t_0, t^1_{\alpha_1}), \\ v_1, & t \in [t^1_{\alpha_1}, \infty), \end{cases}$$

$$v_{\alpha_j} = \begin{cases} v_1, & t \in [t_0, t^1_{\alpha_j}), \\ v_2, & t \in [t^1_{\alpha_j}, t^1_{\alpha_1}), \\ v_1, & t \in [t^1_{\alpha_1}, \infty), \end{cases} \quad j = 2, \ldots, s.$$

Здесь $t^2_{\beta_j}$ — решение уравнения

$$g(t) = \frac{(y^0_{\beta_j} - y^0_{\beta_1}, q)}{(v_1 - v_2, q)}, \quad j = 2, \ldots, r,$$

$t^1_{\alpha_1}$ — решение уравнения

$$g(t) = \frac{(y^0_{\alpha_1} - y^0_{\beta_1}, q)}{(v_1 - v_2, q)},$$

$t^1_{\alpha_j}$ — решение уравнения

$$g(t) = \frac{(y^0_{\alpha_1} - y^0_{\alpha_j}, q)}{(v_1 - v_2, p)}, \quad j = 2, \ldots, s.$$

Предположим, что стратегии $V_1(t)$, …, $V_m(t)$ определены для всех $p < l$. Построим теперь стратегии $v_1(t)$, …, $v_m(t)$ для $p = l$. Пусть $n_1 = 2^{l-1} + 1$, $A_1 = \{j | y^0_j \in H^-_1 \cap H^+_{n_1}\}$, $A_2 = \{j | y^0_j \in H^-_{n_1} \cap H^+_n\}$. В силу индукционного предположения в игре $\Gamma(n_1, |A_1|, \overline{z_0})$, где $\overline{z_0} = (\overline{x^0}, \overline{y^0})$, $\overline{x^0} = (x^0_1, \ldots, x^0_{n_1})$, $\overline{y_0} = (y^0_j, j \in A_1)$ определены стратегии $\overline{v_j}$, $j \in A_1$, убегающих $\overline{E_j}$, $j \in A_1$. Аналогично в игре $\Gamma(n_1, |A_2|, \hat{z_0})$, где $\hat{z_0} = (\hat{x^0}, \hat{y^0})$, $\hat{x^0} = (x^0_{n_1}, \ldots, x^0_n)$, $\hat{y^0} = (y^0_j, j \in A_2)$, определены стратегии $\hat{v_j}$, $j \in A_2$, убегающих $\hat{E_j}$, $j \in A_2$.

Определим стратегии в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ следующим образом:

$$v_j(t) = \begin{cases} \hat{v_j}(t), & t \in [t_0, t_2), \\ v_1, & t \in [t_2, \infty), \end{cases} \quad j \in A_2, \qquad v_j(t) = \begin{cases} \overline{v_j}(t), & t \in [t_0, t_1), \\ v_2, & t \in [t_1, t_3), \\ v_1, & t \in [t_3, \infty), \end{cases} \quad j \in A_1.$$

Здесь t_1 — решение уравнения $g(t) = \frac{(y^0_{\alpha_1} - y^0_{\alpha_s}, q)}{(v_1 - v_2, q)}$, t_2 — решение уравнения $g(t) = \frac{(y^0_{\beta_r} - y^0_{\beta_1}, q)}{(v_1 - v_2, q)}$, t_3 — решение уравнения $g(t) = \frac{(y^0_{\alpha_1} - y^0_{\beta_1}, q)}{(v_1 - v_2, q)}$, где $\alpha_1 \in A_1$ — номер убегающего E_{α_1}, ближайшего к H_1, $\alpha_s \in A_1$ — номер убегающего E_{α_s}, ближайшего к H_{n_1}, $\beta_1 \in A_2$ — номер убегающего E_{β_1}, ближайшего к H_n, $\beta_r \in A_2$ — номер убегающего E_{α_r}, ближайшего к H_{n_1}. Пусть $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^k | (x, q) = (y_{\beta_1}(t), q)\}$ — гиперплоскость, параллельная H_n, проходящая через позицию $y_{\beta_1}(t)$ убегающего E_{β_1}. Используя индукцию, получаем, что на интервале $[t_0, t_3]$ преследователи P_1, …, P_n ловят не более $(l-1)2^l + 1$ убегающих. Действительно, при $p = 1$ преследователь P_2 ловит не более $1 = (1-1)2^1 + 1$ убегающего до попадания их на одну гиперплоскость. Предположив, что при $p < l$ преследователи P_i ловят не более $(p-1)2^p + 1$ убегающих до попадания их на одну гиперплоскость, докажем, что при $p = l$ преследователи ловят не более $(l-1)2^l + 1$ убегающего до попадания их на одну плоскость. В силу индукционного предположения до момента t_1 — момента попадания убегающих E_j, $j \in A_1$, на одну плоскость $\hat{H}_1$ — преследователи поймают не более $(l-2)2^{l-1} + 1$ убегающего. Аналогично, до момента t_2 — момента попадания убегающих E_j, $j \in A_2$, на одну плоскость $\hat{H}_2$ — преследователи поймают не более $(l-2)2^{l-1}+1$ убегающего. Между плоскостями $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$ может находится не более 2^l-1 преследователя, каждый из которых ловит не более одного убегающего, что в сумме дает не более $2((l-2)2^{l-1}+1)+2^l-1=(l-1)2^l+1$ убегающих, пойманных преследователями до момента t_3 — момента попадания всех убегающих на одну гиперплоскость.

В силу леммы 3.3 на интервале $[t_3,+\infty)$ преследователи $P_1,\ldots,P_n$ ловят не более 2^l убегающих. Поэтому всего преследователи $P_1,\ldots,P_n$ ловят не более $l2^l+1$ убегающих. А так как $m \geqslant l2^l+2$, то хотя бы один убегающий избежит поимки. Теорема доказана.

Введем функцию $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ вида

$$f(n)=\min\{m\colon \text{в}\,\Gamma(n,m,z^0)\,\text{разрешима глобальная задача уклонения}\}.$$

Следствие 3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы. Тогда существуют константы $C_1>0$, $C_2>0$ такие, что для всех $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$, справедливо неравенство $C_1 n\ln n \leqslant f(n)\leqslant C_2 n\ln n$.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что для всех $p\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство $f(2^p+1)\leqslant p2^p+2$. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$. Возьмем $p\in\mathbb{N}$ такое, что $2^{p-1}<n\leqslant 2^p+1$. Тогда

$$f(n)\leqslant f(2^p+1)\leqslant p2^p+2\leqslant C_2 n\ln n,$$

где $C_2=\frac{5}{\ln 2}$.

Для доказательства оценки снизу предварительно покажем, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существует начальная позиция z^0 такая, что в игре $\Gamma((k+1)^n, n(k+1)^{n-1}, z^0)$ происходит поимка. Доказательство данного утверждения проведём методом математической индукции.

Если $n=1$, то подходящей будет любая позиция, в которой $y^0\in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0\}_{i=1}^{k+1}$. Предположим, что утверждение верно для всех $n\leqslant p$. Докажем его для $n=p+1$.

В силу индукционного предположения существует позиция z^0 такая, что в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$ происходит поимка не позднее времени T. Зафиксируем данные начальные позиции.

Пусть A — множество данных начальных позиций, $R_1=R_1(T)$ — радиус шара с центром в начале координат, который содержит все возможные положения игроков в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^k$ правильный симплекс с вершинами $a_1,\ldots,a_{k+1}$ и длиной ребра β. Сделаем трансляцию множества A на каждый из векторов a_s, $s=1,\ldots,k+1$ и рассмотрим все точки вида $a_s+x_i^0$, где x_i^0 — начальное положение преследователя P_i $(i=1,\ldots,(k+1)^p)$ в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$, a_s — один из векторов $a_1,\ldots,a_{k+1}$.

В каждую точку данного вида поместим по преследователю, получим всего $(k+1)^{p+1}$ преследователей.

В каждую точку вида $a_s+y_j^0$, где y_j^0 — положение убегающего E_j $(j=1,\ldots,p(k+1)^{p-1})$ в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$, поместим по убегающему, получим $p(k+1)^p$ убегающих. Ещё $(k+1)^p$ убегающих поместим вовнутрь шара B_0 единичного радиуса с центром в центре симплекса. Тогда общее количество убегающих будет $(p+1)(k+1)^p$.

Рассмотрим получившуюся игру $\Gamma((k+1)^{p+1}, (p+1)(k+1)^p, z'^0)$ и покажем, что β можно подобрать так, что в полученной игре произойдёт поимка. Для этого рассмотрим шары $B_1,\ldots,B_{k+1}$ радиуса R_1 с центрами в точках $a_1,\ldots,a_{k+1}$. Обозначим через H_j гиперплоскость, опорную к каждому из шаров D_s, $s\neq j$ и разделяющую $\bigcup\limits_{s\neq j} D_s$ и D_j. Такая гиперплоскость существует, если β достаточно велико. Пусть H_j^+ — замкнутое полупространство, определяемое гиперплоскостью H_j и содержащее D_j.

Возьмём β таким, чтобы множество $\bigcap\limits_{j=1}^{k+1} H_j^+$ содержало шар радиуса $R_2=R_2(T)$, с центром в центре симплекса, в котором бы полностью поместилось множество достижимости шара B_0.

Покажем, что такой выбор β гарантирует поимку в полученной игре $\Gamma((k+1)^{p+1}, (p+1)(k+1)^p, z'^0)$. В силу индукционного предположения преследователи, находящиеся в $A_i=A+a_i$, ловят убегающих из этого же подмножества позиций к моменту времени, не превосходящее T. В силу выбора β каждый из убегающих с начальной позицией из B_0 находится внутри выпуклой оболочки, натянутой на позиции $\hat{P}_1(T), \ldots, \hat{P}_{k+1}(T)$ (где $\hat{P}_i(T)$ — позиция преследователя в момент времени T, в которой он оказался из начальной позиции в A_i). Таким образом, для каждого из оставшихся непойманными убегающих строится «окружение», гарантирующее поимку за конечное время. Тем самым показано, что в игре $\Gamma((k+1)^{p+1}, (p+1)(k+1)^p, z'^0)$ происходит поимка.

Пусть $n \geqslant k+1$ — произвольное натуральное число, $p \in \mathbb{N}$ — такое число, что

$$(k+1)^p \leqslant n < (k+1)^{p+1}.$$

Тогда

$$f(n) \geqslant f((k+1)^p) \geqslant p(k+1)^{p-1}.$$

Так как $p = [\log_{k+1} n]$, то $f(n) \geqslant C_1 n \ln n$. Следствие доказано.

П р и м е р 3.1. Пусть $a(t) = a \geqslant 0$ для всех $t \geqslant t_0$, A — положительно определенная квадратная матрица порядка k, $U = \{x | (Ax, x) \leqslant 1\}$. Тогда $\lambda_0 = 0$, U — строго выпуклый компакт с гладкой границей и поэтому для любых натуральных p, m, таких, что $m \geqslant p2^p + 2$ в игре $\Gamma(2^p + 1, m, z_0)$ разрешима глобальная задача уклонения.

§ 4. Нестационарная задача простого преследования одного убегающего с фазовыми ограничениями

Рассматривается нестационарная задача простого преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего с фазовыми ограничениями на состояние убегающего и одинаковыми динамическими возможностями всех участников. Стационарный случай $a(t) \equiv 1$ рассматривался многими авторами. В работах [23, 77] получено решение такой задачи без фазовых ограничений, причем в работе [77] рассмотрен случай, когда множество допустимых управлений игроков — шар, терминальные множества — начало координат, в работе [23] — множество допустимых управлений и терминальные множества — выпуклые компакты. В работе [37] получено решение задачи с фазовыми ограничениями, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — начало координат, а фазовые ограничения — выпуклый компакт. В работе [65] получено решение задачи с фазовыми ограничениями, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — компакты, а фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество. В работе [61] рассматривался случай, когда множество допустимых управлений игроков — выпуклый компакт, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество.

В данной работе рассмотрен нестационарный случай, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = a(t) u_i(t), \quad x_i(t_0) = x^0, \quad u_i \in Q. \tag{4.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y}(t) = a(t) v(t), \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in Q, \tag{4.2}$$

причем $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i = 1, \ldots, n$, M_i — заданные выпуклые компакты; функция $a(t)$ измерима по Лебегу и интегрируема на любом компактном подмножестве оси t, $\int_{t_0}^{+\infty} |a(s)| \, ds = +\infty$; Q — выпуклый строго выпуклый компакт с гладкой границей, $0 \in Q$.

Будем полагать, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества D вида

$$D = \left\{ y | y \in \mathbb{R}^k \quad (p_j, y) \leqslant \mu_j, \quad j = 1, \ldots, r \right\}, \tag{4.3}$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1, \ldots, \mu_l$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Пусть $T > t_0$ — произвольное число и σ — некоторое конечное разбиение отрезка $[t_0, T]$: $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Назовем *кусочно-программной стратегией* V убегающего E, заданной на $[t_0, T]$, соответствующей разбиению σ, семейство отображений b^l, $l = 0, 1, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l, x_1(\tau_l), \ldots, x_n(\tau_l), y(\tau_l)) \tag{4.4}$$

измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$, и такую, что $v_l(t) \in Q$, $y(t) \in D$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

О п р е д е л е н и е 4.2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c^l, $l = 0, 1, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам (4.4) и управлению $v_l(t)$ измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ и такую, что $u_l^i(t) \in Q$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

Пусть $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$. Обозначим данную игру $\Gamma = \Gamma(n, z^0, D)$.

О п р е д е л е н и е 4.3. В игре Γ возможно *уклонение от встречи,* если для любого числа $T > t_0$ существует разбиение σ интервала $[t_0, T]$, стратегия V убегающего E, соответствующая разбиению σ, такие, что для любых траекторий игроков P_i имеет место

$$x_i(t) - y(t) \notin M_i, \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $y(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E.

О п р е д е л е н и е 4.4. В игре Γ происходит *поимка,* если существует момент времени $T > t_0$ и для любого разбиения σ интервала $[t_0, T]$, любой траектории $y(t)$ игрока E существуют кусочно-программные контрстратегии U_i игроков P_i, соответствующие разбиению σ, существует момент $\tau \in [t_0, T]$ и номер $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что

$$x_m(\tau) - y(\tau) \in M_m,$$

где $x_m(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя P_m.

Вместо систем (4.1) и (4.2) будем рассматривать систему

$$\dot{z}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{4.5}$$

Введем функции λ_i следующим образом:

$$\lambda_i(v, m_i) = \max\{\lambda \,|\, v - \lambda(z_i^0 - m_i) \in Q, \ v \in Q\},$$
$$\lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\lambda_i^-(w, m_i) = \max\{\lambda \,|\, w - \lambda(z_i^0 - m_i) \in -Q, \ w \in -Q\},$$
$$\lambda_i^-(w) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(w, m_i), \ i = 1, \ldots, n.$$

Так как Q — выпуклый строго выпуклый компакт с гладкой границей, то функции λ_i непрерывны на Q, λ_i^- непрерывны на $-Q$ (см. [107]) и существуют

$$\delta(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v), \quad \delta^-(z^0) = \min_{w \in -Q} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i^-(w),$$

причем

$$\delta(z^0) = 0 \Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\bigcup_{i=1}^{n}(z_i^0 - M_i),$$
$$\delta(z^0) = 0 \Longleftrightarrow \delta^-(z^0) = 0.$$

Обозначим

$$A^{\pm}(t) = \{\tau \in [t_0, t] \mid \pm a(\tau) > 0\}, \qquad A^{\pm} = A^{\pm}(+\infty),$$
$$A^{0}(t) = \{\tau \in [t_0, t] \mid a(\tau) > 0\}, \qquad A^{0} = A^{0}(+\infty),$$
$$\alpha^{\pm}(t) = \int_{A^{\pm}(t)} |a(s)|\, ds.$$

Рассмотрим случай, когда $D = \mathbb{R}^k$, то есть на траекторию убегающего не наложено никаких фазовых ограничений.

Т е о р е м а 4.1. *В игре* $\Gamma(n, z^0, D)$ *происходит поимка тогда и только тогда, когда* $\delta(z^0) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из [107] следует, что функции $\lambda_i(v, m_i)$, $\lambda_i^-(w, m_i)$ непрерывны по совокупности переменных, а отображения $\mathcal{M}_i(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i(v, m_i) = \lambda_i(v)\}$ однозначны и непрерывны.

Зададим контрстратегии U_i преследователей P_i следующим образом:

$$u_l^i(t) = \begin{cases} v_l(t) - \lambda_i(v_l(t))\left(z_i^0 - \mathcal{M}_i(v_l(t))\right), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^+, \\ v_l(t), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^0, \\ v_l(t) + \lambda_i^-(-v_l(t))\left(z_i^0 - \mathcal{M}_i(-v_l(t))\right), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^-, \end{cases}$$

где $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{s+1} = T(z^0)\}$, V — произвольная стратегия убегающего E, соответствующая разбиению σ, $T(z^0)$ будет определено позже. Тогда для решения системы (4.5) справедливо представление

$$z_i(t) = z_i^0\Big(1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s))\, ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i^-(-v(s))\, ds\Big) +$$
$$+ \int_{A^+(t)} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s))\, ds + \int_{A^-(t)} |a(s)|\mathcal{M}_i(-v(s))\lambda_i^-(-v(s))\, ds.$$

Из определения величин $\delta(z^0)$, $\delta^-(z^0)$ получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s))\, ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i^-(-v(s))\, ds\Big) =$$
$$= n - \Big(\int_{A^+(t)} a(s)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v(s))\, ds + \int_{A^-(t)} |a(s)|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^-(-v(s))\, ds\Big) \leqslant$$
$$\leqslant n - \Big(\int_{A^+(t)} a(s)\max_{i=\overline{1,n}}\lambda_i(v(s))\, ds + \int_{A^-(t)} |a(s)|\max_{i=\overline{1,n}}\lambda_i^-(-v(s))\, ds\Big) \leqslant$$
$$\leqslant n - \Big(\int_{A^+(t)} a(s)\delta(z^0)\, ds + \int_{A^-(t)} |a(s)|\delta^-(z^0)\, ds\Big) \leqslant n - \min\{\delta(z^0), \delta^-(z^0)\}\int_{t_0}^{t} |a(s)|\, ds.$$

Поэтому не позже чем к $T(z^0) = t_0 + \min\Big\{t \Big| \int_{t_0}^{t} |a(s)|\, ds = \dfrac{n}{\min\{\delta(z^0), \delta^-(z^0)\}}\Big\}$ хотя бы одна из величин $1-\int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s))\,ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i^-(-v(s))\,ds$ обратится в нуль. Тогда

$$z_i(T(z^0)) = \int_{A^+(T(z^0))} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s))\,ds + \int_{A^-(T(z^0))} |a(s)|\mathcal{M}_i(-v(s))\lambda_i^-(-v(s))\,ds \in M_i.$$

Таким образом, хотя бы один из преследователей ловит к моменту $T(z^0)$ убегающего E.

Пусть теперь для позиции z_0 выполнено $\delta(z^0)=0$. Это означает, что существуют векторы $v_0, -w_0 \in Q$ такие, что $\lambda_i(v_0)=0$, $\lambda_i^-(w_0)=0$, $i=1,\ldots,n$, при этом w_0 можно выбрать таким, что $C(Q,-p_0)=(-w_0,-p_0)$, p_0 — единичный опорный вектор к Q в точке v_0. Зададим стратегию убегающего следующим образом: $\sigma=\{t_0,+\infty\}$,

$$v(t) = \begin{cases} v_0, & a(t)\geqslant 0,\\ -w_0, & a(t)<0. \end{cases}$$

Предположим, что в игре Γ происходит поимка. Тогда существует момент времени $T>t_0$, контрстратегии преследователей $U_1,\ldots,U_n$ такие, что $z_i(T)\in M_i$ при некотором $i\in\{1,\ldots,n\}$. Тогда для $z_i(T)$ справедливо представление

$$z_i(T) = z_i^0 + (u_1-v_0)\alpha^+(T) + (u_2-w_0)\alpha^-(T) = m_i \in M_i,$$

$$u_1 = \begin{cases} \dfrac{\int_{A^+(T)} a(s)u_i(s)\,ds}{\alpha^+(T)} \in Q, & \alpha^+(T)>0,\\ v_0, & \alpha^+(T)=0, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{\int_{A^-(T)} a(s)u_i(s)\,ds}{\alpha^-(T)} \in -Q, & \alpha^-(T)>0,\\ w_0, & \alpha^-(T)=0. \end{cases}$$

Перенесем z_i^0 в правую часть и умножим скалярно на p_0, получим

$$\alpha^+(T)(u_1-v_0,p_0) + \alpha^-(T)(w_0-u_2,-p_0) \leqslant 0 \leqslant (m_i - z_i^0, p_0),$$

причем одновременное равенство 0 левой и правой части невозможно. Значит, в игре Γ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана.

Будем теперь предполагать, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества D вида 4.3, Q — шар радиуса $R>0$ с центром в начале координат. Пусть

$$\delta_1(z^0) = \min_{v\in Q}\max_{s=1,\ldots,n+r}\lambda_s(v), \quad \delta_1^-(z^0) = \min_{v\in Q}\max_{s=1,\ldots,n+r}\lambda_s(-v).$$

Величина $\delta_1(z^0)=0$ в том и только том случае (см. [8]), когда

$$0\notin \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0-M_1,\ldots,z_n^0-M_n,p_1,\ldots,p_r\}.$$

Учитывая, что по определению $\delta_1(z^0)\geqslant 0$, получаем, что

$$\delta_1(z^0)>0 \Longleftrightarrow 0\in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0-M_1,\ldots,z_n^0-M_n,p_1,\ldots,p_r\}$$
$$\delta_1(z^0)>0 \Longleftrightarrow \delta_1^-(z^0)>0.$$

Т е о р е м а 4.2. *Если выполнено неравенство* $\left|\bigcup_{i=1}^n (z_i^0-M_i)\right| \geqslant k$, *то для того, чтобы в игре* Γ *происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\delta_1(z^0)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_1(z^0)>0$. Докажем, что в игре $\Gamma(n,z^0,D)$ происходит поимка.

1. Рассмотрим сначала случай $r = 1$. Пусть V — произвольная стратегия убегающего E, соответствующая некоторому разбиению $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{s+1} = T\}$ некоторого интервала $[t_0, T]$.

Зададим контрстратегии U_i преследователей P_i следующим образом:

$$u_l^i(t) = \begin{cases} v_l(t) - \lambda_i(v_l(t))\left(z_i^0 - \mathcal{M}_i(v_l(t))\right), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^+, \\ v_l(t), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^0, \\ v_l(t) + \lambda_i(-v_l(t))\left(z_i^0 - \mathcal{M}_i(-v_l(t))\right), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^-, \end{cases}$$

Так как стратегия V допустима, то $y(t) \in D$, $t \in [t_0, T]$. Это означает, что

$$(p_1, y(t)) = (p_1, y^0 + \int_{t_0}^t a(s)v(s)\,ds) = (p_1, y_0) + \int_{t_0}^t a(s)(p_1, v(s))\,ds \leqslant \mu_1.$$

Пусть $T_1^{\pm}(t)$ и $T_2^{\pm}(t)$ — подмножества интервала $[t_0, T]$ такие, что

$$\begin{aligned} T_1^+(t) =& \{\tau \in [t_0, t] \mid (p_1, v(\tau)) < \delta_1(z^0)\} \cap A^+(t), \\ T_2^+(t) =& \{\tau \in [t_0, t] \mid (p_1, v(\tau)) \geqslant \delta_1(z^0)\} \cap A^+(t), \\ T_1^-(t) =& \{\tau \in [t_0, t] \mid (p_1, -v(\tau)) < \delta_1(z^0)\} \cap A^-(t), \\ T_2^-(t) =& \{\tau \in [t_0, t] \mid (p_1, -v(\tau)) \geqslant \delta_1(z^0)\} \cap A^-(t), \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_0 = \mu_1 - (p_1, y^0) \geqslant& \int_{t_0}^t a(s)(p_1, v(s))\,ds = \\ &= \int_{T_1(t)} |a(s)|(p_1, v(s)\operatorname{sign} a(s))\,ds + \int_{T_2(t)} |a(s)|(p_1, v(s)\operatorname{sign} a(s))\,ds \geqslant \\ &\geqslant -R\int_{T_1(t)} |a(s)|\,ds + \delta_1(z^0)\left(\int_{t_0}^t |a(s)|\,ds - \int_{T_2(t)} |a(s)|\,ds\right). \end{aligned}$$

Получаем следующую оценку для $\int_{T_1(t)} |a(s)|\,ds$.

$$\int_{T_1(t)} |a(s)|\,ds \geqslant \frac{\delta_1^0 \int_{t_0}^t |a(s)|\,ds - \mu_0}{R + \delta_1^0} \qquad (\delta_1^0 = \delta_1(z^0)).$$

Из определения контрстратегий U_i и системы (4.5) получаем

$$\begin{aligned} z_i(t) = z_i^0\Big(1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s))\,ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i(-v(s))\,ds\Big) + \\ + \int_{A^+(t)} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s))\,ds + \int_{A^-(t)} |a(s)|\mathcal{M}_i(-v(s))\lambda_i(-v(s))\,ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции

$$f_i(t) = 1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s))\,ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i(-v(s))\,ds, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это непрерывные невозрастающие функции, $f_i(t_0) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^n f_i(t) = n - \int_{A^+(t)} a(s)\sum_{i=1}^n \lambda_i(v(s))\,ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\sum_{i=1}^n \lambda_i(-v(s))\,ds \leqslant$$

$$\leqslant n - \delta_1^0 \int_{T_1(t)} |a(s)|\, ds \leqslant n - \delta_1^0 \left(\frac{\delta_1^0 \int_{t_0}^t |a(s)|\, ds - \mu_0}{R + \delta_1^0} \right).$$

Из последнего неравенства следует, что существует момент времени T_0

$$T_0 \leqslant t_0 + \min\left\{ t \;\Big|\; \int_{t_0}^t |a(s)|\, ds = \frac{n(R + \delta_1^0) + \mu_0 \delta_1^0}{{\delta_1^0}^2} \right\},$$

такой, что одна из функций f_i обратится в 0 в момент T_0. Поэтому при $t = T_0$ будем иметь $f_i(T_0) = 0$ и

$$z_i(T_0) = \int_{A^+(T_0)} a(s) \mathcal{M}_i(v(s)) \lambda_i(v(s))\, ds + \int_{A^-(T_0)} |a(s)| \mathcal{M}_i(-v(s)) \lambda_i(-v(s))\, ds \in M_i.$$

Это и означает, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит поимка.

2. Пусть теперь $r > 1$. Так как $\delta_1^0 > 0$, то $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}$. Это означает, что существуют $b_1, \ldots, b_m \in \bigcup\limits_{i=1}^n (z_i^0 - M_i)$ такие, что векторы $b_1, \ldots, b_m, p_1, \ldots, p_r$ образуют положительный базис [57]. Можно считать, что $m \geqslant k$ и векторы $b_1, \ldots, b_k$ образуют базис $\mathbb{R}^k$. Так как $b_1, \ldots, b_m$, $p_1, \ldots, p_r$ — положительный базис, то существуют положительные числа

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m$$

такие, что

$$0 = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_m b_m.$$

Рассмотрим вектор $p_0 = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r$. Тогда векторы $b_1, \ldots, b_m, p_0$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим множество

$$D_1 = \{z \mid (z, p_0) \leqslant \mu_0\},$$

где $\mu_0 = \sum\limits_{i=1}^r \alpha_i \mu_i$. Тогда $D \subset D_1$. Если $p_0 \neq 0$, то в силу пункта 1 данной теоремы в игре $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$ происходит поимка. Если же $p_0 = 0$, то $D_1 = \mathbb{R}^k$ и в силу теоремы 4.1 в игре $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$ происходит поимка. Поэтому поимка произойдет и в игре $\Gamma(n, z^0, D)$.

Предположим, что $\delta_1^0 \leqslant 0$. Это означает, что существует такой вектор $v_0 \in Q$, что

$$\lambda_i(v_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$(p_j, v_0) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Зададим стратегию V убегающего E следующим образом:

$$\sigma = \{t_0, +\infty\}, \quad v(t) = \begin{cases} v_0, & a(t) \geqslant 0, \\ -v_0, & a(t) < 0. \end{cases}$$

Стратегия V допустима, так как

$$(p_j, y(t)) = (p_j, y^0) + \int_{t_0}^t a(s)(p_j, v(s))\, ds \leqslant \mu_j, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Предположим, что в игре Γ происходит поимка. Тогда существует момент времени $T > t_0$, контрстратегии преследователей $U_1, \ldots, U_n$ такие, что $z_i(T) \in M_i$ при некотором $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда, повторяя рассуждения из теоремы 4.1, приходим к невозможности включения $z_i(T) \in M_i$. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит уклонение от встречи. Теорема полностью доказана.

Приведем теперь два примера, показывающих, что, вообще говоря, только строгой выпуклости и гладкой границы множества $Q \ni 0$ недостаточно для эквивалентности

$$\delta(z^0) = 0 \Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{n} (z_i^0 - M_i),$$
$$\delta(z^0) = 0 \Longleftrightarrow \delta^-(z^0) = 0.$$

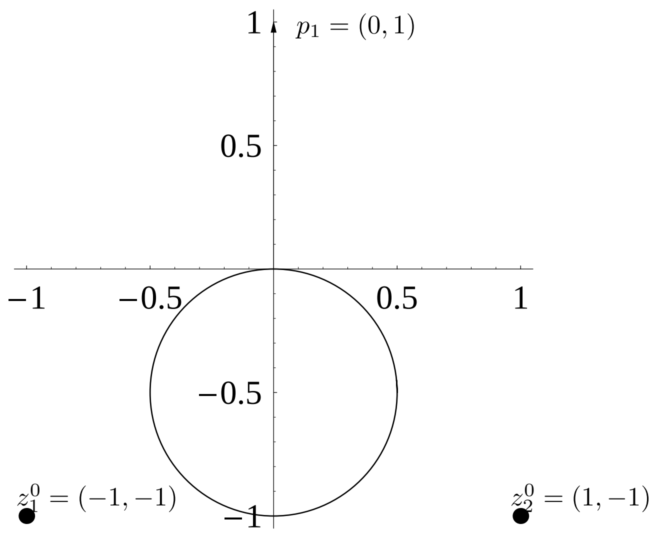

Рис. 1. К примеру 4.1.

П р и м е р 4.1. Пусть $k = 2$, Q — шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(0, -\frac{1}{2})$, $n = 2$, $r = 1$, $z_1^0 = (-1,-1)$, $z_2^0 = (1,-1)$, $p_1 = (0,1)$, $M_1 = M_2 = \{0\}$.

В этом случае $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, z_2^0 - M_2, p_1\}$, но $\delta_1(z^0) = 0$. Действительно, при $v_0 = 0$ $\lambda_3(v_0) = (p_1, v_0) = 0$, $\lambda_i(v_0) = \max\{\lambda \geqslant 0 | -\lambda z_i^0 \in Q - v_0\} = 0$, $i = 1, 2$.

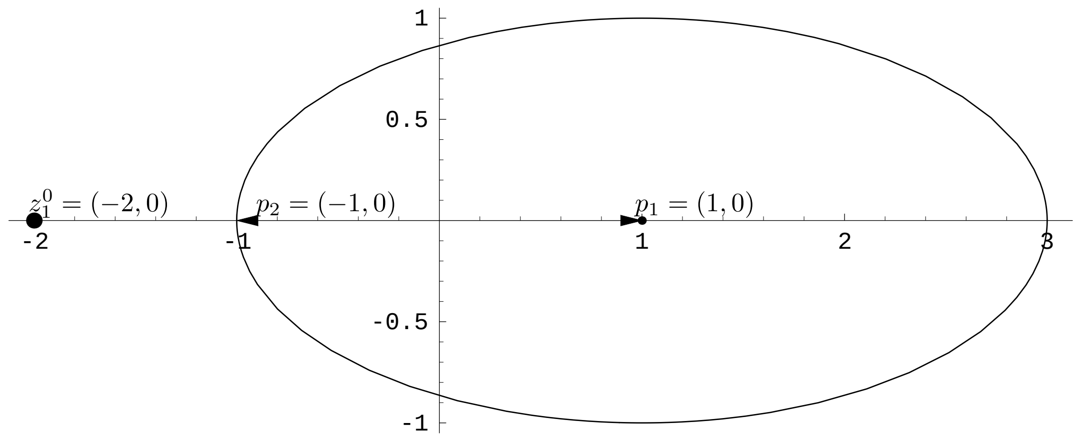

Рис. 2. К примеру 4.2.

П р и м е р 4.2. Пусть $k = 2$, $Q = \left\{(x,y) | \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 \leqslant 1\right\}$, $n = 1$, $r = 2$, $p_1 = (1,0)$, $p_2 = (-1,0)$, $z_1^0 = (-2,0)$, $M_1 = \{0\}$.

В этом случае $0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, p_1, p_2\}$, но $\delta_1(z^0) = \frac{1}{2} > 0$.

§ 5. Позиционная поимка одного убегающего группой преследователей

Рассматривается нестационарная задача простого преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего при равных динамических возможностях всех участников. Стационарный случай $a(t) \equiv 1$ задачи простого преследования рассматривался многими авторами [23, 77]. В этих работах одним из условий окончания игры было условие преимущества преследователей по ресурсам управления или же условие информационной дискриминации убегающего. Основываясь на процедуре управления с поводырём, предложенной Н. Н. Красовским [42, 92], А. А. Чикрий приводит позиционную процедуру управления для квазилинейной задачи преследования один на один [107]. В работе [115] этот подход развивается для игры со многими преследователями.

В данной работе показывается, что если преследование может быть завершено за конечное время в классе позиционных контрстратегий, то при информированности преследователей только о позиции игры, оно может быть закончено за то же самое время в сколь угодно малой окрестности терминального множества.

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$-го лица: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E. Законы движения каждого из преследователей P_i и убегающего E имеют вид:

$$\begin{array}{llll} P_i\colon & \dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), & x_i(t_0) = x_i^0, & u_i \in Q, \\ E\colon & \dot{y}(t) = a(t)v(t), & y(t_0) = y^0, & v \in Q, \end{array}$$

причём $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i \in N_n = \{1, \dots, n\}$, $M_i \subset \mathbb{R}^k$ — заданные выпуклые компакты, $a\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве полуоси $[t_0, +\infty)$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

Пусть $z_i(t) = x_i(t) - y(t)$, $i \in N_n$, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$. Тогда

$$\dot{z}_i(t) = a(t)\big(u_i(t) - v(t)\big), \quad z_i(t_0) = z_i^0. \tag{5.1}$$

Для каждой из систем (5.1) рассмотрим систему–поводыря [92]

$$\dot{w}_i(t) = a(t)\big(u_i(t) - v(t)\big), \quad w_i(t_0) = w_i^0, \quad u_i, v \in Q, \quad i \in N_n. \tag{5.2}$$

О п р е д е л е н и е 5.1. Будем говорить, что в игре Γ *происходит поимка* из заданной начальной позиции $z^0 = z(t_0)$, если существуют момент времени $T_0 = T(z^0)$, позиционные стратегии управления с поводырём $\mathcal{U}_i = (U_i, \psi_i, \chi_i)$ преследователей P_i, $i \in N_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in Q$, $t \in [t_0, T_0]$ существуют момент времени $\tau \in [t_0, T_0]$ и номер $s \in N_n$ такие, что имеет место включение $z_s(\tau) \in M_s$.

Здесь U_i — функция, которая будет формировать управление преследователя P_i в исходной системе (5.1)

$$U_i\colon [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to Q,$$

функция ψ_i есть переходная функция i-го поводыря

$$\psi_i\colon T_+^2 \times \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}^k \quad \Big(T_+^2 = \big\{ (t_1, t_2) \in [t_0, T_0]^2 \big| \, t_1 \leqslant t_2 \big\}\Big).$$

Значение переходной функции $\psi_i(t_1, t_2, z, w)$ — положение $w_i = w_i(t_2)$, в котором i-й поводырь окажется в заданный момент времени t_2 при условии, что в момент $t = t_1$ управляемая система и поводыри находились в точках $z = z(t_1)$ и $w = w(t_1)$ соответственно.

Третья функция χ_i ставит в соответствие позиции (t, z) положение поводыря $\chi_i(t, z) = w_i(t)$.

Введём функции λ_i следующим образом:

$$\lambda_i(v, m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) \in Q,\ v \in Q\},$$
$$\lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i),$$
$$\lambda_i^-(v, m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) \in -Q,\ v \in -Q\},$$
$$\lambda_i^-(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(v, m_i).$$
$$w^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0), \quad w_i^0 \notin M_i, \quad i \in N_n.$$

Так как Q — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то существуют

$$\delta(w^0) = \min_{v \in Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i(v) \geqslant 0, \quad \delta^-(w^0) = \min_{v \in -Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i^-(v) \geqslant 0,$$

причём $(\delta(w^0))^2 + (\delta^-(w^0))^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{Int} \operatorname{conv} \bigcup\limits_{i \in N_n} (w_i^0 - M_i)$.

Введём обозначения: $A^+(t) = \{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) > 0\}$, $A^-(t) = \{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) < 0\}$, $C(Q; h) = \max\limits_{q \in Q} \langle q, h \rangle$ — опорная функция компакта Q, $C'(Q; h)$ — градиент опорной функции, B^k — единичный шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в начале координат.

Т е о р е м а 5.1. *Пусть начальная позиция z^0 и функция $a(\cdot)$ таковы, что*

$$\widehat{T} = \widehat{T}(z^0) = \min \left\{ t \geqslant t_0 | \delta(z^0) \int_{A^+(t)} a(s)\, ds + \delta^-(z^0) \int_{A^-(t)} |a(s)|\, ds = n \right\} < +\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в игре Γ происходит поимка с терминальными множествами $M_i^\varepsilon = M_i + \varepsilon B^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве $T(z^0)$ возьмём $\widehat{T}(z^0)$ и определим функции χ_i, U_i следующим образом:

$$\chi_i(t, z) = z_i, \quad i \in N_n.$$
$$U_i(t, x, w) = \begin{cases} C'(Q, w - x), & \text{при } x \neq w \text{ и } a(t) > 0, \\ C'(Q, x - w), & \text{при } x \neq w \text{ и } a(t) < 0, \\ u_i^0 \in Q, & \text{при } x = w \text{ или } a(t) = 0. \end{cases}$$

где u_i^0 — произвольный фиксированный вектор из Q. Тогда для всех $(t, x, w) \in [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ будет выполнено

$$\langle x - w, a(t) U_i(t, x, w) \rangle = \min_{u \in Q} \langle x - w, a(t) u \rangle, \quad i \in N_n.$$

Для определения переходной функции поводыря рассмотрим стратегию $V^*(t, s_1, \ldots, s_n)$ фиктивного убегающего в системе (5.2)

$$V^* \colon [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^{nk} \to Q,$$
$$V^*(t, s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} C'(Q, -\sum\limits_{i \in N_n} s_i), & \text{при } \sum\limits_{i \in N_n} s_i \neq 0 \text{ и } a(t) > 0, \\ C'(Q, \sum\limits_{i \in N_n} s_i), & \text{при } \sum\limits_{i \in N_n} s_i \neq 0 \text{ и } a(t) < 0, \\ v^0 \in Q, & \text{при } \sum\limits_{i \in N_n} s_i = 0 \text{ или } a(t) = 0, \end{cases}$$

где v^0 — произвольный фиксированный вектор из Q, и контрстратегии фиктивных преследователей

$$U_i^*\bigl(t, w^0, v^*(t)\bigr) = \begin{cases} v^*(t) - \lambda_i(v^*(t))(w_i^0 - \mathcal{M}_i(v^*(t))), & a(t) > 0,\\ v^*(t), & a(t) = 0,\\ v^*(t) + \lambda_i^-(-v^*(t))(w_i^0 - \mathcal{M}_i^-(-v^*(t))), & a(t) < 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Здесь $v^*(t) = V^*(t, s_1, \ldots, s_n)$, $\mathcal{M}_i(v)$ и $\mathcal{M}_i^-(v)$ — измеримые по Борелю селекторы полунепрерывных сверху по включению компактных множеств

$$\mathfrak{M}_i(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i(v, m_i) = \lambda_i(v)\},$$
$$\mathfrak{M}_i^-(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i^-(v, m_i) = \lambda_i^-(v)\}$$

соответственно. Тогда для всех $(t, s_1, \ldots, s_n) \in [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^{nk}$ выполнено

$$\sum_{i \in N_n} \langle s_i, a(t) V^*(t, s_1, \ldots, s_n)\rangle = \min_{v \in Q} \sum_{i \in N_n} \langle s_i, a(t) v\rangle.$$

Переходные функции поводырей определяются теперь так:

$$\psi_i(t_1, t_2, z, w) = w_i + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\bigl(u_i^*(t) - v^*(t)\bigr)\, dt,$$
$$v^*(t) = V^*(t, z_1 - w_1, \ldots, z_n - w_n), \quad u_i^*(t) = U_i^*(t, w^0, v^*(t)),\ t \in [t_1, t_2].$$
$$z = (z_1, \ldots, z_n), \quad w = (w_1, \ldots, w_n).$$

Рассмотрим построение пошаговых движений $z_i(t)$ и $w_i(t)$, $t \in [t_0, T_0]$, в процедуре управления с поводырём, где начальное положение поводыря w^0 выбирается равным начальному положению z^0.

Выбираем некоторое разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{\ell+1}$ отрезка $[t_0, T_0]$: $t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{\ell+1} = T_0$. В начальный момент времени $t = t_0$ определим управления преследователей P_i, $i \in N_n$ на интервале $[\tau_0, \tau_1)$, полагая $u_i^0(t) = U_i(t, z_i^0, w_i^0)$, где $w_i^0 = z_i^0$ — начальное положение поводырей. Управление $v^*(t)$ убегающего в системе–поводыре (5.2) на $[\tau_0, \tau_1)$ полагаем равным $V^*(t, z_1^0 - w_1^0, \ldots, z_n^0 - w_n^0)$, а управления фиктивных преследователей, согласно (5.3), $u_i^*(t) = U_i^*(t, w^0, v^*(t))$.

Пусть $z_i(\tau_j)$ и $w_i(\tau_j)$ — положения, в которые пришли управляемые система (5.1) и система–поводырь (5.2) в момент $t = \tau_j$. Определяем движения $z_i(t)$, $w_i(t)$, полагая в системе (5.2) управление убегающего на $j+1$ шаге $v^*(t) = V^*\bigl(t, z_1(\tau_j) - w_1(\tau_j), \ldots, z_n(\tau_j) - w_n(\tau_j)\bigr)$, управления преследователей $u_i^*(t) = U_i^*(t, w^0, v^*(t))$, а управления преследователей P_i в системе (5.1) $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(\tau_j), w_i(\tau_j))$.

Таким образом, преследователи в системе (5.1) строят свои управления пошагово, зная на каждом шаге реальную позицию игры и позицию во вспомогательной системе–поводыре.

Указанные построения продолжаются до тех пор, пока один из поводырей не попадёт на своё терминальное множество. Такой момент времени $\tau = \tau^0(w(\cdot)) \in [t_0, T_0]$ и номер $i_0 \in N_n$, что $w_{i_0}(\tau) \in M_{i_0}$ обязательно найдутся в силу условий теоремы и способов построения управлений в системе–поводыре (5.2) (см. [10, с. 47]).

Однако удобнее будет продолжить движения $z_i(t)$, $w_i(t)$ до момента времени $t = T_0$, формально полагая, что на промежутках вида $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, где $\tau_j > \tau^0(w(\cdot))$, в качестве движения поводырей выбираются решения уравнений (5.2), в которых $v^*(t) = V^*(t, z_1(\tau_j) - w_1(\tau_j), \ldots, z_n(\tau_j) - w_n(\tau_j))$, а $u_i^*(t) = u_i^* \in Q$ — произвольные постоянные управления. При этом в системе (5.1) по-прежнему выбираются управления преследователей $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(\tau_j), w_i(\tau_j))$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$.

Оценим теперь расстояние между движениями поводырей и соответствующими движениями систем (5.1).

Введём обозначения

$$g(t) = \begin{cases} |a(t)|, & t \in [t_0, T_0], \\ 0, & t \in [T_0, 2T_0 - t_0], \end{cases}, \ A(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds, \ t \in [T_0, 2T_0 - t_0],$$

$$h(t,\delta) = A(t+\delta) - A(t) = \int_t^{t+\delta} g(s)\,ds, \quad (t,\delta) \in [t_0, T_0] \times [0, T_0 - t_0],$$

$$f(\delta) = \max_{t \in [t_0, T_0]} h(t,\delta), \quad \delta \in [0, T_0 - t_0].$$

Тогда для любого решения уравнения

$$\dot{x}(t) = a(t)\big(u(t) - v(t)\big), \quad u, v \in Q, \quad t \in [t_0, T_0]$$

с любым начальным условием $x(t_0) = x_0$ выполнено

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leqslant \Big| \int_{t_1}^{t_2} |a(t)| \|u(t) - v(t)\|\,dt \Big| \leqslant 2Rf(\delta),$$
$$|t_1 - t_2| \leqslant \delta, \quad t_1, t_2 \in [t_0, T_0],$$

где $R = \max\limits_{q \in Q} \|q\|$ — модуль компакта Q.

Поэтому для любых реализовавшихся движений в (5.1) и (5.2)

$$\max_{i \in N_n} \|z_i(t_1) - z_i(t_2)\| \leqslant 2Rf(\delta), \quad \max_{i \in N_n} \|w_i(t_1) - w_i(t_2)\| \leqslant 2Rf(\delta),$$

как только $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$, причём $f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть $s_i(t) = z_i(t) - w_i(t)$, $i \in N_n$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$, $t_* \in [t_0, T_0)$, $\delta \in (0, T_0 - t_*]$. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d\|s_i(t)\|^2}{dt} &= 2\Big\langle s_i(t), a(t)\big(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)\big)\Big\rangle = \\
&= 2\Big\langle s_i(t_*) + s_i(t) - s_i(t_*), a(t)\big(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)\big)\Big\rangle = \\
&= 2\bigg(\Big\langle s_i(t_*), a(t)\big(u_i^0(t) - u_i^*(t)\big)\Big\rangle + \Big\langle s_i(t_*), a(t)\big(v^*(t) - v(t)\big)\Big\rangle + \\
&\quad + \Big\langle s_i(t) - s_i(t_*), a(t)\big(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)\big)\Big\rangle\bigg) \leqslant \\
&\leqslant 2\bigg(4Rf(\delta) \cdot 4R|a(t)| + \Big\langle s_i(t_*), a(t)\big(v^*(t) - v(t)\big)\Big\rangle\bigg),
\end{aligned}$$

если $v^*(t) = V^*(t, s_1(t_*), \ldots, s_n(t_*))$, $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(t_*), w_i(t_*))$, а управления $u_i^*(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — произвольные допустимые управления.

Поэтому

$$\sum_{i \in N_n} \frac{d\|s_i(t)\|^2}{dt} \leqslant 2 \sum_{i \in N_n} \langle s_i(t_*), a(t)(v^*(t) - v(t)) \rangle + 32nR^2 f(\delta)|a(t)| \leqslant |a(t)|\zeta(\delta),$$

где $\zeta(\delta) = 32nR^2 f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Значит,

$$\max_{t \in [t_*, t_* + \delta]} \max_{i \in N_n} \|s_i(t)\|^2 \leqslant \sum_{i \in N_n} \|s_i(t_*)\|^2 + \zeta(\delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} |a(\tau)|\,d\tau.$$

Так как $\sum\limits_{i\in N_n} \|s_i(t_0)\|^2 = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\max_{t\in[t_0,T_0]} \max_{i\in N_n} \|s_i(t)\|^2 \leqslant \zeta(\delta) \int_{t_0}^{T_0} |a(\tau)|\, d\tau \leqslant \varepsilon^2, \tag{5.4}$$

как только будет выбрано разбиение с диаметром, не превосходящим δ, а δ подобрано из условия $\zeta(\delta) \leqslant \dfrac{\varepsilon^2}{\displaystyle\int_{t_0}^{T_0} |a(\tau)|\, d\tau}$.

В силу оценки (5.4) как только $w_{i_0}(\tau) \in M_{i_0}$, это будет означать, что преследователь P_{i_0} находится в ε-окрестности множества M_{i_0}, то есть в дифференциальной игре Γ происходит поимка, где в качестве терминальных множеств взяты множества $M_i^\varepsilon = M_i + \varepsilon B^k$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 5.2. Вышеуказанный подход можно применять и в случае, когда необходимо завершить игру Γ в точности на терминальном множестве. В случае, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $i \in N_n$ $\widetilde{M}_i = M_i \overset{*}{-} \varepsilon B^k \neq \varnothing$, можно рассмотреть игру с терминальными множествами $\widetilde{M}_i$. Тогда попадание одного из поводырей на $\widetilde{M}_{i_0}$ гарантирует поимку в игре с исходными множествами M_i.

§ 6. Уклонение от группы нестационарных инерционных объектов

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$-го лица: n преследователей и одного убегающего. Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$, имеет вид:

$$\ddot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad u_i \in U.$$

Закон движения убегающего E имеет вид:

$$\ddot{y}(t) = a(t)v(t), \quad v \in U,$$

причём в начальный момент $x_i(t_0) = x_i^0$, $\dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i^0$,

$$y(t_0) = y^0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}^0, \quad x_i^0 \neq y^0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь x_i, y, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{Int} U$; $a(t)$ — ограниченная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t, $a(t) \neq 0$ почти всюду на $[t_0, +\infty)$. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v(t)$, принимающие при $t \geqslant t_0$ значения из множества U.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n, z(t_0))$, где

$$z(t) = (z_1(t), \dot{z}_1(t), \ldots, z_n(t), \dot{z}_n(t)), \quad z_i(t) = x_i(t) - y(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

О п р е д е л е н и е 6.1. *Позиционной контрстратегией* V убегающего E назовем измеримое отображение

$$[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^{2nk} \times U^n \to U.$$

Тогда при заданных управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$ стратегия V определяет управление $v(t) = V(t, z(t), u_1(t), \ldots, u_n(t))$, которое будет измеримой функцией.

О п р е д е л е н и е 6.2. В дифференциальной игре $\Gamma(n, z(t_0))$ из начального состояния $z(t_0)$ *разрешима локальная задача уклонения*, если для любых измеримых функций

$$u_i(t), \quad t \geqslant t_0, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \ldots, n,$$

существует стратегия V убегающего E такая, что $z_i(t) \neq 0$ для всех $t \geqslant t_0$, $i = 1, \ldots, n$.

Считаем, что управления преследователей формируются на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры.

Т е о р е м а 6.1. *Если* $0 \notin \operatorname{co}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \dot{z}_i^0\right\}$, *тогда в игре* $\Gamma(n, z(t_0))$ *из начального состояния* $z(t_0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 \notin \operatorname{co}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \dot{z}_i^0\right\}$. На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существует единичный вектор p и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\max_{i=1,\ldots,n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant -2\varepsilon. \tag{6.1}$$

Обозначим

$$\eta(t) = \min_{i=1,\ldots,n} \|z_i(t)\|, \tag{6.2}$$

$$\delta = \min\{1, \varepsilon, \sqrt{\eta(t_0)}\}. \tag{6.3}$$

1. Пусть $\max\limits_{1,\ldots,n}(z_i^0, p) \leqslant 0$. Положим

$$v(t) = v_p(t) = \begin{cases} v_p, & a(t) > 0, \\ v_{-p}, & a(t) < 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

где $v_p, v_{-p} \in U$ — такие, что $(v_p, p) = C(U, p)$, $(v_{-p}, -p) = C(U, -p)$. Тогда для любого индекса $i = 1, \ldots, n$

$$(z_i(t), p) \;=\; (z_i^0, p) + (t - t_0)(\dot{z}_i^0, p) + \int_{t_0}^{t} (t - s)a(s)(u_i(s) - v_p(t), p)\, ds \;\leqslant\; -2\varepsilon(t - t_0) \;<\; 0$$

при $t > t_0$, откуда следует возможность уклонения из начального состояния $z(t_0)$.

2. Предположим, что $(z_1^0, p) > 0$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого индекса i, $i \in \{2, \ldots, n\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи уклонения для такого начального состояния $z(t_0)$. Пусть $K = \min\{1, \frac{1}{|U|c}\}$, $\tau_1 = K\frac{\delta}{4}$, $\delta_1 = K\frac{\delta^2}{4} < \eta(t_0)$. Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad t \in [t_0, +\infty)\backslash[t_1, t_1 + \delta_1),$$

где t_1 — либо первый момент, в который впервые выполняется равенство $\|z_1(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_1(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$, и если $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$, управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом.

При так выбранном управлении убегающего преследователь P_i не влияет на ход игры ($i \in \{2, \ldots, n\}$). Действительно, при любых управлениях $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$,

$$(\dot{z}_i(t), p) = (\dot{z}_i(t_0), p) + \int_{t_0}^{t} a(s)\big((u_i(s), p) - (v(s), p)\big) \leqslant -2\delta + 2c|U|\tau_1 < -\delta, \quad t \geqslant t_0. \tag{6.5}$$

Поэтому

$$(z_i(t), p) = (z_i(t_0), p) + \int_{t_0}^{t} (\dot{z}_i(s), p)\, ds < (z_i(t_0), p) \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0, \quad i \neq 1. \tag{6.6}$$

Значит, при $t \geqslant t_0$ $\|z_i(t)\| \neq 0$, $i \neq 1$.

Заметим также, что $\|z_1(t_1)\| = \delta_1$, поэтому при любых управлениях $u_1(t)$ и $v(t)$ на отрезке $[t_1, t_1 + \tau_1]$

$$(z_1(t_1 + \tau_1), p) = (z_1(t_1), p) + \int_{t_1}^{t_1+\tau_1} (\dot{z}_1(s), p)\, ds < \delta_1 - \delta\tau_1 = 0. \tag{6.7}$$

Следовательно, в момент $t = t_1 + \tau_1$ состояние дифференциальной игры соответствует рассмотренному выше случаю 1:

$$(\dot{z}_i(t_1+\tau_1),p) < -\delta,$$
$$(z_i(t_1+\tau_1),p) < 0, \quad i=1,\dots,n.$$

Таким образом, если по любому управлению $u_1(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s \in [t_1, t_1+\tau_1)$, такое, что $\|z_1(t)\| \neq 0$ при всех $t \in [t_1, t_1+\tau_1]$, то разрешимость локальной задачи уклонения для начального состояния $z(t_0)$ в случае 2 будет доказана.

Предположим, что

$$(z_1(t_1), \dot{z}_1(t_1)) = -\|z_1(t_1)\|\|\dot{z}_1(t_1)\|. \tag{6.8}$$

Векторы $z_1(t_1)$ и $\dot{z}_1(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует единичный вектор ψ такой, что

$$(\psi, z_1(t_1)) = (\psi, \dot{z}_1(t_1)) = 0. \tag{6.9}$$

Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \tau_1)$ — некоторое число, такое, что при произвольных $u_1(s)$, $v(s)$, $s \in [t_1, t_1+\varepsilon_1]$, справедливо неравенство $(z_1(s), p) > 0$. На отрезке $[t_1, t_1+\varepsilon_1]$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(\psi, v(s)) = \begin{cases} C(U,\psi), & (\psi, u_1(s)) \leqslant 0, \\ -C(U,-\psi), & (\psi, u_1(s)) > 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

Покажем, что существует $\gamma_1 \in (0, \varepsilon_1)$, такое, что

$$(z_1(t_1+\gamma_1), \dot{z}_1(t_1+\gamma_1)) \neq -\|z_1(t_1+\gamma_1)\|\|\dot{z}_1(t_1+\gamma_1)\|. \tag{6.11}$$

При $t \geqslant t_1$ рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (\psi, z_1(t)) = \int_{t_1}^{t} (t-s)a(s)(\psi, u_1(s)-v(s))\,ds, \\ f_2(t) &= (\psi, \dot{z}_1(t)) = \int_{t_1}^{t} a(s)(\psi, u_1(s)-v(s))\,ds. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_1+\varepsilon_1$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{f}_1(t) &= f_2(t), \\ \dot{f}_2(t) &= a(t)(\psi, u_1(t)-v(t)), \end{aligned} \tag{6.13}$$

причем $f_1(t_1) = f_2(t_2) = 0$.

Так как $0 \in \operatorname{Int} U$, то $C(U,q) > 0$ при любом $q \neq 0$. Поэтому $|a(t)(\psi, u_1(t)-v(t))| > 0$ почти всюду на $[t_1, t_1+\varepsilon_1]$, и $f_2(t) \not\equiv 0$ на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [t_1, t_1+\varepsilon_1]$, $t_1 < \alpha < \beta$. Значит, множество

$$G = \{t \in (t_1, t_1+\varepsilon_1) | f_2(t) \neq 0\}$$

есть непустое открытое множество. Поэтому

$$G = \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j),$$

где $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ — взаимно непересекающаяся, не более чем счетная система интервалов.

Пусть $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$ — некоторый интервал из этой системы. Тогда

$$f_2(\alpha_{j_0}) = f_2(\beta_{j_0}) = 0, \quad \dot{f}_2(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}).$$

Если $f_1(\alpha_{j_0}) \neq 0$, то соотношение (6.11) выполнено при $t_1+\gamma_1 = \alpha_{j_0}$. Если же $f_1(\alpha_{j_0}) = 0$, тогда

$$\dot{f}_1(t) = f_2(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}).$$

Поэтому $f_1(t)f_2(t) > 0$ на $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$. Значит, при $t_1 + \gamma_1 = \tau$, где τ — некоторое произвольно выбранное число из интервала $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$, имеет место соотношение (6.11).

Итак, управление $v(s)$ при $s \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1]$ выбирается в соответствии с правилом (6.10). Тогда

$$\|z_1(t)\| \neq 0, \quad t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1],$$

и в некоторый момент $t = t_1 + \gamma_1$ будет выполнено соотношение (6.11).

Если

$$(z_1(t_1), \dot{z}_1(t_1) \neq -\|z_1(t_1)\|\|\dot{z}_1(t_1)\|, \tag{6.14}$$

то полагаем $\gamma_1 = 0$. Заметим, что

$$(z_1(t_1 + \gamma_1), p) > 0, \quad (\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1), p) < -\delta,$$

поэтому из неравенства (6.11) следует линейная независимость векторов $z_1(t_1+\gamma_1)$ и $\dot{z}_1(t_1+\gamma_1)$. Далее при всех $s \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1)$ положим $v(s) = u_1(s)$. Тогда

$$z_1(t) = z_1(t_1 + \gamma_1) + (t - t_1 - \gamma_1)\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1) \tag{6.15}$$

при каждом значении $t_1 + \gamma_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1$, следовательно, $\|z_1(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1]$.

Таким образом, по любой измеримой функции $u_1(s) \in U$ можно построить такую измеримую функцию

$$v(s) = V(s, z(s), u_1(s), \ldots, u_n(s)), \quad v(s) \in U, \quad s \in [t_1, t_1 + \tau_1),$$

что $\|z_1(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$. Разрешимость локальной задачи уклонения в случае 2 доказана.

3. Пусть $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in I' = \{1, \ldots, s\}$, $s \leqslant n$, и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для $i \in \{1, \ldots, n\} \backslash I'$. В процессе построения маневра уклонения определим такие числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, N_1$, $N_1 \leqslant s$, что

$$\tau_j > \tau_{j+1}, \quad \delta_j > \delta_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, N_1 - 1,$$

причем если в момент $t' > t_0$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, s\}$ выполняется равенство $\|z_i(t')\| = \delta_j$ и $(z_i(t'), p) > 0$, то $(z_i(t' + \tau_j), p) < 0$ для любых управлений $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$.

Момент времени $t_i > t_0$, когда впервые выполняется равенство $\eta(t) = \delta_i$ и существует номер $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ такой, что

$$\|z_\ell(t_i)\| = \delta_i, \quad (z_\ell(t_i), p) > 0,$$

назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходит их сближение с убегающим.

Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad t \in [t_0, +\infty) \backslash T, \quad T = \bigcup_{i=1,\ldots,N_1} [t_i, t_i + \tau_i). \tag{6.16}$$

При $t = t_0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = K\frac{\delta}{2^{i+1}}, \quad \delta_1^i = \delta\tau_1^i = K\frac{\delta^2}{2^{i+1}}. \tag{6.17}$$

Числа τ_i будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, N_1$, поэтому

$$\sum_{i=1,\ldots,N_1} \tau_i < \xi_1 = K\frac{\delta}{2} \leqslant \frac{\delta}{2|U|c}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на $[t_0, t]$ и $v(s)$ на $[t_0, t] \cap T$ справедливы неравенства

$$(\dot z_i(t),p)=(\dot z_i^0,p)+\int_{[t_0,t]\cap T}a(s)(u_i(s)-v(s),p)\,ds+\int_{[t_0,t]\setminus T}a(s)(u_i(s)-v_p(t),p)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant-2\delta+2|U|c\mu(T)<-2\delta+2|U|c\xi_1\leqslant-\delta,\quad t\in[t_0,+\infty),\quad i=1,\dots,n.\quad(6.18)$$

Поэтому $(z_i(t'+\tau),p)=(z_i(t'),p)+\int_{t'}^{t'+\tau}(\dot z_i(s),p)\,ds<(z_i(t'),p)$, $t'\geqslant t_0$, $\tau>0$. Это означает, что сближение с преследователем $i\in\{1,\dots,n\}\setminus I'$ не наступит. Не ограничивая общности, считаем далее, что $N_1=n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем.

Заметим также, если в момент $t=t'$ для некоторого $i\in\{1,\dots,n\}$ выполняются соотношения

$$\|z_i(t')\|=\delta_1^i,\quad (z_i(t'),p)>0,$$

то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$ получаем

$$(z_i(t'+\tau_i^i),p)=(z_i(t'),p)+\int_{t'}^{t'+\tau_1^i}(\dot z_i(s),p)\,ds<\delta_1^i-\delta\tau_1^i=0.\quad(6.19)$$

Положим $\tau_1=\tau_1^1$, $\delta_1=\delta_1^1$. Тогда $t_1>t_0$. Маневр уклонения определим реккурентным образом. Итак, пусть в момент $t=t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\|=\delta_i$, $(z_i(t_i),p)>0$, определены число τ_i и монотонно убывающие последовательности положительных чисел $\{\tau_i^\ell\}_{\ell=i}^\infty$, $\{\delta_i^\ell\}_{\ell=i}^\infty$.

Допустим, что $(z_i(t_i),\dot z_i(t_i))=-\|z_i(t_i)\|\|\dot z_i(t_i)\|$. Существует число $\varepsilon_i\in(0,\tau_i)$ такое, что при произвольных $u_\ell(s)$, $\ell=1,\dots,n$, $v(s)$, $s\in[t_i,t_i+\varepsilon_i]$, справедливы неравенства

$$\min_{\tau\in[0,\varepsilon_i]}\|z_\ell(t_i+\tau)\|>\delta_i^{i+1},\quad (z_i(s),p)>0.\quad(6.20)$$

Векторы $z_i(t_i)$, $\dot z_i(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует единичный вектор ψ_i такой, что

$$(\psi_i,z_i(t_i))=(\psi_i,\dot z_i(t_i))=0.$$

На отрезке $[t_i,t_i+\varepsilon_i]$ управление $v_(s)$ выбираем так, чтобы

$$(\psi_i,v(s))=\begin{cases}C(U,\psi_i), & (\psi_i,u_i(s))\leqslant0,\\ -C(U,-\psi_i), & (\psi_i,u_i(s))>0.\end{cases}\quad(6.21)$$

Тогда существует число $\gamma_i\in(0,\varepsilon_i)$ такое, что

$$(z_i(t_i+\gamma_i),\dot z_i(t_i+\gamma_i))\neq-\|z_i(t_i+\gamma_i)\|\|\dot z_i(t_i+\gamma_i)\|.$$

Из (6.20) и неравенства $(\dot z_i(t_i+\gamma_i),p)<-\delta$ следует линейная независимость векторов $z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$. Если же

$$(z_i(t_i),\dot z_i(t_i))\neq-\|z_i(t_i)\|\|\dot z_i(t_i)\|,$$

то полагаем $\gamma_i=0$.

Следуя рассуждениям, проведенным в случае 2, управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако если $i<n$, то на $[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)$ возможны сближения с преследователями $i+1,\dots,n$. Поэтому

$$v(s)=u_i(s),\quad s\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)\setminus\bigcup_{j=i+1,\dots,n}[t_j,t_j+\tau_j),$$

если $i<n$, и

$$v(s)=u_n(s),\quad [t_n+\gamma_n,t_n+\tau_n).$$

Предположим, что $i < n$ и $t_\ell \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$, $\ell = i+1, \ldots, n$. Убегающий будет сближаться с преследователями $P_{i+1}, \ldots, P_n$ настолько близко и обходить их за столь малое время, чтобы для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i+\tau), \dot z_i(t_i+\tau)) \neq -\|z_i(t_i+\tau)\|\|\dot z_i(t_i+\tau)\|, \quad \tau \in [\gamma_i, \tau_i], \tag{6.22}$$

$$\min_{t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]} \|z_i(t)\| \geqslant \alpha_i, \tag{6.23}$$

$$\alpha_i > \delta_{i+1}. \tag{6.24}$$

Из (6.24) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза.

Обозначим через $H_i(t_i+\gamma_i+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^1$, прямую, проходящую через точки $z_i(t_i+\gamma_i) + \tau\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$. На основании линейной независимости векторов $z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ заключаем, что при любом τ векторы $z_i(t_i+\gamma_i)+\tau\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ линейно независимы. Поэтому для любого τ

$$f(\tau) = \min_{x\in H_i(t_i+\gamma_i+\tau)} \|x\| > 0 \tag{6.25}$$

$$\Bigl(f(\tau) = \frac{\bigl\|\bigl((1-\tau)\|b\|^2-(a,b)\bigr)\bigl(a+(\tau-1)b\bigr)+\|a+b\|^2 b\bigr\|}{\|a+b\|^2}, \quad a = z_i(t_i+\gamma_i), \quad b = \dot z_i(t_i+\gamma_i)\Bigr).$$

Кроме того, функция $f(\tau)$ непрерывна. В момент $t = t_i+\gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min_{\tau\in[0,\tau_i-\gamma_i]} f(\tau). \tag{6.26}$$

Если $v(s) = u_i(s)$ при $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, то соответствующая траектория

$$z_i^\circ t = z_i(t_i+\gamma_i) + (t-t_i-\gamma_i)\dot z_i(t_i+\gamma_i)$$

и

$$\dot z_i^\circ(t) = \dot z_i(t_i+\gamma_i), \quad t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i].$$

Ясно, что для любого $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$

$$\|z_i^\circ(t)\| \geqslant \beta_i, \quad \|\dot z_i^\circ(t)\| \geqslant \beta_i. \tag{6.27}$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i+\gamma_i, t_i+\gamma_i)$ задана такая конечная система полуинтервалов $[t^r, t^r+\tau^r)$, $r = 1, \ldots, \ell$, $\ell \geqslant 1$, что

$$\mu(\bigcup_{r=1,\ldots,l} [t^r, t^r+\tau^r)) < \xi_{i+1}, \tag{6.28}$$

$$\xi_{i+1} = \min\left\{\sqrt{\tau_i^2 + \frac{\beta_i}{2|U|c}} - \tau_i, K\frac{\beta_i}{4}\right\}. \tag{6.29}$$

Покажем, что если

$$v(s) = u_i(s), \quad s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup_{r=1,\ldots,\ell} [t^r, t^r+\tau^r),$$

управление $v(s)$ на множестве $\bigcup\limits_{r=1,\ldots,\ell} [t^r, t^r+\tau^r)$ и управление $u_i(s)$ на отрезке $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ выбирается произвольным образом, то соответствующая траектория $z_i^l(t)$, $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, такова, что

$$\|z_i^\ell(t) - z_i^\circ(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \tag{6.30}$$

$$\|\dot z_i^\ell(t) - \dot z_i^\circ(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2}, \tag{6.31}$$

Пусть $\ell = 1$. Понятно, что

$$z_i^1(t^1) = z_i^\circ(t^1), \quad \|z_i^1(t^1+\tau^1) - z_i^\circ(t^1+\tau^1)\| \leqslant |U|c(\tau^1)^2$$

и при $t^1 + \tau^1 < t \leqslant t_i + \tau_i$

$$\|z_i^1(t) - z_i^\circ(t)\| \leqslant |U|c((\tau^1)^2 + 2\tau^1(\tau_i - \tau^1)) < |U|c((\tau^1)^2 + 2\tau^1\tau_i).$$

Поэтому для любого $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$

$$\|z_i^1(t) - z_i^\circ(t)\| < |U|c((\tau^1)^2 + 2\tau^1\tau_i) < |U|c(\xi_{i+1}^2 + 2\xi_{i+1}\tau_i).$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для $\ell \in \mathbb{N}$, $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$

$$\|z_i^\ell(t) - z_i^\circ(t)\| < |U|c(\xi_{i+1}^2 + 2\xi_{i+1}\tau_i) \leqslant \frac{\beta_i}{2} \tag{6.32}$$

в силу соотношений (6.28), (6.29).

Таким образом, неравенство (6.30) доказано. Неравенство (6.31) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^\ell(t_i+\tau), \dot z_i^\ell(t_i+\tau)) \neq -\|z_i^\ell(t_i+\tau)\|\|\dot z_i^\ell(t_i+\tau)\|. \tag{6.33}$$

Предположим противное: существуют

$$\tau_0 \in [\gamma_i, \tau_i], \quad q \in \mathbb{R}^1, \quad q > 0,$$

такие, что $z_i^\ell(t_i+\tau_0) = -q\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0)$. В силу неравенств (6.30), (6.31) получаем, что

$$\min_{t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i} \|z_i^\ell(t)\| \geqslant \frac{\beta_i}{2}, \tag{6.34}$$

$$z_i^\circ(t_i+\tau_0) \in z_i^\ell(t_i+\tau_0) + \frac{\beta_i}{2}S, \quad \dot z_i^\circ(t_i+\tau_0) \in \dot z_i^\ell(t_i+\tau_0) + \frac{\beta_i}{2}S, \tag{6.35}$$

то есть векторы $z_i^\circ(t_i+\tau_0)$, $\dot z_i^\circ(t_i+\tau_0)$ представимы в виде

$$z_i^\circ(t_i+\tau_0) = z_i^\ell(t_i+\tau_0) + x, \quad \dot z_i^\circ(t_i+\tau_0) = \dot z_i^\ell(t_i+\tau_0) + y,$$

где x, $y \in \frac{\beta_i}{2}S$, $S \subset \mathbb{R}^n$ —шар радиуса 1 с центром в нуле. Пусть

$$\Sigma = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 | \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Согласно (6.26),

$$\min_{\alpha\in\Sigma} \|\alpha_1(z_i^\ell(t_i+\tau_0) + x) + \alpha_2(\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0) + y)\| \geqslant \beta_i.$$

С другой стороны, при $\alpha_1^* = \frac{1}{1+q}$, $\alpha_2^* = \frac{q}{1+q}$

$$\|\alpha_1^*(z_i^\ell(t_i+\tau_0) + x) + \alpha_2^*(\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0) + y)\| = \|\alpha_1^* x + \alpha_2^* y\| \leqslant \frac{\beta_i}{2}.$$

Следовательно, неравенство (6.33) выполнено для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$.

В момент времени $t = t_i + \gamma_i$ по ξ_{i+1} определим последовательность $\{\tau_{i+1}^{\ell}\}_{\ell=i+1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+1} = \min\{\tau_i^{i+1}, \frac{\xi_{i+1}}{2}\}, \quad \tau_{i+1}^{i+k} = \frac{\tau_{i+1}^{i+1}}{2^{k-1}}, \quad k \geqslant 2.$$

Понятно, что

$$\sum_{k=1}^{n-i} \tau_{i+1}^{i+k} < \xi_{i+1}.$$

По этой последовательности строим последовательность $\{\delta_{i+1}^{i+k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \delta_{i+1}^{i+k} = \delta\tau_{i+1}^{i+k}$.

Положим $\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}, \tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}$. Нетрудно видеть, что верны неравенства $\delta_{i+1} \leqslant \tau_{i+1}^{i+1} \leqslant \frac{\beta_i}{8}$. Учитывая (6.34), убеждаемся в справедливости неравенств (6.23), (6.24).

Итак, управление $v(s)$ при $s \in [t_i, t_i + \gamma_i]$ выбираем из соотношений (6.21) и

$$v(s) = u_i(s), \quad s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{p=i+1,\ldots,n} [t_p, t_p + \tau_p),$$

если $i < n$,

$$v(s) = u_n(s), \quad s \in [t_n + \gamma_n, t_n + \tau_n).$$

Тогда $\|z_i(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ и $(z_i(t), p) < 0$ при $t \geqslant t_i + \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Отметим, что сближения преследователей с убегающим могут наступать не позже момента

$$t_0 + \frac{\max\limits_{i=1,\ldots,n} (z_i^0, p)}{\delta}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Азамов А.О. О задаче убегания по заданной кривой // Прикладная математика и механика. 1982. Вып. 4. С. 694–697.

2. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2006. Т. 34. С. 26–28.

3. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 39-й Всерос. молодеж. конф., 28 янв.–1 фев. 2008 г. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. С. 221–223.

4. Банников А.С., Петров Н.Н., Сахаров Д.В. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов // Актуальные проблемы теории устойчивости и управления: тез. докл. междунар. конф., 21–26 сент. 2009 г. Екатеринбург. С. 29–30.

5. Банников А.С. Об одной задаче группового преследования // Динамические системы, управление и наномеханика: тез. докл. Всерос. конф., 24–28 июня 2009 г. Ижевск: РХД, 2009. С. 31.

6. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 29–34.

7. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Известия вузов. Математика. 2009. № 5. С. 3–12.

8. Банников А.С. Об одной задаче группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 3–11.

9. Банников А.С. Групповое преследование одного убегающего с фазовыми ограничениями // Проблемы теоретической и прикладной математики: тез. 41-й Всерос. молодеж. конф., 31 янв.–5 февр. 2010 г. Екатеринбург. С. 315–318.

10. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

11. Банников А.С. Уклонение от группы нестационарных инерционных объектов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 3–10.

12. Банников А.С. К задаче позиционной поимки убегающего группой преследователей // Современные проблемы математики: тез. 42-й Всерос. молодеж. шк.-конф., 30 янв.–6 февр. 2011 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 6–7.

13. Банников А.С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7.

14. Bannikov A., Petrov N. About some non-stationary problem of group pursuit with the simple matrix // Contributions to game theory and management: collected papers presented on the Fourth International Conference Game Theory and Management. Saint Petersburg, 2011. Vol. IV. P. 47–62.

15. Бардадым Т.А. Задача преследования с простым движением и разнотипными ограничениями на управления // Кибернетика. 1982. №2. С. 80–84.

16. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высшая школа, 2001. 240 с.

17. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.

18. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. №5. С. 75–79.

19. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 234–241.

20. Васильева Л.Г. Об одной дифференциальной игре убегания // Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры. Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1979. С. 26–33.

21. Вшиневицкий Л.С., Меликян А.А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикладная математика и механика. 1982. Вып. 4. С. 613–621.

22. Григоренко Н.Л. О квазилинейной задаче преследования несколькими объектами // ДАН СССР. 1977. Т. 259. №5. С. 1040–1043.

23. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн. 1983. № 1. С. 41–47.

24. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими объектами. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. 197 с.

25. Губарев Е.В. Убегание от группы преследователей // Автоматика. 1992. №5. С. 66–70.

26. Гусятников П.Б. Убегание одного нелинейного объекта от нескольких более инертных преследователей // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. №2. С. 1316–1324.

27. Гусятников П.Б. Дифференциальная игра убегания m лиц // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. №6. С. 22–32.

28. Гусятников П.Б. Дифференциальная игра убегания // Кибернетика. 1978. №4. С. 72–77.

29. Гусятников П.Б., Половинкин Е.С. Простая квазилинейная задача преследования // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 771–782.

30. Гусятников П.Б. Теория дифференциальных игр. М.: МФТИ, 1982. 99 с.

31. Жимовский В. Два следствия решения одной задачи уклонения от многих преследователей // Bull. Acad. Sci. Ser. Math. 1980. Vol. 28. №3–4. P. 155–159.

32. Зак В.Л. Об одной задаче уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. №3. С. 57–71.

33. Зак В.Л. Кусочно-программная стратегия уклонения от многих преследователей / Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт. 1982. №199.

34. Зак В.Л. Построение стратегии уклонения от нескольких преследователей для динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. №4. С. 143–147.

35. Зонневенд Д. Об одном методе преследования // ДАН СССР. 1972. Т. 204. №6. С. 1296–1299.

36. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока // ДАН СССР. 1973. Т. 208. №3. С. 520–523.

37. Иванов Р.П. Простое преследование–убегание на компакте // ДАН СССР. 1980. Т. 254. №6. С. 1318–1321.

38. Иванов Р.П., Ледяев Ю.С. Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением // Труды Математического института АН СССР. 1981. Т. 158. С. 87–97.

39. Иванов Р.П. К вопросу о мягкой поимке в дифференциальных играх со многими догоняющими и одним уклоняющимся игроком // Труды Математического института АН СССР. 1988. Т. 185. С. 74–83.

40. Ковшов А.М. Параллельные стратегии в играх преследования на сфере: автореф. дис. . . . канд. физ.-матем. наук. СПб, 1996. 12 с.

41. Константинов Р.В. О квазилинейной дифференциальной игре с простой динамикой при наличии фазового ограничения // Математические заметки. 2001. Т. 69. Вып. 4. С. 581–590.

42. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

43. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

44. Малофеев О.А., Петросян Л.А. Игра простого преследования на плоскости с препятствием // Сб. трудов ин-та математики Сиб. отд. АН СССР. 1971. Вып. 9. С. 31–42.

45. Мезенцев А. В. О некоторых классах дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. №6. С. 3–7.

46. Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на многообразиях // Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 54–62.

47. Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на двумерном конусе // Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 741–750.

48. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Труды Математического института АН СССР. 1977. Т. 143. С. 105–128.

49. Никольский М.С. О линейной задаче убегания // ДАН СССР. 1974. Т. 218. №5. С. 1024–1027.

50. Никольский М.С. Нестационарные линейные дифференциальные игры I // Кибернетика. 1970. №6. С. 98–101.

51. Никольский М.С. О квазилинейной задаче убегания // ДАН СССР. 1975. Т. 221. №3. С. 539–542.

52. Остапенко В.В. О нелинейной задаче убегания // Кибернетика. 1978. №3. С. 106–112.

53. Остапенко В.В. Задача уклонения от встречи // Автоматика и телемеханика. 1980. №4. С. 16–23.

54. Панкратова Я. Б. Решение кооперативной дифференциальной игры группового преследования // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. №2. С. 57–78.

55. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974. 296 с.

56. Патланжоглу О.М. О потенциале игрока в обобщенном контрольном примере Л.С. Понтрягина // Автоматика. 1992. №6. С. 17–26.

57. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.

58. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки–разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. №8. С. 1366–1374.

59. Петров Н.Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений / Деп. в ВИНИТИ 20.03.1984 г. №1684. 14 с.

60. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №4. С. 724–726.

61. Петров Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. №5. С. 22–26.

62. Петров Н.Н. Квазилинейные конфликтно-управляемые процессы с дополнительными ограничениями // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 61–68.

63. Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Известия вузов. Математика. 1994. № 4(383). С. 24–29.

64. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 48–54.

65. Петров Н.Н. Теория игр: учеб. пособие. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. 197 с.

66. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.

67. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих. // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89–95.

68. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: ЛГУ, 1977. 222 с.

69. Петросян Л.А., Томский Г.В. Динамические игры и их приложения. Л.: ЛГУ, 1982. 252 с.

70. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 3–14.

71. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.

72. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды Математического института АН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63.

73. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого // ДАН СССР. 1969. Т. 189. № 4. С. 721–723.

74. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 436–445.

75. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 14. № 6. С. 416–427.

76. Пшеничный Б.Н. О задаче убегания // Кибернетика. 1975. № 4. С. 120–127.

77. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

78. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А. Дифференциальная игра уклонения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1977. № 1. С. 3–9.

79. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 260 с.

80. Рихсиев Б.Б. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх многих лиц с простым движением // Известия АН УзбССР. Серия физ-мат. наук. 1984. № 4. С. 37–39.

81. Рихсиев Б.Б., Кучкаров А.Ш. О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 8. С. 41–45.

82. Сатимов Н.Ю. Задача убегания в дифференциальных играх с нелинейными управлениями // Автоматика и телемеханика. 1974. № 5. С. 26–33.

83. Сатимов Н.Ю. Об одном способе уклонения в дифференциальных играх // Математический сборник. 1976. Т. 99 (141). № 3. С. 380—393.

84. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 7. С. 1208–1214.

85. Сатимов Н.Ю., Азамов А.О. Хайдаров Б.К. Простое преследование многими объектами одного убегающего // ДАН УзбССР. 1981. № 12. С. 3–5.

86. Сатимов Н.Ю. О задачах избежания взаимных столкновений // ДАН УзбССР. 1981. № 2. С. 3–5.

87. Сатимов Н.Ю. Задача преследования и убегания для одного класса линейных дифференциальных игр многих лиц // Прикладная математика и механика. Ташкент: Изд-во Ташкент. ун-та. 1981. № 670. С. 64–75.

88. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН УзбССР. 1983. №4. С. 3–6.

89. Сатимов Н.Ю., Рихсеев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000.

90. Сатимов Н.Ю., Кучкаров А.Ш. Уклонение от встречи со многими преследователями на поверхности // Узбекский математический журнал. 2001. №1. С. 51–55.

91. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. Об игровых задачах на фиксированном отрезке в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка // Математические заметки. 2006. Т. 80. Вып. 4. С. 613–626.

92. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М: Наука, 1981. 288 с.

93. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.

94. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.

95. Чикрий А.А. Задача уклонения в нелинейных дифференциальных играх // Кибернетика. 1975. №3. С. 65–69.

96. Чикрий А.А. Задача уклонения в нестационарных дифференциальных играх // Прикладная математика и механика. 1975. №5. С. 780–787.

97. Чикрий А.А. Линейная задача убегания от многих преследователей // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. №4. С. 46–50.

98. Чикрий А.А. О задаче уклонения в линейной дифференциальной игре // Автоматика и телемеханика. 1977. №9. С. 24–29.

99. Чикрий А.А. Об одном способе убегания от нескольких преследователей // Автоматика и телемеханика. 1978. №8. С. 33–38.

100. Чикрий А.А. Достаточные условия в нелинейных дифференциальных играх // ДАН СССР. 1978. Т. 241. №3. С. 547–551.

101. Чикрий А.А. Достаточные условия в нелинейных дифференциальных играх нескольких лиц // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. №6. С. 14–21.

102. Чикрий А.А. Нелинейные дифференциальные игры убегания // ДАН СССР. 1979. Т. 246. №5. С. 1051–1055.

103. Чикрий А.А. Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками // ДАН СССР. 1979. Т. 246. №6. С. 1306–1309.

104. Чикрий А.А. Квазилинейная задача сближения с участием нескольких лиц // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 451–455.

105. Чикрий А.А. Метод переменных направлений в нелинейных дифференциальных играх нескольких лиц // Кибернетика. 1984. №1. С. 48–54.

106. Чикрий А.А., Шишкина Н.Б. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений // Автоматика и телемеханика. 1985. №2. С. 59–69.

107. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.

108. Чикрий А.А., Губарев Е.В. Достаточные условия разрешимости глобальной задачи убегания для нелинейных дифференциальных игр / Препринт 92-22. Киев: ИК им. В.М. Глушюва, 1992. 38 с.

109. Чикрий А.А., Перекатов А.Е. Поочередное преследование по позиции // Автоматика и телемеханика. 1993. Вып. 10. С. 86–95.

110. Чикрий А.А., Прокопович П.В. Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 12–21.

111. Чикрий А.А., Матичин И.И. Квазилинейные конфликтно управляемые процессы с переменной структурой // Проблемы управления и информатики. 1998. №6. С. 31–41.

112. Хайдаров Б.К. Позиционная l-поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 574–579.

113. Шевченко И.И. Простейшая модель поочередного преследования // Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 38–42.

114. Шевченко И.И. Поочередное преследование трех убегающих // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 70–75.

115. Шишкина Н.Б. О задаче преследования по позиции в дифференциальной игре со многими преследователями // Кибернетика. 1987. № 1. С. 47–50.

116. Chodun W. Avoidance of many pursuers in differential games described by differential inclusions // J. Math. Anal. and Appl. 1988. Vol. 135. № 2. P. 581–590.

117. Chodun W. Differential game of evasion with many pursuers // J. Math. Anal. and Appl. 1989. Vol. 142. № 2. P. 370–389.

118. Gamkrelidze R.V., Kharatishvili G.L. A differential game of evasion with nonlinear control // SIAM. J. Control and Optimization. 1974. Vol. 12. № 2. P. 332–349.

119. Rzymowski W. On the game of $n+1$ cars // J. Math. Anal. and Appl. 1984. Vol. 99. № 1. P. 109–122.

120. Rzymowski W. Avoidence of one pursuer // J. Math. Anal. and Appl. 1986. Vol. 120. № 1. P. 89–94.

Поступила в редакцию 01.02.2013

A. S. Bannikov

Some non-stationary problems of group pursuit

We consider non-stationary problems of conflict interaction of one or several evaders with a group of pursuers at the same dynamic and inertial opportunities of all players. We obtain sufficient conditions for the solvability of the local evasion problem in a linear non-stationary problem and the solvability of the global problem of evasion of group of evaders from a group of pursuers in the non-stationary problem of group pursuit with a diagonal matrix. We obtain two-sided estimate the minimum number of evaders sufficient for the solvability of the avoidance from any initial position for a given number of pursuers in games with a diagonal matrix. For non-stationary problem of simple pursuit with phase constraints, we propose a positional control procedure with a guide that guarantees capture at least one of the pursuers in any neighborhood of the terminal set. We obtain sufficient conditions for the avoidance of one evader from a group of pursuers in a second-order differential games.

Keywords: differential games, global evasion problem, local evasion problem, positional strategy, phase restrictions.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Банников Александр Сергеевич, к.ф.-м.н., старший преподаватель, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: asbannikov@gmail.com

Bannikov Aleksandr Sergeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia. E-mail: asbannikov@gmail.com