УДК 515.122.536

© *Е. С. Бастрыков*

КЛАССЫ ТОЧЕК КОМПАКТИФИКАЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассматривается компактификация одного счётного дискретного пространства. Эта компактификация строится как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры. Получены следующие результаты: выделены классы точек нароста этого пространства, найдены зависимости в замыканиях счётных подмножеств этих классов, а также показано существование в наросте подмножеств, замыкания которых гомеоморфны минимальному (одноточечному) компактному расширению счётного дискретного пространства, и подмножеств, замыкания которых гомеоморфны пространству Стоуна–Чеха. Рассмотрены другие свойства этого пространства.

Ключевые слова: компактификация, пространство Стоуна–Чеха, дискретное множество, сходящаяся последовательность, пространство Стоуна булевой алгебры.

Содержание

Введение

Бикомпактным расширением или компактификацией топологического пространства X называется бикомпактное пространство Y, содержащее X в качестве всюду плотного подмножества. Особое место в теории бикомпактных расширений занимают расширения дискретных пространств, и прежде всего стоун – чеховское бикомпактное расширение $\beta\omega$ счётного дискретного пространства ω.

Одной из главных проблем, которые изучаются в теории бикомпактных расширений является отыскание свойств расширений, позволяющих выделить различные типы его точек, что определяет степень неоднородности расширения. Первым результатом в этом направлении для пространства $\beta\omega$ является теорема У. Рудина [6] о существовании, в предположении континуум-гипотезы, p-точек нароста $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ расширения $\beta\omega$. Точка x называется p-точкой пространства X, если $x \in \operatorname{Int} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} O_{xi}$ для всякого счётного семейства окрестностей $\{O_{xi}\}_{i=1}^{\infty}$ точки x. После того, как С. Шелах [7] показал невозможность «наивного» доказательства существования p-точек в ω^*, начался поиск точек, близких по свойствам к p-точкам. Так, К. Кунен [8] доказал существование слабых p-точек в пространстве ω^*, то есть точек, не являющихся предельными ни для какого счётного подмножества ω^*. А. Грызлов [9] доказал существование 0-точек в ω^*, характеризующихся тем, что при любой нумерации точек ω у 0-точки, как ультрафильтра на ω, найдётся элемент плотности 0.

З. Фролик в работах [10, 11], М. Е. Рудин [12, 13], Я. ван Милл [14], К. Кунен [15] и А. Грызлов [16] изучали различные частичные порядки на множестве $\beta\omega \setminus \omega$, ими были выделены и изучены несравнимые в различных порядках точки этого пространства. М. Белл в работе [17] построил бикомпактное расширение счётного дискретного пространства, нарост которого несепарабелен, но обладает счётным числом Суслина. Вопрос о существовании такого расширения был поставлен Я. ван Миллом в [18].

Компактификация Белла позволила решить ряд важных вопросов теории бикомпактных расширений счётных дискретных пространств. Я. ван Милл [19, 20] и А. Грызлов [21, 22] получили несколько новых типов точек в классе слабых p-точек, являющихся предельными для различных подмножеств ω^* со счётным числом Суслина.

Поскольку расширение Белла стало важной частью теории бикомпактных расширений, возникла необходимость в более детальном его изучении. Компактификация BN была построена М. Беллом как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры, состоящей из подмножеств частично упорядоченного множества N. Свойства расширения BN, доказанные М. Беллом, являются следствием существования базы пространства BN, представляющей собой объединением счётного числа 2-сцепленных семейств.

Первой задачей, рассматриваемой в работе, является построение базы пространства BN, которая и сама, и семейство дополнений до её элементов, являются счётным объединением n-сцепленных семейств. Такая база объединяет свойства компактификации BN, полученные М. Беллом в [17] и А. Грызловым в [21].

Основной проблемой, как и в случае других бикомпактных расширений, является поиск различных типов точек компактификации BN и изучение свойств этих точек.

В связи с этим возникли следующие вопросы:

1. Что из себя представляет замыкания различных счётных подмножеств N, в частности, цепей и антицепей?

2. Каковы свойства и характеристики точек, лежащих в замыканиях подмножеств N различного вида?

Поскольку булева алгебра B расширения Белла порождена семейством, состоящим из двух подсемейств множеств различного типа, возникают вопросы:

1. Существует ли в $BN \setminus N$ точки, то есть ультрафильтры на B, обладающие базами, состоящими из множеств только одного из подсемейств?

2. Замыканию каких подсемейств (цепей, антицепей) множеств N принадлежат эти точки?
3. Каковы характеристики и свойства этих точек?
4. Существуют ли в наросте $BN \setminus N$ копии расширения $\beta\omega$ и сходящиеся последовательности, состоящие из точек различных типов?

Решению этих вопросов и посвящена настоящая работа.

§ 1. Краткое содержание работы

Первый раздел работы посвящен решению вопросов, связанных с конструкцией расширения Белла, и доказательству ряда теорем, используемых в дальнейшем. Результаты раздела опубликованы в [23, 24].

В первом параграфе описывается конструкция расширения Белла как пространства Стоуна некоторой булевой алгебры и доказываются факты и свойства этого расширения. Одной из задач здесь являлось отыскание и описание новой базы, удобной для работы с пространством BN. Эта база описана в теореме 1.1. В этом же параграфе доказывается теорема, объединяющая результаты М. Белла [17] и А. Грызлова [21].

Теорема 1.4.

1. *Пусть* $n \in \omega$ *и* $s \in N$ *такие, что* $\operatorname{dom} s \geqslant n$. *Тогда для* $\Gamma(s)$ *справедливы следующие утверждения:*
   a) $\Gamma(s)$ — n*-сцепленное семейство;*
   b) *семейство дополнений до элементов семейства* $\Gamma(s)$ — n*-сцепленное семейство;*
   c) *для всякого счётного множества точек* $\{\, p_i : i \in \omega \,\} \subseteq BN \setminus N$ *найдётся множество* $U \in \Gamma(s)$ *такое, что* $\{\, p_i : i \in \omega \,\} \subseteq [U]$.
2. *Для всякого* $n \in \omega$ *семейство* $\Gamma_n = \{\, [U] \setminus N : U \in \cup\{\, \Gamma(s) : \operatorname{dom} s \geqslant n \,\} \,\}$ *является базой пространства* $BN \setminus N$.

Второй параграф этого раздела посвящён изучению замыкания счётных подмножеств из N. Главным результатом здесь являются теоремы, показывающие, насколько разными могут быть замыкания подмножеств из N.

Теорема 1.5. *Пусть* $\pi(M)$ — *строгая антицепь,* $|M| = \omega$ *и* $X = \{\, x_i : i \in M \,\}$ *такое, что* $x_i \in [C_{\pi(i)}]$. *Тогда* $[X]$ *гомеоморфно* $\beta\omega$.

Теорема 1.7. *Пусть* $A = \{\, s_i : i \in \omega \,\}$ — *бесконечная цепь из* N. *Тогда* A *является сходящейся последовательностью в* BN.

Таким образом, в пространстве BN есть подпространства и гомеоморфные максимальной компактификации $\beta\omega$, и гомеоморфные минимальному, одноточечному расширению пространства ω. Следующая теорема показывает, насколько «много» таких подпространств в пространстве BN.

Теорема 1.8. *Пусть*

$$Q = \{\, x : x \text{ — предел сходящейся последовательности точек } N \,\},$$
$$\mu = \{\, A^* : A \subseteq N,\ [A] \text{ гомеоморфно } \beta\omega \,\}.$$

Тогда Q *всюду плотно и* μ *образует* π*-сеть в* $BN \setminus N$.

Дальнейшие задачи в изучении пространства BN связаны с изучением точек BN как различных ультрафильтров булевой алгебры B. Разработке технических вопросов построения таких ультрафильтров посвящён параграф 3 этой главы. Здесь доказывается ряд утверждений, связанных с понятием центрированных систем в семействах множеств из булевой алгебры B.

Второй раздел содержит основные результаты работы. Результаты раздела опубликованы в [24–28].

Булева алгебра B, определяющая пространство BN, порождена семейством, состоящим из двух подсемейств множеств различного типа.

С другой стороны, как показано в первом разделе, в $BN \setminus N$ существуют точки, являющиеся ультрафильтрами на некоторых счётных подмножествах (предельные точки строгих антицепей), и точки, являющиеся пределами некоторых последовательностей (цепей) из N.

Отсюда, одной из основных задач, решаемых в данной работе являлось выделение различных классов точек нароста расширения BN и изучение их свойств.

В первом параграфе второго раздела получены классы так называемых ℓ- и u-точек.

Теорема 2.1. *Если $\xi = \{G\}$ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\mathcal{M}_L = \Big\{ G = N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \Big\},$$

то $\left| \cap \left\{ G^* : G \in \xi \right\} \right| = 1.$

Определение 2.1. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *ℓ-точкой*, если

$$x \in \cap \left\{ G^* : G \in \xi \right\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{G\}$ в семействе множеств $\mathcal{M}_L$.

Теорема 2.3. *Если $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\mathcal{M}_U = \left\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \right\},$$

то $\left| \cap \left\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \right\} \right| = 1.$

Определение 2.2. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *u-точкой*, если

$$x = \cap \left\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \right\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ в семействе множеств $\mathcal{M}_U$.

Следующая теорема даёт характеристики ℓ-точек в различных терминах.

Теорема 2.2. *Для точки $x \in BN \setminus N$ следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *точка x есть предел некоторой цепи $\{ s_k : k \in \omega \}$ элементов N;*

(b) *из того, что $x \in [C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ следует, что существует $i \in M$ такое, что $x \in [C_{\pi(i)}]$;*

(c) *точка x имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида*

$$\Big[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \Big],$$

другими словами, x — ℓ-точка.

Совокупность всех ℓ-точек обозначим через $\mathbf{L}$. Совокупность u-точек обозначим через $\mathbf{U}$. Классы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ не пересекаются вследствие теоремы 2.2. А следующая теорема показывает, что существуют точки не являющиеся ни ℓ-, ни u-точками.

Теорема 2.5. *Пусть* $\{ s_i : i \in \omega \}$ *— антицепь в* N, $x_i \in C_{s_i}$ *— ℓ-точка и* $X = \{ x_i : i \in \omega \}$. *Тогда* $[X] \backslash X$ *гомеоморфно* $\beta\omega \backslash \omega$ *и состоит из точек, не являющихся ни ℓ-точками, ни u-точками.*

Второй параграф раздела 2 посвящён точкам, являющимся предельными для строгих антицепей. Прежде всего, дано описание этих точек в терминах центрированных систем, которое оказалось похожим на описание ℓ-точек, при этом предельные точки строгих антицепей являются ультрафильтрами на этих антицепях, а ℓ-точки есть пределы цепей, рассматриваемых как последовательности.

Теорема 3.1. *Пусть множество* $C_{\pi|M}$ *— приведённое и* $|M| = \omega$. *Если* $\xi = \{G\}$ *— максимальная* $\pi|M$*-центрированная система для* $C_{\pi|M}$, *то*

$$\left| \cap \{ G^* : G \in \xi \} \right| = 1.$$

Определение 3.2. Пусть $\eta = \{G\}$ — максимальная $\pi|M$-центрированная система для некоторого множества $C_{\pi|M}$. Точку

$$x = \cap \{ G^* : G \in \eta \}$$

будем называть *$\ell_{\pi|M}$-точкой для $C_{\pi|M}$*.

Здесь же доказывается теорема, дающая характеристику $\ell_{\pi|M}$-точек.

Теорема 3.2. *Пусть множество* $C_{\pi|M}$ *— приведённое и* $|M| = \omega$. *Тогда*

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \{ x : x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \}.$$

Совокупность всех $\ell_{\pi|M}$-точек для всевозможных строгих антицепей $\pi(M)$ обозначим через $\mathbf{D}$.

Теорема 3.6. *В наросте* $BN \setminus N$ *пространства Белла есть точки, не лежащие в множестве* $\mathbf{L} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{D}$. *Множества* $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{D}$ *не пересекаются.*

Третий параграф посвящён проблеме — что из себя представляют замыкания счётных подмножеств из $BN \backslash N$. Подобные вопросы являются классическими при исследовании различных бикомпактных расширений.

В первом разделе показано (теорема 1.6), что существуют счётные дискретные подмножества в $BN \setminus N$, замыкания которых гомеоморфны $\beta\omega$. Причём из теорем 1.6 и 1.8 следует, что такие подмножества могут состоять целиком как из ℓ-, так и из $\ell_{\pi|M}$-точек. Оказывается, что замыкание счётных дискретных подмножеств состоящих из u-точек всегда гомеоморфно $\beta\omega$.

Теорема 4.1. *Если* $F \subseteq BN \setminus N$ *— счётное дискретное множество u-точек, то* $[F]$ *гомеоморфно* βN.

В первом разделе (теорема 1.7) было показано, что цепь $\{ s_i : i \in \omega \} \subseteq N$ является сходящейся последовательностью в BN. Возникает вопрос, есть ли сходящаяся последовательность в наросте $BN \setminus N$. Как показано выше (теорема 4.1), u-точки не годятся для построения такой последовательности. То же относится и к ℓ-точкам.

Теорема 4.2. *Пусть* $A = \{ x_i : x_i \in F_{f_i},\ i \in \omega \} \subseteq BN \setminus N$ *такое, что* $f_i \neq f_j$ $(i \neq j)$. *Тогда найдётся* $A' \subseteq A$ *такое, что* $[A']$ *гомеоморфно* $\beta\omega$.

Отсюда непосредственно следует, что из любого бесконечного множества ℓ-точек можно выделить подмножество, замыкание которого гомеоморфно $\beta\omega$.

Ответ на вопрос о существовании сходящейся последовательности в наросте пространства Белла даёт **пример 4.1**, где построена сходящаяся последовательность, состоящая из $\ell_{\pi|M}$-точек.

§ 2. Предварительные результаты

Большинство обозначений и терминов этой работы взяты из книг Р. Энгелькинга [29] и А. В. Архангельского, В. И. Пономарёва [30].

Обозначения

Для пространства X будем обозначать:
$\mathrm{w}(X)$ — вес пространства X;
$c(X)$ — число Суслина;
$s(X)$ — спред (наследственное число Суслина) пространства X;
$t(X)$ — теснота пространства X.
Более подробно о кардинальных инвариантах см. [31]. Также воспользуемся стандартным обозначением:
$\exp X$ — множество всех подмножеств X.
Для множества $A \subseteq X$:
$|A|$ — мощность множества A;
$[A]$ — замыкание множества A в пространстве X;
$A^* = [A] \setminus A$.

Через ω обозначается вполне упорядоченное множество $\{ 0, 1, 2, \dots \}$ неотрицательных целых чисел, а также мощность этого множества. Множество, имеющее мощность ω, называется счётным. Через n обозначаем в зависимости от контекста и натуральное число, и множество $\{ i \in \omega : i < n \}$.

Определения

В работе используется понятие пространства Стоуна булевой алгебры. Основные сведения, связанные с ним, можно найти в книге Сикорского [32]. Мы будем рассматривать булевы алгебры $\mathfrak{A} = \{ U \subseteq X \}$ в множестве $\exp X$. Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{A}$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ порождена семейством множеств $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A}$ — минимальная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{A}$, или, другими словами, элементы из $\mathfrak{A}$ получены путём применения конечного числа операций пересечения, объединения и дополнения к элементам $\mathcal{A}$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Семейство ξ непустых элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *фильтром*, если выполнены следующие условия:

(1) если $A, B \in \xi$, то $A \cap B \in \xi$;

(2) если $A \in \xi$ и $A \subseteq B$, то $B \in \xi$.

О п р е д е л е н и е 0.2. *Ультрафильтром* в булевой алгебре $\mathfrak{A}$ будем называть такой фильтр $\xi \subseteq \mathfrak{A}$, что он не содержится ни в одном другом фильтре в булевой алгебре $\mathfrak{A}$.

Ультрафильтр — это максимальный фильтр. При этом каждый фильтр можно дополнить до ультрафильтра. Понятие фильтра близко к понятию центрированной системы множеств.

Пространством Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется множество ультрафильтров в $\mathfrak{A}$ с топологией, задаваемой базой состоящей их открыто-замкнутых подмножеств U_A следующего вида: для $A \in \mathfrak{A}$, U_A состоит из всех ультрафильтров ξ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ таких, что $A \in \xi$. Пространство Стоуна является бикомпактным.

О п р е д е л е н и е 0.3. Пространство Y называется *бикомпактным расширением* или *компактификацией* пространства X, если Y — бикомпакт и X гомеоморфно некоторому всюду плотному подмножеству Y.

О п р е д е л е н и е 0.4. *Бикомпактным расширением* (*компактификацией*) *Стоуна – Чеха* пространства X (обозначаем βX) будем называть максимальное бикомпактное расширение пространства X, что означает, что для любого бикомпактного расширения bX пространства X существует непрерывное отображение $f\colon \beta X \to bX$, тождественное на X.

Напомним, что для расширения Стоуна – Чеха $\beta\omega$ счётного дискретного пространства

1. $\mathrm{w}(\beta\omega) = \mathrm{w}(\beta\omega \setminus \omega) = 2^\omega$;
2. $c(\beta\omega \setminus \omega) = 2^\omega$;
3. $t(\beta\omega) = 2^\omega$;
4. $|\beta\omega| = 2^{2^\omega}$.

О п р е д е л е н и е 0.5 (см. [8]). Семейство $\lambda = \{M_\alpha\}$ будем называть *n-сцепленным*, если для любого конечного набора $\left\{ M_{\alpha_i} : i \leqslant n \right\} \subseteq \lambda$ следует $\left|\cap\left\{ M_{\alpha_i} : i \leqslant n \right\}\right| \geqslant \omega$.

§ 1. Предварительные сведения и результаты

§ 1.1. Конструкция, свойства и базы расширения Белла

Рассмотрим построение расширения Белла [17].

Определим множество функций

$$P = \left\{ f \in \omega^\omega : 0 \leqslant f(n) \leqslant n + 1 \text{ для всех } n \in \omega \right\}.$$

В качестве счётного дискретного пространства N возьмём множество всех сужений функций множества P:

$$N = \left\{ f|_n : f \in P, n \subseteq \omega \right\}.$$

Определим множество

$$T = \left\{ \pi \in N^\omega : \operatorname{dom} \pi(n) = n + 1 \text{ для всех } n \in \omega \right\}.$$

Для каждой точки $s \in N$ пусть $C_s = \left\{ t \in N : t|_{\operatorname{dom} s} = s \right\}$. Для каждого $\pi \in T$ обозначим

$$C_\pi = \cup\left\{ C_{\pi(n)} : n \in \omega \right\}.$$

Обозначим через B булеву алгебру, порождённую семейством

$$B' = \left\{ C_\pi : \pi \in T \right\} \cup \left\{ N \setminus C_\pi : \pi \in T \right\}.$$

Положим $B'' = \left\{ U \in B : |U| = \omega \right\}$. Определим пространство BN как пространство Стоуна булевой алгебры B. Построение компактификации как пространства Стоуна булевой алгебры является довольно распространённым. Так, например, пространство $\beta\omega$ можно рассматривать как пространство Стоуна булевой алгебры $\exp \omega$, а одноточечное александровское расширение ω — как пространство Стоуна булевой алгебры, порождённой семейством множеств $\left\{ \omega \setminus K : K \subseteq \omega, |K| < \omega \right\}$.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Для всякого $s \in N$, C_s и $\{s\}$ являются элементами булевой алгебры B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s \in N$. Докажем, что $C_s \in B$ и $\{s\} \in B$. Построим $\pi_0, \pi_1 \in T$ следующим образом: рассмотрим $f_0, f_1 \in P$ такие, что $f_i \equiv i$ $(i = 0, 1)$. Определим

$$\pi_i(n) = \begin{cases} f_i|_{n+1}, & \text{для } n \neq \operatorname{dom} s - 1, \\ s, & \text{для } n = \operatorname{dom} s - 1, \end{cases} \qquad i = 0, 1.$$

Так как f_0 и f_1 различны, то, очевидно, ни одно продолжение $\pi_0(n)$ не может являться продолжением никакого $\pi_1(m)$ для $n, m \in \omega$, $n \neq \operatorname{dom} s - 1$, $m \neq \operatorname{dom} s - 1$. Таким образом, пересечение $C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1}$ состоит из элемента $\pi_0(\operatorname{dom} s - 1) = \pi_1(\operatorname{dom} s - 1) = s$ и всех его продолжений, то есть

$$C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1} = C_s.$$

Таким образом, $C_s \in B$.

Пусть $s \in N$. Рассмотрим конечное множество $L = \{t_j\}$ всех продолжений s на множество $\operatorname{dom} s + 1$. По доказанному, C_s и C_{t_j} $(t_j \in L)$ являются элементами булевой алгебры B. Но $\{s\} = C_s \setminus \cup \big\{ C_{t_j} : t_j \in L \big\}$ и, следовательно, $\{s\} \in B$. □

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Для всякой точки $x \in BN$ семейство*

$$\Big\{ \Big[\Big(\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \Big) \cap \Big(\bigcap_{j \leqslant m} N \setminus C_{\pi'_j} \Big) \Big] : n, m \in \omega,\ \pi_i, \pi_j \in T,\ i \leqslant n,\ j \leqslant m \Big\}$$

есть база в точке x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in U_A \subseteq BN$. Точка x является ультрафильтром, состоящим из элементов булевой алгебры B. Каждый элемент A булевой алгебры B представим в виде

$$A = (A_{0,0} \cap \ldots \cap A_{0,r_0}) \cup (A_{1,0} \cap \ldots \cap A_{1,r_1}) \cup \ldots \cup (A_{k,0} \cap \ldots \cap A_{k,r_k}),$$

где $A_{j,i} \in B'$ для всех $i \leqslant r_j$, $j \leqslant k$. Значит, найдётся $j \leqslant k$ такое, что $A_{j,0} \cap \ldots \cap A_{j,r_j}$ есть элемент ультрафильтра x и, следовательно,

$$x \in [(A_{j,0} \cap \ldots \cap A_{j,r_j})] \subseteq [A] = U_A.$$

□

Докажем ещё несколько утверждений, необходимых для дальнейшего исследования этого пространства.

П р е д л о ж е н и е 1.3. *Если $U, V \subseteq N$, V — элемент булевой алгебры и $U \cap V = \varnothing$, тогда $[U] \cap [V] = \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $U, V \subseteq N$, то $U \cap [V] = \varnothing$. Так как V — элемент булевой алгебры, то $[V]$ — открыто-замкнутое множество, значит $BN \setminus [V]$ также является открыто-замкнутым множеством, отсюда $[U] \subseteq BN \setminus [V]$ и, следовательно, $[U] \cap [V] = \varnothing$. □

П р е д л о ж е н и е 1.4. *Если $U, V \subseteq N$ и V — элемент булевой алгебры, тогда*

$$[U \cap V] = [U] \cap [V].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $U = (U \cap V) \cup (U \setminus V)$ и мы имеем, учитывая предыдущее предложение,

$$[U] \cap [V] = ([U \cap V] \cup [U \setminus V]) \cap [V] =$$
$$= ([U \cap V] \cap [V]) \cup ([U \setminus V] \cap [V]) = [U \cap V] \cap [V] = [U \cap V].$$

□

П р е д л о ж е н и е 1.5. *Для любого открыто-замкнутого $U \subseteq BN \setminus N$ найдётся $V \subseteq N$ такое, что $[V] \cap (BN \setminus N) = U$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как U — открытое множество, то для каждой точки $x \in U$ найдётся окрестность $O_x = [V_x]$ $(V_x \in B)$ такая, что $O_x \cap (BN \setminus N) \subseteq U$. Таким образом, семейство

$$\lambda = \{\, O_x \cap (BN \setminus N) : x \in U \,\}$$

является открытым покрытием множества U. С другой стороны, так как U — замкнутое подмножество бикомпактного пространства $BN \setminus N$, можно выделить конечное подпокрытие λ' покрытия λ

$$\lambda' = \{\, O_{x_i} \cap (BN \setminus N) : i \leqslant n \,\}.$$

Таким образом, $U = \cup\{\, [V_{x_i}] : i \leqslant n \,\} \cap (BN \setminus N) = \big[\cup\{\, V_{x_i} : i \leqslant n \,\}\big] \cap (BN \setminus N)$. Множество $V = \cup\{\, V_{x_i} : i \leqslant n \,\}$ есть элемент B и $U = [V] \cap BN \setminus N$. $\square$

Нам требовалось построить более простую и удобную для работы базу, чем база, предложенная М. Беллом. Для $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ обозначим

$$C_{\pi|M} = \cup\{\, C_{\pi(n)} : n \in M \,\}.$$

Л е м м а 1.1. *$C_{\pi|M}$ — элемент алгебры B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим

$$M_0 = \{\, n \in M : \pi(n)(0) = 0 \,\}, \quad M_1 = \{\, n \in M : \pi(n)(0) = 1 \,\}.$$

Заметим, что $M_0 \cap M_1 = \varnothing$ и $M_0 \cup M_1 = M$.

Пусть $f_0 \in P$ — функция, тождественно равная нулю ($f_0(n) = 0$ для всех $n \in \omega$), а $f_1 \in P$ — функция, тождественно равная единице ($f_1(n) = 1$ для всех $n \in \omega$). Определим $\pi_0, \pi_1 \in T$ следующим образом:

$$\pi_0(n) = \begin{cases} \pi(n), & \text{если } n \in M_0; \\ f_1|_{n+1}, & \text{в ином случае,} \end{cases} \qquad \pi_1(n) = \begin{cases} \pi(n), & \text{если } n \in M_1; \\ f_0|_{n+1}, & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Определим

$$C_0 = \{\, s \in N : s(0) = 0 \,\}, \qquad C_1 = \{\, s \in N : s(0) = 1 \,\},$$

тогда $C_0, C_1, C_{\pi_0}, C_{\pi_1} \in B$. Легко видеть, что $C_{\pi|M} = (C_{\pi_0} \cap C_0) \cup (C_{\pi_1} \cap C_1)$. $\square$

Л е м м а 1.2. *Для семейства $\{\, C_{\pi_i|M_i} : i \leqslant n \,\}$ $(n \in \omega)$ справедливо следующее утверждение:*

$$\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i} = \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M'_i} \quad \text{для некоторых } M'_i \subseteq M_i \ (i \leqslant n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение для $n = 1$. Построим множества M'_0 и M'_1 такие, что

$$C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1} = C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1}.$$

Определим

$$M'_0 = \{\, k \in M_0 : \pi_0(k) \in C_{\pi_1|M_1} \,\}, \qquad M'_1 = \{\, k \in M_1 : \pi_1(k) \in C_{\pi_0|M_0} \,\}.$$

Заметим, что для любых s и t из N множество C_s либо содержит C_t, либо содержится в C_t (в частности, они могут быть равны), либо эти множества не пересекаются. Отсюда следует, что

$$C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1} = C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1}.$$

Далее, используя индукцию, предположим, что $\bigcap\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i} = \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M'_i}$. Тогда

$$\Big(\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} = \Big(\bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M'_i}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} =$$
$$= \bigcup_{i \leqslant n} (C_{\pi_i|M'_i} \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}}) = \bigcup_{i \leqslant n} (C_{\pi_i|M''_i} \cup C_{\pi_{n+1}|M^i_{n+1}}) = \bigcup_{i \leqslant n+1} C_{\pi_i|M''_i},$$

где $M''_{n+1} = \bigcup\limits_{i \leqslant n} M^i_{n+1}$. $\square$

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть $x \in BN \setminus N$ и $x \in \big[\bigcap\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i}\big]$. Тогда найдутся π_{i_0} и $M'_{i_0} \subseteq M_{i_0}$ такие, что $x \in [C_{\pi_{i_0}|M'_{i_0}}] \subseteq \big[\bigcap\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i}\big]$.*

Определим

$$\Gamma = \Big\{ C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : \pi, \pi_i \in T,\ i \leqslant n,\ n \in \omega,\ M \subseteq \omega \Big\}.$$

Теперь по лемме 1.1 и следствию 1.1 мы получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.1. *Семейство $\widetilde{B} = \big\{ U^* : U \in \Gamma,\ |U| = \omega \big\}$ является базой пространства $BN \setminus N$.*

Пусть $n \in \omega$, $s \in N$ такие, что $\operatorname{dom} s \geqslant n$. Определим

$$\Gamma(s) = \Big\{ C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i} : \pi(\min M) = s,\ s \notin \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i},\ (m+1)(n+1) < \operatorname{dom} s + 1 \Big\}.$$

М. Беллом было показано [17], что имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.2. *Семейство B'' представимо в виде счётного объединения 2-сцепленных семейств.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает

С л е д с т в и е 1.2. *Пространство $BN \setminus N$ удовлетворяет условию Суслина, но несепарабельно.*

А. Грызловым в [21] был доказано следующее свойство пространства Белла.

Т е о р е м а 1.3. *Для любого натурального m существует система множеств $B_m \subseteq B''$ такая, что:*

(1) *семейство дополнений до элементов системы B_m — m-сцеплено;*

(2) *для любого счётного множества точек $\big\{ p_k : k \in \omega \big\} \subseteq BN \setminus N$ найдётся множество $U \in B_m$ такое, что $\big\{ p_k : k \in \omega \big\} \subseteq [U]$.*

Следующая теорема объединяет свойства, доказанные М. Беллом и А. Грызловым.

Т е о р е м а 1.4.

1. *Пусть $n \in \omega$ и $s \in N$ такие, что $\operatorname{dom} s \geqslant n$. Тогда для $\Gamma(s)$ справедливы следующие утверждения:*

   a) *$\Gamma(s)$ — n-сцепленное семейство;*

   b) *семейство дополнений до элементов семейства $\Gamma(s)$ — n-сцепленное семейство;*

   c) *для всякого счётного множества точек $\big\{ p_i : i \in \omega \big\} \subseteq BN \setminus N$ найдётся множество $U \in \Gamma(s)$ такое, что $\big\{ p_i : i \in \omega \big\} \subseteq [U]$.*

2. *Для всякого $n \in \omega$ семейство*

$$\Gamma_n = \big\{ [U] \setminus N : U \in \cup \big\{ \Gamma(s) : \operatorname{dom} s \geqslant n \big\} \big\}$$

является базой пространства $BN \setminus N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1.a) Для доказательства этого пункта мы модифицировали доказательство Белла (см. [17]). Пусть $n \in \omega$ и $s \in N$ такие, что $\operatorname{dom} s \geqslant n$. Пусть $U_0, \ldots, U_n \in \Gamma(s)$. Тогда

$$s \in U_j = C_{\pi_j|M_j} \setminus \bigcup_{i \leqslant m_j} C_{\pi^j_i} \qquad (j \leqslant n).$$

Мы построим $h \in P$ такое, что $\{\, h|_k : k \geqslant \operatorname{dom} s\} \subseteq U_0 \cap \ldots \cap U_n$, по индукции по $k \geqslant \operatorname{dom} s$. Пусть $h|_{\operatorname{dom} s} = s \in U_0 \cap \ldots \cap U_n$. Если $h|_k \in U_0 \cap \ldots \cap U_n$ для $k \geqslant \operatorname{dom} s$ определено, мы можем определить $h|_{k+1} \notin \{\, \pi_i^j(k) : i \leqslant m_j,\ j \leqslant n \,\}$ поскольку

$$\left|\{\, (i,j) : j \leqslant n,\ i \leqslant m_j \,\}\right| \leqslant (n+1)\cdot(\max m_j + 1) < k+2,$$

и существует $k+2$ продолжения $h|_k$ на $k+1$.

(1.b) Пусть $U_j = C_{\pi_j|M_j} \setminus \bigcup_{i \leqslant m_j} C_{\pi_i^j} \in \Gamma(s)$ $(j \leqslant n)$.

Построим $h \in P$ такое, что $\{\, h|_k : k \geqslant \operatorname{dom} s \,\} \subseteq N \setminus \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$.

Пусть $h|_{\operatorname{dom} s} \neq s$, тогда $h|_{\operatorname{dom} s} \notin \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$. Если $h|_k \notin \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$ для $k \geqslant \operatorname{dom} s$ определено, мы можем определить $h|_{k+1} \notin \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$, поскольку

$$\left|\{\, \pi_j(k) : j \leqslant n \,\}\right| \leqslant n+1 \leqslant \operatorname{dom} s < k+2,$$

и существует $k+2$ продолжения $h|_k$ на $k+1$.

Легко увидеть, что $\Gamma(s)$ удовлетворяет условию (1.c).

(2) Пусть точка $x \in BN \setminus N$, $O_x = C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i}$ и ℓ_0 такое, что $(m+1)(n+1) < \ell_0 = 1$ и $\ell_0 \geqslant n$. Существует s_0 такое, что $\operatorname{dom} s_0 = \ell_0$ и $x \in [C_{s_0}]$. Мы имеем

$$C_{s_0} \cap \Big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i}\Big) = C_{\pi|M'} \setminus \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i},$$

где $M' = \big\{\, \ell : \ell \in M$ и $\pi(\ell)$ — продолжение $s_0 \big\}$. Таким образом, $\min M' \geqslant \ell_0$. Тогда $(m+1)(n+1) < \min M' + 1$ и $\min M' \geqslant n$. В итоге, для $s = \pi(\min M')$ мы имеем

$$U = C_{\pi|M'} \setminus \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i} \in \Gamma(s).$$

Итак, U — искомая окрестность. □

§ 1.2. Замыкания счётных подмножеств N и кардинальные инварианты расширения BN

Заметим, что пространство N является частично упорядоченным множеством со следующим отношением порядка:

> для $s, t \in N$ будем считать, что $s \leqslant t$ тогда и только тогда, когда t — продолжение s, то есть $\operatorname{dom} s \subseteq \operatorname{dom} t$ и $t|_{\operatorname{dom} s} = s$. Также будем считать, что $s < t$, если $s \leqslant t$ и $s \neq t$.

Напомним определения цепей и антицепей.

Определение 1.1. *Цепью* в пространстве N называется линейно упорядоченное множество. *Антицепью* в пространстве N называется множество, элементы которого попарно несравнимы.

В случае антицепей наибольший интерес для нас представляют так называемые строгие антицепи.

Определение 1.2. Антицепь $A \subseteq N$ будем называть *строгой антицепью*, если для любых различных $s, t \in A$ выполнено $\operatorname{dom} s \neq \operatorname{dom} t$.

Для удобства строгие антицепи будем обозначать $\pi(M) = \{\, \pi(n) : n \in M \,\}$, где $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$. Напомним, что в пространстве $\beta\omega$ замыкание любого бесконечного подмножества ω гомеоморфно $\beta\omega$. Мы покажем, что существуют бесконечные подмножества N, замыкания которых в BN гомеоморфны $\beta\omega$, и бесконечные подмножества N, которые являются сходящимися последовательностями в BN.

Т е о р е м а 1.5. *Пусть $\pi(M)$ — строгая антицепь, $|M| = \omega$ и $X = \{\, x_i : i \in M \,\}$ такое, что $x_i \in [C_{\pi(i)}]$. Тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейство $\lambda = \{\, C_{\pi(i)} : i \in M \,\}$.

Для ультрафильтра $\xi \in \beta M \setminus M$ и $F \in \xi$ определим:

$$W_F = \big[\cup\{\, C_{\pi(i)} : i \in F \,\}\big], \quad \lambda_\xi = \{\, W_F : F \in \xi \,\}, \quad L_\xi = \cap\{\, [W_F] : W_F \in \lambda_\xi \,\}.$$

Легко видеть, что:

(1) $L_\xi \cap L_\eta = \varnothing$ для $\xi \neq \eta$;

(2) $\{\, X \cap W_F : F \in \xi \,\}$ — ультрафильтр на множестве X;

(3) $|L_\xi \cap [X]| = 1$.

Пусть $x_\xi = \cap\{\, [X \cap W_F] : F \in \xi \,\}$. Из конструкции следует, что $X \cup \{\, x_\xi : \xi \in \beta M \setminus M \,\} = [X]$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

В случае нароста эту теорему можно обобщить.

Т е о р е м а 1.6. *Пусть $\{\, s_i : i \in \omega \,\}$ — антицепь, и $X = \{\, x_i : i \in \omega \,\}$ такое множество, что $x_i \in (C_{s_i})^*$. Тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что

$$C_s^* = \cup\{\, C_t^* : \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1,\ s \leqslant t \,\} \text{ для любого } s \in N.$$

Таким образом, мы можем построить строгую антицепь $\{\, s_i' : i \in \omega \,\}$ такую, что $x_i \in C^*_{s_i'} \subseteq C^*_{s_i}$.

Из этой теоремы и свойств пространства $\beta\omega$ мы имеем

С л е д с т в и е 1.3.

$$1.\ \mathrm{w}(BN) = 2^\omega. \qquad 2.\ s(BN) = 2^\omega. \qquad 3.\ t(BN) = 2^\omega. \qquad 4.\ |BN| = 2^{2^\omega}.$$

Естественно возникает вопрос о существовании подмножеств N, замыкания которых негомеоморфны $\beta\omega$. Рассмотрим два примера антицепей из N, замыкания которых негомеоморфны $\beta\omega$. Для доказательства того, что замыкание счётного дискретного множества негомеоморфно $\beta\omega$, воспользуемся тем фактом, что для любых $A, B \subseteq \omega$, если $A \cap B = \varnothing$, то $[A]_{\beta\omega} \cap [B]_{\beta\omega} = \varnothing$.

Для $s \in N$ обозначим: $C_s' = \big\{\, t \in N : \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1, t|_{\operatorname{dom} s} = s \,\big\}$ (множество всех одноточечных продолжений s).

П р и м е р 1.1. Пусть $f \in P$ и $\{\, s_n = f|_{n+1} : n \in \omega \,\}$. Пусть $A_n, B_n \subseteq C'_{s_n} \setminus \{s_{n+1}\}$ такие, что $A_n \cap B_n = \varnothing$ и $|A_n| = |B_n| = [n/2]$ (где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$) для всех $n \in \omega$. Обозначим $A = \cup\{\, A_n : n \in \omega \,\}$ и $B = \cup\{\, B_n : n \in \omega \,\}$.

Рассмотрим предел цепи $x = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$. Пусть $O_x = \big[C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant k} C_{\pi_i}\big]$ — некоторая окрестность точки x. Так как x — предел $\{\, s_n : n \in \omega \,\}$, то существует $n_0 \in \omega$ такое, что для любого $n > n_0$ точка $s_n \in O_x$ и $|A_n| > k$, $|B_n| > k$. Множество $\bigcup\limits_{i \leqslant k} C_{\pi_i}$ содержит не более чем k точек из C'_{s_n}, следовательно, $O_x \cap A_n \neq \varnothing$ и $O_x \cap B_n \neq \varnothing$. Таким образом, $x \in [A] \cap [B] \neq \varnothing$, а следовательно, $[A \cup B]$ негомеоморфно $\beta\omega$.

П р и м е р 1.2. Пусть $\{\, \pi(n) : n \in \omega \,\}$ — строгая антицепь. Для каждого $n \in \omega$ пусть $A_n, B_n \subseteq C'_{\pi(n)}$ такие, что $A_n \cap B_n = \varnothing$ и $|A_n| = |B_n| = [n/2]$ ($[n/2]$ — целая часть $n/2$). Обозначим $A = \cup\{\, A_n : n \in \omega \,\}$ и $B = \cup\{\, B_n : n \in \omega \,\}$.

Рассмотрим точку $x \in \big[\{\, \pi(n) : n \in \omega \,\}\big]$. По теореме 1.5 замыкание антицепи гомеоморфно $\beta\omega$. Таким образом, можно рассматривать x как свободный ультрафильтр на нашей антицепи. Рассмотрим произвольную окрестность $O_x = \big[C_{\pi'|M'} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant k} C_{\pi_i}\big]$ точки x. Так как x — свободный ультрафильтр на нашей антицепи, то

$$\big|O_x \cap \{\, \pi(n) : n \in \omega \,\}\big| = \omega.$$

Тогда найдётся бесконечно много $n \in \omega$ таких, что $\pi(n) \in O_x$ и $|A_n| > k$, $|B_n| > k$. Множество $\bigcup\limits_{i \leqslant k} C_{\pi_i}$ содержит не более чем k точек из C'_{s_n}, следовательно, $O_x \cap A_n \neq \varnothing$ и $O_x \cap B_n \neq \varnothing$. Таким образом, $x \in [A] \cap [B] \neq \varnothing$, а следовательно, $[A \cup B]$ негомеоморфно βN.

С другой стороны, как уже было сказано выше, в N существуют бесконечные множества, являющиеся сходящимися последовательностями в BN.

Т е о р е м а 1.7. *Пусть $A = \{ s_i : i \in \omega \}$ — бесконечная цепь из N. Тогда A является сходящейся последовательностью в BN.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A = \{ s_i : i \in \omega \}$ — бесконечная цепь в N, то есть $s_i < s_{i+1}$ для всех $i \in \omega$. Пусть $x \in [A] \setminus A$ и

$$O_x = \Big[C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \Big]$$

— базисная окрестность точки x. Найдётся точка $s_{i_0} \in A$ такая, что $s_{i_0} \in C_{\pi|M}$ и, следовательно, $s_i \in C_{\pi|M}$ для всех $i \geqslant i_0$. С другой стороны, мы имеем

$$\bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \cap A = \varnothing,$$

потому что в противном случае $\bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ содержало бы всё множество A, за исключением конечного числа точек.

Итак, x — предел сходящейся последовательности $A = \{ s_i : i \in \omega \}$. □

Следующая теорема показывает насколько много в BN пределов цепей и копий $\beta\omega$.

Т е о р е м а 1.8. *Пусть*

$$Q = \{ x : x \text{ — предел сходящейся последовательности точек } N \},$$
$$\mu = \{ A^* : A \subseteq N,\ [A] \text{ гомеоморфно } \beta\omega \}.$$

Тогда Q всюду плотно и μ образует π-сеть в $BN \setminus N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V = C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant m} C_{\pi_i}$ — элемент Γ, и $|V| = \omega$. По индукции построим две последовательности $\{ s_k : k \in \omega \}$ и $\{ t_k : k \in \omega \}$ в V такие, что:

(1) $\{ s_k : k \in \omega \}$ — цепь в N;

(2) $\{ t_k : k \in \omega \}$ — строгая антицепь в N;

(3) $s_k < t_{k+1}$ для всех $k \in \omega$.

Пусть n_0 и $s \in N$ такие, что $n_0 \geqslant m + 1$ и $\operatorname{dom} s = n_0 + 1$, $s \in C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant m} C_{\pi_i}$. Определим $s_0 = t_0 = s$. Пусть мы определили $\{ s_k : k \leqslant \ell \}$ и $\{ t_k : k \leqslant \ell \}$, удовлетворяющие условиям 1–3. Поскольку $\ell \geqslant n_0 \geqslant m + 1$, существует не менее двух продолжений s_ℓ, лежащих в $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant m} C_{\pi_i}$. Мы определим одно из них как $s_{\ell+1}$, а другое, как $t_{\ell+1}$.

Итак, мы имеем $\{ s_k : k \in \omega \}$ и $\{ t_k : k \in \omega \}$. По конструкции, $\{ s_k : k \in \omega \} \subseteq V$, $\{ s_k : k \in \omega \}$ — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{k \to \infty} s_k \in V^*$, $\{ t_k : k \in \omega \} \subseteq V$, $\big[\{ t_k : k \in \omega \} \big]$ гомеоморфно $\beta\omega$ и $\big(\{ t_k : k \in \omega \} \big)^* \subseteq V^*$. □

В пространстве $\beta\omega$ наросты любых двух почти не пересекающихся множеств не пересекаются. В случае пространства Белла ситуация несколько другая.

Т е о р е м а 1.9. *Существуют семейства почти не пересекающихся подмножеств N:*

1. *$\lambda_1 = \{ A_\alpha : \alpha \in 2^\omega \}$ такое, что $[A_\alpha]$ гомеоморфно $\beta\omega$ для всех $\alpha \in 2^\omega$, $A^*_\alpha \cap A^*_\beta = \varnothing$ для $\alpha \neq \beta$;*

2. *$\lambda_2 = \{ A_\alpha : \alpha \in 2^\omega \}$ такое, что $|A^*_\alpha| = 1$ и $A^*_\alpha = A^*_\beta$ для всех $\alpha, \beta \in 2^\omega$;*

2.′ $\lambda_2' = \{ A_\alpha : \alpha \in 2^\omega \}$ *такое, что* $|A_\alpha^*| = 1$ *для всех* $\alpha \in 2^\omega$, $A_\alpha^* \cap A_\beta^* = \varnothing$ *для* $\alpha \neq \beta$;

3. $\lambda_3 = \{ A_\alpha : \alpha \in 2^\omega \}$ *такое, что* $A_\alpha^* = BN \setminus N$ *для всех* $\alpha \in 2^\omega$.

Доказательство. Пусть $\theta = \{ F_\alpha : \alpha \in 2^\omega \}$ — семейство почти не пересекающихся бесконечных подмножеств ω. (1) Пусть $A_1 = \{ s_i : i \in \omega \}$ такое, что $[A_1]$ гомеоморфно $\beta\omega$. Определим $A_1(F_\alpha) = \{ s_i : i \in F_\alpha \}$. Семейство $\lambda_1 = \{ A_1(F_\alpha) : \alpha \in 2^\omega \}$ удовлетворяет условию 1.

(2) Аналогичным путём из сходящейся последовательности $A_2 = \{ s_i : i \in \omega \}$ мы можем получить семейство $\lambda_2 = \{ A_2(F_\alpha) : \alpha \in 2^\omega \}$, удовлетворяющее условию 2.

(2′) Для доказательства этого мы можем рассмотреть почти не пересекающееся семейство сходящихся последовательностей в N. Его мощность совпадает с мощностью множества $P = \{ f \in \omega^\omega : f(n) \leqslant n + 1 \}$ и равна 2^ω.

(3) Пусть $A_\alpha = \{ s \in N : \operatorname{dom} s = n \text{ для всех } n \in F_\alpha \}$. Очевидно, что $\lambda_3 = \{ A_\alpha : \alpha \in 2^\omega \}$ удовлетворяет условию 3. □

Благодаря результатам, доказанным А. Грызловым в [33], для изучения свойств сходящихся последовательностей, лежащих в N, достаточно рассматривать только цепи. Поэтому в дальнейшей работе мы будем рассматривать цепи и антицепи.

§ 1.3. Центрированные системы

Этот параграф содержит ряд лемм о центрированных системах множеств, необходимых в дальнейшем.

Уточним некоторые определения и понятия. Пусть μ — некоторое семейство бесконечных подмножеств N.

Определение 1.3. Систему бесконечных подмножеств $\alpha = \{F\}$ будем называть *центрированной системой*, если для любой конечной подсистемы $\alpha' \subseteq \alpha$ выполнено следующее условие: $\cap\{ F : F \in \alpha' \}$ — бесконечно.

Определение 1.4. Центрированную систему $\alpha = \{F\}$ будем называть *центрированной системой в семействе* μ, если $\alpha \subseteq \mu$.

Мы будем рассматривать прежде всего максимальные центрированные системы различных семейств, состоящих из элементов булевой алгебры B. Заметим, что максимальная центрированная система в семействе подмножеств необязательно замкнута относительно конечных пересечений.

Определение 1.5. Пусть $\alpha = \{F\}$ — центрированная система в семействе μ. Подмножество $A \subseteq N$ назовём центрированным с системой $\alpha = \{F\}$, если для каждой конечной подсистемы $\alpha' \subseteq \alpha$ выполнено следующее условие: $\big(\cap\{ F : F \in \alpha' \}\big) \cap A$ бесконечно.

Определение 1.6. Будем говорить, что центрированная система $\alpha = \{F\}$ *вписана* в центрированную систему $\alpha' = \{G\}$, если для любого элемента $F \in \alpha$ найдётся $G \in \alpha'$ такой, что $F \subseteq G$.

Лемма 1.3. *Пусть* $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ *— максимальная центрированная система в семействе множеств* $\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\, M \subseteq \omega \}$, *и множество* $C_{\pi'|M'}$ *такое, что* $C_{\pi'|M'} \cap C_{\pi|M}$ *бесконечно для всякого* $C_{\pi|M} \in \xi$. *Тогда* $C_{\pi'|M'} \in \xi$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный конечный набор элементов ξ, $\{ C_{\pi_k|M_k} : k \leqslant n \} \subseteq \xi$. Найдётся (см. лемму 1.2) набор $\{ M_k' : k \leqslant n \}$ такой, что $M_k' \subseteq M_k$ для каждого $k \leqslant n$ и

$$\bigcap_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M_k} = \bigcup_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M_k'}.$$

Докажем, что найдётся k_0 такое, что $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$.

Предположим противное. Пусть для каждого $k \leqslant n$ найдётся конечный набор семейств $\left\{ C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} : \ell \leqslant n_k \right\}$ такой, что

$$C_{\pi_k|M'_k} \cap \Big(\bigcap_{\ell \leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} \Big) \quad \text{— конечно.}$$

Тогда

$$\Big(\bigcup_{k \leqslant n} C_{\pi_k|M'_k} \Big) \cap \Big(\bigcap_{k \leqslant n} \bigcap_{\ell \leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} \Big) = \Big(\bigcap_{k \leqslant n} C_{\pi_k|M_k} \Big) \cap \Big(\bigcap_{k \leqslant n} \bigcap_{\ell \leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} \Big)$$

конечно, что противоречит центрированности $\xi = \{C_{\pi|M}\}$.

Отсюда и из максимальности ξ следует, что найдётся $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$, тем более $C_{\pi_{k_0}|M_{k_0}} \in \xi$. По условиям леммы $C_{\pi_{k_0}|M_{k_0}} \cap C_{\pi'|M'}$ — бесконечно, следовательно,

$$\bigcap_{k \leqslant n} C_{\pi_k|M_k} \cap C_{\pi'|M'} = \bigcup_{k \leqslant n} C_{\pi_k|M'_k} \cap C_{\pi'|M'}$$

бесконечно, а значит $C_{\pi'|M'} \in \xi$. □

Л е м м а 1.4. *Для всякого множества вида $C_{\pi|M}$ существуют два элемента π_1 и $\pi_2 \in T$ такие, что $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M = \{k_1, k_2, \ldots , k_j, \ldots\}$. Построим π_1 и $\pi_2 \in T$ следующим образом. Для $0 \leqslant n < k_1$ определим $\pi_1(n) \equiv 0$ на множестве n, и $\pi_2(n) \equiv 1$ на множестве n. Для $k_j \leqslant n < k_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ определим $\pi_1(n)$ и $\pi_2(n)$ как произвольное продолжение $\pi(k_j)$ на n.

Из построения π_1 и π_2 вытекает требуемое свойство для C_{π_1} и C_{π_2}: $C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2} = C_{\pi|M}$. □

Л е м м а 1.5. *Пусть $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\left\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \right\}$. Тогда $\alpha = \left\{ C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha' \right\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\left\{ C_\pi : \pi \in T \right\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\left\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \right\}$. Предположим, что $\alpha = \left\{ C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha' \right\}$ не максимальна. Тогда найдётся $\pi' \in T$ такое, что $C_{\pi'} \cup \big(\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \big)$ бесконечно для любого конечного набора $\left\{ C_{\pi_i} : i \leqslant n \right\} \subseteq \alpha$, но $C_{\pi'} \notin \alpha'$.

В силу леммы 1.3 найдётся $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \alpha'$ такое, что $C_{\pi'} \cap C_{\pi_0|M_0}$ конечно. В силу леммы 1.4 найдутся множества $C_{\widehat{\pi}_0}$ и $C_{\widehat{\pi}_1}$ такие, что $C_{\widehat{\pi}_0} \cap C_{\widehat{\pi}_1} = C_{\pi_0|M_0}$. Отсюда следует, с одной стороны, что $(C_{\widehat{\pi}_0} \cap C_{\widehat{\pi}_1}) \cap C_{\pi'}$ конечно.

С другой стороны $C_{\widehat{\pi}_0}, C_{\widehat{\pi}_1} \in \alpha$, это следует из того, что $C_{\pi_0|M_0} \in \alpha'$ и $\alpha \subseteq \alpha'$.

Получаем противоречие. Таким образом, система $\alpha = \left\{ C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha' \right\}$ — максимальна. □
Непосредственными выкладками доказывается

Л е м м а 1.6.

1. *Если $\alpha = \{C_\pi\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\left\{ C_\pi : \pi \in T \right\}$, то $\alpha' = \left\{ \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in \alpha \right\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\left\{ \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \right\}$.*

2. *Если $\alpha' = \{C\}$ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\Big\{ C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \Big\},$$

то система

$$\Big\{ C_\pi : C_\pi = C_{\pi_i} \text{ для некоторого } C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i},\ C \in \alpha' \Big\}$$

— максимальная центрированная система в семействе $\left\{ C_\pi : \pi \in T \right\}$.

Из леммы 1.2 вытекает следующая

Л е м м а 1.7. *Если* $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ — *максимальная центрированная система в семействе множеств* $\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \}$, *то для всякого конечного набора множеств* $\alpha' \subseteq \alpha$ *найдётся* $C_{\pi_0|M_0} \in \alpha$ *такое, что* $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \cap\{ C_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \alpha' \}$.

Л е м м а 1.8. *Для максимальной центрированной системы* $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ *в семействе множеств* $\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \}$ *существует максимальная центрированная система* $\alpha'' = \{C\}$ *в семействе* $\{ C = \bigcap\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \}$ *такая, что* $\alpha'' = \{C\}$ *вписана в* $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \}.$$

В силу леммы 1.5 система $\alpha' = \{ C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha \}$ — максимальная центрированная система в семействе $\{ C_\pi : \pi \in T \}$. В силу леммы 1.6 всевозможные конечные пересечения элементов из α' образуют максимальную центрированную систему $\alpha'' = \{C\}$ в семействе $\{ C = \bigcap\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \}$. Покажем, что система $\alpha'' = \{C\}$ вписана в α. Действительно, пусть $C_{\pi|M} \in \alpha$. В силу леммы 1.4 $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$ для некоторых $\pi_1, \pi_2 \in T$. Тогда $\pi_1, \pi_2 \in \alpha'$, а их пересечение $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2} \in \alpha''$. Таким образом, α'' вписана в α. □

Л е м м а 1.9. *Для максимальной центрированной системы* $\alpha = \{C\}$ *в семействе*

$$\Big\{ C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \Big\}$$

существует максимальная центрированная система $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ *в семействе*

$$\{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \},$$

вписанная в α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha = \{C\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\Big\{ C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \Big\}.$$

Рассмотрим семейство множеств $\alpha' = \{ C_{\pi|M} : C_{\pi|M}$ центрировано с $\alpha \}$. Покажем, что α' искомая. В силу леммы 1.4 всякое множество $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Так как $C_{\pi|M}$ центрирована с $\alpha = \{C\}$ следует, что $C_{\pi_1}, C_{\pi_2} \in \alpha$. Таким образом, всякий элемент $C_{\pi|M} \in \alpha'$ есть и элемент системы $\alpha = \{C\}$. Следовательно, система $\alpha' = \{ C_{\pi|M} : C_{\pi|M}$ центрировано с $\alpha \}$ — центрирована. Докажем максимальность α' и то, что α' вписана в α.

Пусть $C \in \alpha$ — произвольный элемент α, то есть $C = \bigcap\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$. По лемме 1.2

$$C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} = \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i}.$$

В силу центрированности $\alpha = \{C\}$, среди множеств $C_{\pi_i|M_i}$ $(i \leqslant n)$ найдётся $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}}$, центрированное с $\alpha = \{C\}$, то есть $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}} \in \alpha'$. Отсюда следует, что α' вписано в α. Отсюда же легко выводится и максимальность системы α'. Лемма доказана. □

§ 2. Основные результаты

§ 2.1. ℓ-точки и их свойства, u-точки

Как видно из конструкции пространства Белла, точка нароста $BN \setminus N$ — это свободный ультрафильтр булевой алгебры B, базу которого образуют бесконечные множества вида

$$\Big(\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big) \cap \Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant m} C_{\pi'_j}\Big).$$

Базой каждого ультрафильтра также является и семейство множеств вида

$$C_{\pi|M} \cap \Big(N \setminus \bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi_j}\Big).$$

Возникает вопрос, что из себя представляют максимальные центрированные семейства состоящие из множеств вида $C_{\pi|M}$, или $\bigcap_{j\leqslant n} C_{\pi_i}$, или $N \setminus \bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi_j}$.

Т е о р е м а 2.1. *Если $\xi = \{G\}$ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\mathcal{M}_L = \Big\{\, G = N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\, \pi_i \in T \,\Big\},$$

то $\big|\cap\big\{\, G^* : G \in \xi \,\big\}\big| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из центрированности системы $\xi = \{G\}$ и бикомпактности пространства BN следует, что $\bigcap\big\{\, G^* : G \in \xi \,\big\} \neq \varnothing$. Предположим, что найдутся такие x, $y \in \bigcap\big\{\, G^* : G \in \xi \,\big\}$, $x \neq y$. Рассмотрим некоторую окрестность $O_x = \big[C_{\pi 0|M_0} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\big]$ точки x такую, что $y \notin O_x$. Заметим, что

$$\Big[C_{\pi 0|M_0} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big] = \big[C_{\pi 0|M_0}\big] \setminus \Big[\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big] = \big[C_{\pi 0|M_0}\big] \setminus \Big(\bigcup_{i\leqslant n} [C_{\pi_i}]\Big).$$

Имеем: $[C_{\pi 0|M_0}]$ и $\bigcap_{i\leqslant n} [N \setminus C_{\pi_i}]$ — открыто-замкнутые множества, содержащие точку x. Отсюда и из максимальности системы ξ следует, что $\bigcap_{i\leqslant n} (N \setminus C_{\pi_i}) \in \xi$, из этого вытекает, что $y \in \bigcap_{i\leqslant n} [N \setminus C_{\pi_i}]$. Так как $y \notin O_x$, получаем, что $y \notin [C_{\pi 0|M_0}]$. По лемме 1.4 существуют $\pi_1, \pi_2 \in T$ такие, что $C_{\pi 0|M_0} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Имеем $y \notin [C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}] = [C_{\pi_1}] \cap [C_{\pi_2}]$.

Пусть $y \notin [C_{\pi_1}]$. Тогда $y \in [N \setminus C_{\pi_1}]$. Из открыто-замкнутости множества $[N \setminus C_{\pi_1}]$ и максимальности ξ следует, что $N \setminus C_{\pi_1} \in \xi$. Отсюда $[N \setminus C_{\pi_1}] \ni x$, следовательно, $[C_{\pi_1}] \not\ni x$, что противоречит тому, что

$$\big[C_{\pi_1}\big] \supseteq \big[C_{\pi 0|M_0}\big] \ni x.$$

Это противоречие доказывает теорему. □

О п р е д е л е н и е 2.1. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *ℓ-точкой*, если

$$x \in \cap\big\{\, G^* : G \in \xi \,\big\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{G\}$ в семействе множеств $\mathcal{M}_L$.

Следующая теорема показывает основное свойство ℓ-точек.

Т е о р е м а 2.2. *Для точки $x \in BN \setminus N$ следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *точка x есть предел некоторой цепи $\{\, s_k : k \in \omega \,\}$ элементов N;*

(b) *из того, что $x \in [C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ следует, что существует $i \in M$ такое, что $x \in [C_{\pi(i)}]$;*

(c) *точка x имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида*

$$\Big[N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big],$$

другими словами, x — ℓ-точка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a ⇒ b) Для произвольной окрестности

$$O_x = \Big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\ell\leqslant m} C_{\pi_\ell}\Big)^*$$

точки x рассмотрим
$$O'_x = \Big[C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\ell \leqslant m} C_{\pi_\ell}\Big].$$
Так как $x = \lim\limits_{n\to\infty} f|_n$, то для O'_x найдётся $n_0 \in \omega$ такой, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется $f|_n \in O'_x$. Также отметим, что
$$C_{\pi|M} = \cup\big\{\, C_s : s = \pi(n) \text{ для всех } n \in M \,\big\},$$
а, следовательно, $f|_{n_0} \in C_{s_0}$ для некоторого $C_{s_0} \subseteq C_{\pi|M}$, и, очевидно, $C_{f|_{n_0}} \subseteq C_{s_0} \subseteq C_{\pi|M}$.

Более того, несложно видеть, что C_{s_0} содержит и $f|_n$ для всех $n \geqslant n_0$, а значит, в замыкании содержит и точку x. Таким образом,
$$x \in \Big[C_{s_0} \setminus \bigcup_{\ell \leqslant m} C_{\pi_\ell}\Big] \subseteq O'_x,$$
а значит, и
$$x \in \Big(C_{s_0} \setminus \bigcup_{\ell \leqslant m} C_{\pi_\ell}\Big)^* \subseteq O_x.$$

(b $\Rightarrow$ c) Очевидно, что для любого $s \in N$ можно найти такие n и π_i ($i \leqslant n$), что
$$C^*_s = \Big(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big)^*.$$
Тогда мы можем преобразовать окрестность, полученную в прошлом пункте доказательства
$$x \in \Big(C_{s_0} \setminus \bigcup_{\ell \leqslant m} C_{\pi_\ell}\Big)^* = \Big(\Big(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big) \setminus \bigcup_{\ell \leqslant m} C_{\pi_\ell}\Big)^* = \Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\Big)^* \subseteq O_x.$$
Таким образом, множества вида
$$\Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\Big)^*$$
образуют базу точки x.

(c $\Rightarrow$ a) Отметим, что весь нарост N^* представим в виде объединения непересекающихся множеств $F_f = \bigcap\limits_{n\in\omega} C^*_{f|_n}$ для $f \in P$. Пусть точка $x \in BN \setminus N$ и $x \in F_f$ для некоторого $f \in P$.

По условиям множества вида
$$\Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\Big)^*.$$
образуют базу этой точки в наросте.

Отметим, что $N \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant k} C_{\pi_j} \supseteq \{f|_n : n \in \omega\}$. Действительно, если найдётся $r \in \omega$ такое, что $f|_r \notin N \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant k} C_{\pi_j}$, то, очевидно, что все продолжения $f|_r$ также не лежат в $N \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant k} C_{\pi_j}$, то есть
$$N \setminus \bigcup_{j \leqslant k} C_{\pi_j} \not\supseteq C_{f|_r}.$$
Но
$$x \in F_f \subseteq C^*_{f|_r} \not\subseteq \Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\Big)^*$$
противоречит тому, что $\Big(N \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\Big)^*$ — окрестность точки x.

Таким образом,
$$\cap\Big\{\Big[N \setminus \bigcup_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\Big]\Big\} \supseteq [\{f|_n : n \in \omega\}].$$
Отсюда
$$\{x\} = \cap\Big\{\Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\Big)^*\Big\},$$
то есть $x = \lim\limits_{n\to\infty} f|_n$. □

Отсюда получаем, что каждое из условий (a) или (b) является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $x \in BN \setminus N$ была ℓ-точкой. Таким образом, множество ℓ-точек есть в точности множество пределов цепей.

Также для ℓ-точек верна следующая

Л е м м а 2.1. *Если $X = \{ x_i : i \in \omega \} \subseteq BN \setminus N$ — счётное подмножество, состоящее из ℓ-точек, то X дискретно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякой точки $x_i \in X$ существует функция $f_i \in P$ такая, что

$$x_i \in F_{f_i} = \bigcap_{n \in \omega} [C_{f_i|n}].$$

Заметим, что семейство $\{ [C_{f_i|n}] : n \in \omega \}$ образует базу F_{f_i}. Так как x_i $(i \in \omega)$ являются ℓ-точками, то $F_{f_i} \cap F_{f'_i} = \varnothing$ для $i \neq i'$. Пусть $x_{i_0} \in X$. Покажем, что найдётся окрестность $O_{x_{i_0}}$ такая, что $O_{x_{i_0}} \cap (X \setminus \{x_{i_0}\}) = \varnothing$. Для всякой точки $x_i \in X$, $i \neq i_0$, рассмотрим множество $C_{f_i|n_i}$ такое, что $x_i \in F_{f_i} \subseteq [C_{f_i|n_i}]$ и $x_{i_0} \notin [C_{f_i|n_i}]$. Можно считать, что $n_i \neq n_{i'}$, если $i \neq i'$. Для множества

$$\cup\{ C_{f_i|n_i} : i \in \omega,\, i \neq i_0 \}$$

имеем:

$$x_{i_0} \notin [\cup\{ C_{f_i|n_i} : i \in \omega,\, i \neq i_0 \}].$$

Пусть $f_{i_0}(0) = 0$, тогда построим π следующим образом:

$$\pi(n) = \begin{cases} f_i|_{n_i} & \text{для } n = n_i - 1,\ i \neq i_0; \\ 1 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Тогда $O_{x_{i_0}} = [N \setminus C_\pi]$ не пересекается с $X \setminus \{x_{i_0}\}$ и является искомой. Лемма доказана. □

Аналогично ℓ-точкам можно рассмотреть второе подсемейство, образующее булеву алгебру B.

Т е о р е м а 2.3. *Если $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\mathcal{M}_U = \{ C_{\pi|M} : \pi \in T,\, M \subseteq \omega \},$$

то $\left|\cap\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \}\right| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из центрированности системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ и бикомпактности пространства BN следует, что $\cap\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \} \neq \varnothing$.

Покажем, что $\left|\cap\{ [C_{\pi|M}] : C_{\pi|M} \in \xi \}\right| = 1$. Предположим противное, пусть найдутся две различные точки $x, y \in \cap\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \}$. Рассмотрим некоторую окрестность

$$O_x = \Big[C_{\pi 0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big] = [C_{\pi 0|M_0}] \setminus \Big[\bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big]$$

точки x такую, что $O_x \not\ni y$. Множество $[C_{\pi 0|M_0}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим точку x, следовательно, $C_{\pi 0|M_0} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. Из леммы 1.3 следует, что $C_{\pi 0|M_0} \in \xi$, и, следовательно, $[C_{\pi 0|M_0}] \ni y$. Так как $O_x \not\ni y$ получаем, что $y \in \big[\bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big] = \bigcup_{i \leqslant n} [C_{\pi_i}]$. Тогда найдётся $i_0 \leqslant n$ такое, что $y \in [C_{\pi_{i_0}}]$. Так как $[C_{\pi_{i_0}}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим y и $y \in \cap\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \}$ получаем, что $C_{\pi_{i_0}} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$, и из леммы 1.3 вытекает, что $C_{\pi_{i_0}} \in \xi$. Но тогда мы имеем $\cap\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \} \subseteq C^*_{\pi_{i_0}}$ и, следовательно, $x \notin \cap\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \}$. Это противоречие доказывает теорему. □

Из теоремы 2.3 и леммы 1.9 получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.4. *Если $\xi = \{C\}$ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\Big\{ \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i} : n \in \omega,\, \pi_i \in T \Big\},$$

то $\left|\cap\left\{ C^* : C \in \xi \right\}\right| = 1$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *u-точкой*, если

$$x = \cap\left\{ C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \right\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ в семействе множеств $\mathcal{M}_U$.

Множество всех ℓ-точек обозначим $\mathbf{L}$, а множество u-точек — $\mathbf{U}$. Вследствие теоремы 2.2 $\mathbf{L} \cap \mathbf{U} = \varnothing$. В связи с полученными результатами возникает вопрос: а существует ли в $BN \setminus N$ точка общего вида, то есть не u- и не ℓ-точка. Ответ на этот вопрос даёт следующая

Т е о р е м а 2.5. *Пусть* $\left\{s_i \ : \ i \ \in \ \omega\right\}$ *— антицепь в* N, $x_i \in C_{s_i}$ *—* ℓ*-точка* $(i \in \omega)$ *и* $X = \left\{x_i : i \in \omega\right\}$. *Тогда* $[X] \setminus X$ *гомеоморфно* $\beta\omega \setminus \omega$ *и состоит из точек, не являющихся ни* ℓ*-точками, ни* u*-точками.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $[X]$ гомеоморфно βN в силу теоремы 1.5. Рассмотрим $X = \left\{ x_i : i \in \omega \right\}$. Пусть $x \in [X] \setminus X$. Точка x не является ℓ-точкой, так как в противном случае, в силу леммы 2.1, множество $\{x\} \cup X$ было бы дискретным.

Покажем, что x не является u-точкой. По условиям теоремы $x_i \in C_{s_i}$ для всякого $i \in \omega$. Пусть $F_{f_i} = \bigcap\limits_{n \in \omega}\left[C_{f_i|n}\right]$, где $f_i \in P$, — множество такое, что $x_i \in F_{f_i} \subseteq C^*_{s_i}$. Отметим, что семейство $\left\{ [C_{f_i|n}] : n \in \omega \right\}$ является базой множества F_{f_i} в BN.

Покажем, что в N существуют счётные подмножества

$$A = \left\{ t(i,n) : i,n \in \omega \right\} \qquad \text{и} \qquad B = \left\{ q(i,n) : i,n \in \omega \right\},$$

обладающие следующими свойствами:

(i) любые два элемента множества $A \cup B$ попарно несравнимы и имеют разные области определения;

(ii) $[A] \cap F_{f_i} \neq \varnothing$ и $[B] \cap F_{f_i} \neq \varnothing$, для любого $i \in \omega$.

Пусть $\left\{ L_i : i \in \omega \right\}$ — разбиение ω на счётное число дизъюнктных бесконечных множеств. Рассмотрим произвольное $i \in \omega$, C_{s_i} и $F_{f_i} = \bigcap\limits_{n \in \omega}\left[C_{f_i|n}\right] \subseteq C_{s_i}$. Пусть

$$N_i = \min\left\{ n : [C_{f_i|n}] \subseteq C_{s_i} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что мы можем построить множества

$$A_i = \left\{ t(i,n) : n \in \omega \right\} \qquad \text{и} \qquad B_i = \left\{ q(i,n) : n \in \omega \right\},$$

для которых выполнены следующие условия:

(1) $t(i,n),\, q(i,n) \in C_{f_i|_{N_i+n}} \setminus C_{f_i|_{N_i+n+1}}$;

(2) область определения различных элементов $A_i \cup B_i$ различны и являются элементами L_i;

(3) любые два элемента $A_i \cup B_i$ несравнимы.

Определим $A = \cup\left\{ A_i : i \in \omega \right\}$, $B = \cup\left\{ B_i : i \in \omega \right\}$. Множества A и B удовлетворяют условиям (i) и (ii). Условие (ii) очевидно выполнено по построению. Для проверки (i) достаточно заметить, что если один элемент $A \cup B$ лежит в $A_i \cup B_i$, а другой в $A_j \cup B_j$ и $i \neq j$, то они несравнимы, так как один из них лежит в C_{s_i}, а другой в C_{s_j}, и следовательно, один является продолжением s_i, а другой — продолжением s_j и s_i несравним с s_j. Области их определения различны, так как у одного она является элементом L_i, а у другого — L_j и $L_i \cap L_j = \varnothing$.

Итак, A и B построены. Заметим, что в силу условия (i) по теореме 1.5 $[A]$, $[B]$, $[A \cup B]$ гомеоморфны $\beta\omega$, и, следовательно, $[A] \cap [B] = \varnothing$.

Покажем, что точка $x \in [X] \setminus X$ не является u-точкой. Предположим противное. Рассмотрим произвольную базисную окрестность точки x вида $O_x = \left[C_{\pi|M}\right] = \left[\cup\left\{\, C_s : s \in \pi(M) \,\right\}\right]$.

Если $x_i \in X \cap O_x$, то $x_i \in \left[\cup\left\{\, C_s : s \in \pi(M) \,\right\}\right]$ и, так как x_i есть ℓ-точка, найдётся $s_0 \in \pi(M)$ такое, что $x_i \in [C_{s_0}]$, и, следовательно, $[C_{s_0}]$ является окрестностью F_{f_i}.

Так как $x_i \in F_{f_i} \subseteq \cap\left\{\, [C_{f_i|n}] : n \in \omega \,\right\}$ и $\left\{\, [C_{f_i|n}] : n \in \omega \,\right\}$ является базой множества F_{f_i}, то $\left[C_{s_0}\right]$ является окрестностью F_{f_i}, и, в силу условия (ii), $[C_{s_0}] \cap A \neq \varnothing$ и $[C_{s_0}] \cap B \neq \varnothing$. Следовательно, $O_x \cap A \neq \varnothing$ и $O_x \cap B \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $x \in [A]$ и $x \in [B]$, то есть $x \in [A] \cap [B] \neq \varnothing$, что противоречит тому, что $[A] \cap [B] = \varnothing$. Таким образом, $x \in [X] \setminus X$ не u-точка. Теорема доказана. $\square$

§ 3. $\ell_{\pi|M}$-точки

Рассмотрим множество $C_{\pi|M}$, которое будем считать приведённым (то есть $\pi(M)$ — строгая антицепь), M счётно и положим:

$$\mathcal{M}'_{\pi|M} = \left\{\, C_{\pi|M_i} : M_i = M \cap \left\{\, n : n \geqslant i \,\right\}, i \in \omega \,\right\} \quad \text{и} \quad \mathcal{M}_{\pi|M} = \mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}'_{\pi|M}.$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Центрированную систему $\xi = \{G\}$ в семействе $\mathcal{M}_{\pi|M}$ будем называть *$\pi|M$-центрированной для $C_{\pi|M}$*, если $\mathcal{M}'_{\pi|M} \subseteq \xi$.

Всякую $\pi|M$-центрированную систему можно дополнить до максимальной $\pi|M$-центрированной системы.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведённое и $|M| = \omega$. Если $\xi = \{G\}$ — максимальная $\pi|M$-центрированная система для $C_{\pi|M}$, то*

$$\left|\cap\left\{\, G^* : G \in \xi \,\right\}\right| = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы для ℓ-точек.

Из центрированности системы $\xi = \{G\}$ и бикомпактности BN следует, что $\cap\left\{\, G^* : G \in \xi \,\right\}$ не пусто. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in \cap\left\{\, G^* : G \in \xi \,\right\}$. Рассмотрим окрестность $O_x = \left[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right]$ точки x такую, что $y \notin O_x$. Отметим, что из построения пространства BN следует, что

$$\left[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right] = \left[C_{\pi_0|M_0}\right] \cap \left(\bigcap_{i \leqslant n} \left[N \setminus C_{\pi_i}\right]\right) = \left[C_{\pi_0|M_0}\right] \cap \left[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right].$$

Множества $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $\left[N \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right]$ — открыто-замкнутые множества, содержащие точку x.

Из открыто-замкнутости множества $\left[N \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right]$ следует, что множество $N \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ центрировано с ξ, а из максимальности системы ξ следует, что $N \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \in \xi$.

Тогда по предположению $y \notin \left[C_{\pi_0|M_0}\right]$. По лемме 1.4 представим множество $C_{\pi_0|M_0}$ в виде пересечения $C_{\pi'} \cap C_{\pi''}$. Тогда $y \notin \left[C_{\pi'}\right]$ или $y \notin \left[C_{\pi''}\right]$. Пусть $y \notin \left[C_{\pi'}\right]$, тогда $y \in \left[N \setminus C_{\pi'}\right]$. Множество $\left[N \setminus C_{\pi'}\right]$ — открыто-замкнутая окрестность точки y, поэтому оно центрировано с ξ. Из максимальности системы ξ и того, что $N \setminus C_{\pi'}$ — элемент системы $\mathcal{M}_{\pi|M}$, следует, что $N \setminus C_{\pi'} \in \xi$. Таким образом, $x \in [N \setminus C_{\pi'}]$, что противоречит $x \in [C_{\pi'}]$. Отсюда следует, что наше предположение $\left|\cap\left\{\, G^* : G \in \xi \,\right\}\right| > 1$ неверно. Теорема доказана. $\square$

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть $\eta = \{G\}$ — максимальная $\pi|M$-центрированная система для некоторого множества $C_{\pi|M}$. Точку

$$x = \cap\left\{\, G^* : G \in \eta \,\right\}$$

будем называть *$\ell_{\pi|M}$-точкой для $C_{\pi|M}$*, а систему η — *порождающей точку x*.

Л е м м а 3.1. *Пусть* ξ — *ультрафильтр на* $\pi(M)$. *Тогда найдётся база* $B_\xi = \{A\}$ *ультрафильтра* ξ *такая, что для любого* $A \in B_\xi$ *найдётся* $\pi_A \in T$ *такое, что множество*

$$G_A = \cup\big\{\, C_t : t \in A \,\big\}$$

представимо в виде

$$G_A = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через (0) и (1) обозначим функции из N, определённые на одноточечном множестве $\{0\}$ и переводящие его в 0 или 1 соответственно.

Пусть $U \in \xi$. Докажем, что найдётся $A \in \xi$ такое, что $A \subseteq U$ и G_A представимо в виде $C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}$. Через M_U обозначим множество тех n из M, для которых $\pi(n) \in U$. Либо $C_{(0)} \cap \pi(M)$, либо $C_{(1)} \cap \pi(M)$ не принадлежит ξ. Пусть $C_{(0)} \cap \pi(M) \notin \xi$.

Определим $A = U \setminus C_{(0)}$, а $\pi_A \in T$ построим следующим образом:

(1) $\pi_A(0) = (0)$;

(2) для $n \in M_U \cup (\omega \setminus M)$ пусть $\pi_A(n)$ — некоторое продолжение функции (0);

(3) для $n \in M \setminus M_U$ положим $\pi_A(n) = \pi(n)$.

Тогда $G_A = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}$. Из построения π_A следует, что $A \in \xi$ и $A \subseteq U$. Семейство $B_\xi = \{A\}$ и есть искомая база. □

Следующая теорема показывает, что $\ell_{\pi|M}$-точки есть не что иное, как предельные точки строгих антицепей $\pi(M)$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть множество* $C_{\pi|M}$ *приведённое и* $|M| = \omega$. *Тогда*

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \big\{\, x : x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in BN \setminus N - \ell_{\pi|M}$-точка для некоторого $C_{\pi|M}$. Тогда для любой окрестности O_x точки x имеем $\big|O_x \cap \pi(M)\big| = \omega$. Действительно, предположим, что существует окрестность

$$O_x = \Big[\Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j}\Big) \cap C_{\pi|M_i}\Big],$$

содержащая лишь конечное число точек множеств $\pi(M)$. Из вида окрестности следует, что в этом случае O_x пересекает лишь конечное число множеств $C_{\pi(n)}$, где $n \in M$, и, следовательно, $x \in [C_{\pi(m)}]$ для некоторого $m \in M$. Но это противоречит тому, что $x \in \cap\big\{\, [C_{\pi|M_i}] : i \in \omega \,\big\}$.

Докажем теперь, что любая точка из $[\pi(M)] \setminus \pi(M)$ является $\ell_{\pi|M}$-точкой для $C_{\pi|M}$. По теореме 1.5 $[\pi(M)] \setminus \pi(M)$ гомеоморфно $\beta N \setminus N$. Рассмотрим точку $x \in [\pi(M)] \setminus \pi(M)$. Она представима в виде ультрафильтра на $\pi(M)$. По лемме 3.1 найдётся база этого ультрафильтра $B_x = \{A\}$ такая, что для любого $A \in B_x$ множество G_A имеет вид

$$G_A = \big\{\, C_t : t \in A \,\big\} = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Рассмотрим центрированную систему множеств

$$\big\{\, N \setminus C_{\pi_A} : A \in B_x \,\big\}.$$

Очевидно, что система $\big\{\, N \setminus C_{\pi_A} : A \in B_x \,\big\} \cup \mathcal{M}'_{\pi|M}$ центрированная и, следовательно, является $\pi|M$-центрированной. Дополним ее до максимальной $\pi|M$-центрированной системы $\eta = \{G\}$.

Покажем, что $\cap\big\{\, G^* : G \in \eta \,\big\} = x$. Предположим противное. Пусть $\cap\big\{\, G^* : G \in \eta \,\big\} = y$ и $x \neq y$. Но по первой части доказательства $y \in [\pi(M)]$ и y, так же как и x, можно рассматривать как ультрафильтр на $\pi(M)$. Так как $x \neq y$, то существует $F \in y$ такое, что $\pi(M) \setminus F \in x$. Тогда найдётся $A \in B_x$ такое, что $A \subseteq \pi(M) \setminus F$. Множество $N \setminus C_{\pi_A}$, с одной стороны, содержится в η и, следовательно, $y \in [N \setminus C_{\pi_A}]$, а с другой стороны, оно не пересекает G_F, замыкание которого является окрестностью точки y. Противоречие. □

Рассмотрим ряд других важных свойств $\ell_{\pi|M}$-точек.

О п р е д е л е н и е 3.3. Для $\pi, \pi' \in T$ и $M, M' \subseteq \omega$ будем говорить, что $C_{\pi'|M'}$ *строго вписано в* $C_{\pi|M}$, если для каждого $n' \in M'$ найдётся $n \in M$ такое, что $\pi(n) < \pi'(n')$.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведённое и M счётно. Тогда*

$$\cap\left\{ [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ строго вписано в } C_{\pi|M} \right\} = [\pi(M)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того что $[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] \supseteq [\pi(M)]$ для всех $C_{\pi'|M'}$ строго вписанных в $C_{\pi|M}$, следует, что

$$\cap\left\{ [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ строго вписано в } C_{\pi|M} \right\} \supseteq [\pi(M)].$$

Докажем теперь, что любая точка x из

$$D = \cap\left\{ [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ строго вписано в } C_{\pi|M} \right\}$$

также лежит в $[\pi(M)]$. Предположим противное.

Пусть $x \in D \setminus [\pi(M)]$, $O_x = [C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}]$ — окрестность точки x такая, что $O_x \cap \pi(M) = \varnothing$. Рассмотрим множество

$$\left(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}}\right) \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}.$$

Элемент $s \in N$ лежит в этом множестве тогда и только тогда, когда существуют $n \in M$ и $\widetilde{n} \in \widetilde{M}$ такие, что $\pi(n) \leqslant s$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant s$. Это означает, что $\pi(n)$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n})$ сравнимы (то есть либо $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant \pi(n)$, либо $\pi(n) < \widetilde{\pi}(\widetilde{n})$), а s, $\pi(n)$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n})$ не принадлежат $\bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$. Но так как $O_x \cap \pi(M) = \varnothing$, то пар n, $\widetilde{n}$ таких, что $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant \pi(n)$ и $\pi(n), \widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \notin \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ нет. Положим

$$M' = \left\{ n' : n' \in \widetilde{M} \text{ и найдётся } n \in M \text{ такое, что } \pi(n) < \widetilde{\pi}(n') \right\}.$$

Из вышесказанного вытекает равенство

$$\left(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}}\right) \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} = \left(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|M'}\right) \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$$

и это множество является окрестностью точки x. В свою очередь,

$$\left(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|M'}\right) \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} = C_{\widetilde{\pi}|M'} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \subseteq C_{\widetilde{\pi}|M'}.$$

С одной стороны, $x \in [C_{\widetilde{\pi}|M'}]$, с другой стороны, $C_{\widetilde{\pi}|M'}$ строго вписано в $C_{\pi|M}$ и, следовательно, $x \in [C_{\pi|M} \setminus C_{\widetilde{\pi}|M'}]$. Противоречие. $\square$

Из теорем 3.2 и 3.3 вытекает

С л е д с т в и е 3.1. *Если множество $C_{\pi|M}$ приведённое и M счётно, то*

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \left\{ x : x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \right\} =$$
$$= \cap\left\{ [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ строго вписано в } C_{\pi|M} \right\} \cap (BN \setminus N).$$

Множество всех $\ell_{\pi|M}$-точек для всех строгих антицепей $\pi(M)$ обозначим через $\mathbf{D}$. Теперь, когда мы выделили уже три класса точек нароста, вновь возникает вопросы: есть ли в наросте точки, отличные от u-, ℓ- и, теперь, $\ell_{\pi|M}$-точек? и может ли $\ell_{\pi|M}$-точка быть u- или ℓ-точкой? Ответы дают следующие теоремы.

Т е о р е м а 3.4. *Если $A = \left\{ x_i : i \in \omega \right\} \subseteq BN \setminus N$ состоит из ℓ-точек, то $[A]$ не содержит $\ell_{\pi|M}$-точек для всякой бесконечной строгой антицепи $\pi(M)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть $x \in [A]$ — $\ell_{\pi|M}$-точка для бесконечной строгой антицепи $\pi(M)$. Занумеруем все точки A, лежащие в $[C_{\pi|M}]$, получим

$\{ x_{i_j} : j \in \omega \}$. Рассмотрим x_{i_0}. Так как x_{i_0} — ℓ-точка, лежащая в $[C_{\pi|M}]$, то по теореме 2.2 найдётся $n_0 \in M$, такое что $x_{i_0} \in [C_{\pi(n_0)}]$. Пусть s_0 — элемент сходящейся к x_{i_0} цепи и $\operatorname{dom} s_0 > n_0$. Для x_{i_j} аналогично найдётся $n_j \in M$ такое, что $x_{i_j} \in [C_{\pi(n_j)}]$. Пусть s_j — элемент сходящейся к x_{i_j} цепи и $\operatorname{dom} s_j > \max\{ \operatorname{dom} s_{j-1}, n_j \}$. Обозначим $\{ s_j : j \in \omega \} = \pi'(M')$, при этом из построения очевидно, что $C_{\pi'|M'}$ вписано в $C_{\pi|M}$. Таким образом, $x \in [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]$ и $[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] \cap A = \varnothing$, следовательно $x \notin [A]$. □

Из доказанной теоремы и теоремы 2.5 вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е 3.2. *В $BN \setminus N$ есть точки не являющиеся ни u-, ни ℓ-, ни $\ell_{\pi|M}$-точками.*

Т е о р е м а 3.5. *Пусть $D = \pi_0(M_0)$ — строгая антицепь. Тогда $[D] \setminus D$ не содержит ни u-, ни ℓ-точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть найдётся $x \in [D] \setminus D$ — u-точка. Рассмотрим $C_{\pi'|M'}$ строго вписанное в $C_{\pi_0|M_0}$, тогда по теореме 3.3 $x \in [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi'|M'}]$. Но по определению u-точки существует база точки x, состоящая из множеств вида $[C_{\pi|M}]$, и, соответственно, найдётся $C_{\pi''|M''}$ такое, что $x \in [C_{\pi''|M''}] \subseteq [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi'|M'}]$. Таким образом, $C_{\pi''|M''}$ — строго вписано в $C_{\pi_0|M_0}$, а значит, $x \in [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi''|M''}]$. Противоречие.

Предположим, что $x \in [D] \setminus D$ — ℓ-точка. Найдётся $n \in M_0$ такое, что $x \in [C_{\pi_0(n)}]$. Рассмотрим s — продолжение $\pi_0(n)$, лежащее в сходящейся к x цепи. Тогда с одной стороны $x \notin [C_{\pi|M} \setminus C_s]$, с другой стороны, C_s строго вписано в $C_{\pi|M}$, а значит, $[D] \setminus D \subseteq [C_{\pi|M} \setminus C_s]$. Противоречие. □

Обозначим множество всех $\ell_{\pi|M}$-точек для всевозможных бесконечных строгих антицепей через $\mathbf{D}$. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 3.6. *В наросте $BN \setminus N$ пространства Белла есть точки, не лежащие в множестве $\mathbf{L} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{D}$. Множества $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{D}$ не пересекаются.*

Также упомянем следующий факт.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если $x \in BN \setminus N$ — ℓ-точка и $y \in BN \setminus N$ не ℓ-точка, то не существует гомеоморфизма $f\colon BN \to BN$, естественного на N, при котором $f(x) = y$.*

Это следует из того, что при гомеоморфизме сходящаяся последовательность переходит в сходящуюся последовательность. Таким образом, если такой гомеоморфизм найдётся, то y есть предел сходящейся последовательности, а по теореме, доказанной А. Грызловым в [33], предел некоторой цепи из N, то есть ℓ-точка.

Для u-точек можно усилить теорему 3.5.

О п р е д е л е н и е 3.4. Для $A, B \subseteq N$ будем говорить, что множество A *мажорируется* множеством B, если для всех $s \in A$ найдётся $t \in B$ такое, что $t \geqslant s$.

Т е о р е м а 3.7. *В замыкании любого подмножества N, мажорируемого строгой антицепью, нет u-точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть множество $A \subseteq N$ мажорируется строгой антицепью $\pi'(M')$ и $x \in [A] \setminus A$ — u-точка. Тогда существует база точки x, состоящая из множеств вида $[C_{\pi|M}]$. Таким образом, для любой окрестности O_x точки x найдутся $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $x \in [C_{\pi|M}] \subseteq O_x$. Так как $x \in [A] \setminus A$, то $|C_{\pi|M} \cap A| = \omega$. Из вида множества $C_{\pi|M}$ следует, что если $s \in C_{\pi|M}$, то для всех $t \geqslant s$ выполняется $t \in C_{\pi|M}$. Тогда $|C_{\pi|M} \cap \pi'(M')| = \omega$, то есть $x \in [\pi'(M')]$, что противоречит теореме 3.5. □

С л е д с т в и е 3.3. *Замыкание объединения конечного числа антицепей из N не содержит u-точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть $D = \cup\{ D_i : i \leqslant k \}$, где D_i — антицепь для всех $i \leqslant k$. И пусть $x \in [D]$ — u-точка, тогда найдётся $i \leqslant k$ такое, что $x \in [D_i]$.

Докажем, что любая антицепь мажорируется строгой антицепью. Пусть $D' = \{ t_i : i \in \omega \}$ — антицепь. Пусть $t'_0 = t_0$, а t'_i — продолжение t_i такое, что $\operatorname{dom} t'_i > \max(\operatorname{dom} t_i, \operatorname{dom} t'_{i-1})$. Множество $\widetilde{D} = \{ t'_i : i \in \omega \}$ является строгой антицепью, мажорирующей антицепь D', и по теореме $[D_i]$ не содержит u-точек. Противоречие. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. По теореме, доказанной А. Грызловым в [33], о том, что любое подмножество N, замыкание которого в BN гомеоморфно $\beta\omega$, и вышеуказанному следствию замыкание любого подмножества N, гомеоморфное $\beta\omega$, не содержит u-точек.

Из определения $\ell_{\pi|M}$-точки следует, что множество

$$\{ x : x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \}$$

есть подмножество множества $C^*_{\pi|M} = [C_{\pi|M}] \setminus C_{\pi|M}$. По теореме 3.2 имеем

$$\{ x : x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \} = [\pi(M)] \setminus \pi(M).$$

Множество $\pi(M) \cap C_{\pi(n)}$ состоит из одной точки $\pi(n)$ для всякого $n \in M$. Поэтому если рассматривать эти множества и операцию замыкания в пространстве βN, имеем

$$[\pi(M)] \cap C^*_{\pi(n)} = \varnothing \text{ для всякого } n \in M,$$

следовательно, и $[\pi(M)] \cap \big[\cup\{ C^*_{\pi(n)} : n \in M \}\big] = \varnothing$.

В пространстве BN ситуация совершенно другая: имеем

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) \subseteq \big[\cup\{ C^*_{\pi(n)} : n \in M \}\big],$$

что вытекает из следующих утверждений.

Л е м м а 3.2. *Пусть $x - \ell_{\pi|M}$ точка для некоторого $C_{\pi|M}$ и $C_{\pi'|M'}$ строго вписано в $C_{\pi|M}$. Тогда для всякой окрестности O_x точки x множество*

$$\{ n \in M | O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})| = \omega \}$$

бесконечно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $O_x = \Big[C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant k} C_{\pi_i}\Big]$. По теореме 3.2 $x \in [\pi(M)] \setminus \pi(M)$ и, следовательно, $O_x \cap \pi(M)$ бесконечно. Обозначим это бесконечное множество через

$$R = \{ n \in M : \pi(n) \in O_x \}.$$

Докажем теперь, что для всякого $n \in R$ такого, что $n > k+1$, где k взято из определения $O_x = \big[C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant k} C_{\pi_i}\big]$, выполняется следующее свойство:

$$O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'}) \text{ бесконечно.}$$

Для этого построим по индукции бесконечную цепь $\{ s_i : i \in \omega \}$, лежащую в пересечении

$$O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'}),$$

где $n \in R$ и $n > k+1$.

Из того что $n \in R$, следует, что $\pi(n) \in O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$. Пусть $s_0 = \pi(n)$ — база индукции. Предположим, что мы построили s_j. Построим теперь s_{j+1}.

Так как $n > k+1$, то s_j имеет не менее $k+2$ продолжений, что означает, что найдётся продолжение s_{j+1}, не лежащее ни в C_{π_i} $(i \leqslant k)$, ни в $C_{\pi'|M'}$, а значит, лежащее в $O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$. Таким образом, мы показали, что $O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$ бесконечно.

Так как это выполнено для любого $n \in R$, $n > k+1$, а множество R в свою очередь бесконечно, то множество $\{\, n : |O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})| = \omega \,\}$ бесконечно. Лемма доказана. □

С л е д с т в и е 3.4. *Если множество $C_{\pi|M}$ приведённое и M счётно, то*

$$\{\, x : x - \ell_{\pi|M}\text{-}\textit{точка для } C_{\pi|M} \,\} =$$
$$= \cap\{\, [\cup\{\, C^*_{\pi(n)} \setminus C^*_{\pi'|M'} : n \in M \,\}] : C_{\pi'|M'} \textit{ строго вписано в } C_{\pi|M} \,\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3.2 имеем

$$\{\, x : x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\} \subseteq$$
$$\subseteq \cap\{\, [\cup\{\, C^*_{\pi(n)} \setminus C^*_{\pi'|M'} : n \in M \,\}] : C_{\pi'|M'} \text{ строго вписано в } C_{\pi|M} \,\} \subseteq$$
$$\subseteq \cap\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ строго вписано в } C_{\pi|M} \,\}.$$

По следствию 3.1

$$\cap\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ строго вписано в } C_{\pi|M} \,\} = \{\, x : x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\}.$$

Следствие доказано. □

Из теоремы 3.2 и следствия 3.4 вытекает

С л е д с т в и е 3.5. $[\pi(M)] \setminus \pi(M) \subseteq [\cup\{\, C^*_{\pi(n)} : n \in M \,\}]$.

§ 4. Замыкания счётных подмножеств пространства Белла

Введём некоторые понятия.

О п р е д е л е н и е 4.1. Будем говорить, что $t \in N$ является *строгим* продолжением $s \in N$, если $s < t$.

Приведём несколько утверждений, необходимых в дальнейшем.

Л е м м а 4.1. *Если $A = \{\, t_k : k \in \omega \,\}$ и $B = \{\, s_k : k \in \omega \,\}$ — строгие антицепи, и s_k есть строгое продолжение t_k, то $[A] \cap [B] = \varnothing$.*

Это напрямую вытекает из теоремы 3.3.

Л е м м а 4.2. *Для всякой окрестности $O_x = [C_{\pi|M}]$ u-точки $x \in BN \setminus N$ найдётся окрестность $O'_x = [C_{\pi'|M'}]$ этой точки такая, что $C_{\pi'|M'}$ строго вписано в $C_{\pi|M}$.*

Это следует из следствия 3.1 и того, что классы u- и $\ell_{\pi|M}$-точек не пересекаются.

Напомним известное свойство регулярного пространства.

Л е м м а 4.3. *Пусть $A = \{\, x_i : i \in \omega \,\}$ — счётное дискретное множество в регулярном пространстве X. Тогда существует дизъюнктное семейство окрестностей $\{\, O_{x_i} : i \in \omega \,\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство окрестностей будем строить следующим образом. Для x_0 найдётся окрестность O_{x_0} и открытое множество $U_0 \supseteq [\{\, x_i : i > 0 \,\}]$, такие что $O_{x_0} \cap U_0 = \varnothing$; это вытекает из того, что A — дискретное множество и X — регулярное пространство.

Пусть мы построили окрестности для $i \leqslant r$ $(r \in \omega)$, и U_r — окрестность множества $[\{\, x_i : i > r \,\}]$ такая, что $O_{x_r} \cap U_r = \varnothing$. В силу регулярности пространства X и того, что A — дискретное множество, найдутся $O'_{x_{r+1}}$ и $U'_{r+1} \supseteq [\{\, x_i : i > r+1 \,\}]$ такие, что $O_{x_{r+1}} \cap U_{r+1} = \varnothing$. Так как U_r — открытое множество, содержащее точку x_{r+1} и множество $[\{\, x_i : i > r+1 \,\}]$, то обозначим:

$$O_{x_{r+1}} = O'_{x_{r+1}} \cap U_r \qquad \text{и} \qquad U_{r+1} = U'_{r+1} \cap U_r.$$

Таким образом, мы можем построить дизъюнктную систему окрестностей $\{\, O_{x_i} : i \in \omega \,\}$. □

Так как BN — нормальное пространство, то мы можем пользоваться этим свойством для счётных дискретных его подмножеств.

Т е о р е м а 4.1. *Если $F \subseteq BN \setminus N$ — счётное дискретное множество u-точек, то $[F]$ гомеоморфно βN.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ — счётное дискретное множество u-точек и $\{\, O_{x_n} : n \in \mathbb{N} \,\}$ — дизъюнктное семейство окрестностей этих точек. Поскольку точки x_n $(n \in \mathbb{N})$ являются u-точками, будем считать, что $O_{x_n} = [C_{\pi_n|M_n}]$ для некоторого $\pi_n \in T$ и $M_n \subseteq \omega$.

Построим семейство множеств $\{\, \widetilde{M}_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ и множество $\{\, \widetilde{\pi}_n : n \in \mathbb{N} \,\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

i) семейство $\{\, \widetilde{M}_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ дизъюнктно;

ii) $C_{\widetilde{\pi}_n|\widetilde{M}_n} \subseteq C_{\pi_n|M_n}$;

iii) $x_n \in [C_{\widetilde{\pi}_n|\widetilde{M}_n}]$ для всякого $n \in \mathbb{N}$;

iv) для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует число $m_n \in \{\, 0, \ldots, 2^{n+1}-1 \,\}$ такое, что $\widetilde{M}_n \subseteq \overline{m}_n$, где $\overline{m}_n$ — класс вычетов по mod 2^{n+1}, определяемый числом m_n.

Семейство $\{\, \widetilde{M}_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ и множество $\{\, \widetilde{\pi}_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ будем строить по индукции.

Рассмотрим $O_{x_1} = [C_{\pi_1|M_1}]$. Пусть $\overline{m}_1$ — класс вычетов по mod 2^2 такой, что для $M_1 \cap \overline{m}_1$ выполнено:

$$x \in [C_{\pi_1|M_1 \cap \overline{m}_1}].$$

Положим $\widetilde{M}_1 = M_1 \cap \overline{m}_1$, $\widetilde{\pi}_1 = \pi_1$.

Пусть построены $\{\, \widetilde{M}_i : i \leqslant n \,\}$, $\{\, \widetilde{\pi}_i : i \leqslant n \,\}$. Построим $\widetilde{M}_{n+1}$ и $\widetilde{\pi}_{n+1}$.

Рассмотрим множество $C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}}$. Построим последовательность $\{\, K_\ell \subseteq \omega : \ell \leqslant 2^{n+1} \,\}$ множеств и множество $\{\, \varphi_\ell \in T : \ell \leqslant 2^{n+1} \,\}$ удовлетворяющие следующим условиям:

— $x_{n+1} \in [C_{\varphi_\ell|K_\ell}]$ для всякого $\ell \leqslant 2^{n+1}$;

— $C_{\varphi_{\ell+1}|K_{\ell+1}}$ строго вписано в $C_{\varphi_\ell|K_\ell}$ для всякого $\ell \leqslant 2^{n+1} - 1$.

Второе условие означает, что для всякого $\ell \leqslant 2^{n+1} - 1$ и всякого $j \in K_{\ell+1}$ найдётся $k(j) \in K_\ell$ такое, что $j > k(j)$ и $\varphi_{\ell+1}(j)$ является строгим продолжением $\varphi_\ell(k(j))$.

Положим $\varphi_0 = \pi_{n+1}$, $K_0 = M_{n+1}$. Пусть для $r < 2^{n+1}$ построено семейство $\{\, C_{\varphi_\ell|K_\ell} : \ell \leqslant r \,\}$. Построим K_{r+1} и φ_{r+1}. Так как x_{n+1} есть u-точка, по лемме 4.2 для множества $C_{\varphi_r|K_r}$ найдётся $\varphi_{r+1} \in T$ и $K_{r+1} \subseteq \omega$ такие, что $x_n \in [C_{\varphi_{r+1}|K_{r+1}}]$ и $C_{\varphi_{r+1}|K_{r+1}}$ строго вписано в $C_{\varphi_r|K_r}$. Тогда для всякого $j \in K_{r+1}$ найдётся $k(j) \in K_r$ такое, что $j > k(j)$ и $\varphi_{r+1}(j)$ есть строгое продолжение $\varphi_r(k(j))$.

Проведя это построение вплоть до $\ell = 2^{n+1}$, получим множество $K_{2^{n+1}} \subseteq \omega$ и функцию $\varphi_{2^{n+1}} \in T$ такие, что:

(a) $x_{n+1} \in [C_{\varphi_{2^{n+1}}|K_{2^{n+1}}}]$;

(b) $C_{\varphi_{2^{n+1}}|K_{2^{n+1}}}$ строго вписано в $C_{\varphi_0|K_0}$;

(c) для всякого $j \in K_{2^{n+1}}$ найдётся $k \in K_0$ такое, что $j \geqslant k + 2^{n+1}$ и $\varphi_{2^{n+1}}(j)$ есть строгое продолжение $\varphi_0(k)$.

Напомним, что $\varphi_0 = \pi_{n+1}$ и $K_0 = M_{n+1}$. Пусть $m \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ такое, что для класса вычетов $\overline{m}$ по mod 2^{n+1} выполнено:

$$x_{n+1} \in C_{\varphi_{2^{n+1}}|K_{2^{n+1}} \cap \overline{m}}.$$

Обозначим $K' = K_{2^{n+1}} \cap \overline{m}$.

Рассмотрим произвольное $j \in K'$. По свойству (c) найдётся $k(j) \in K_0$ такое, что будет выполнено неравенство $j \geqslant k(j) + 2^{n+1}$ и $\varphi_{2^{n+1}}(j)$ есть строгое продолжение $\varphi_0(k(j))$. Так как $j \in K_{2^{n+1}} \cap \overline{m}$, то $j = 2^{n+1}p + m$ для некоторого $p \in \omega$.

Рассмотрим число $2^{n+1}(p-1)+m$. Для чисел j, $k(j)$ и $2^{n+1}(p+1)+m$ выполняется неравенство

$$k(j) \leqslant 2^{n+1}(p-1)+m < 2^{n+1}p+m = j.$$

Для множества $\Sigma = \{ 2^{n+1}(p-1)+m+1, \dots , 2^{n+1}p+m \}$ справедливы следующие утверждения:

— $\Sigma \cap K$ состоит из точки $2^{n+1}p+m$;

— $\Sigma \setminus \cup\{ \widetilde{M}_i : i = 1, \dots , n\} \neq \varnothing$.

Последнее условие следует из условия iv), что проверяется несложными вычислениями.

Отсюда следует, что мы можем выбрать число $\ell(j)$ такое, что

$$\ell(j) \in \Sigma \setminus \cup\{ \widetilde{M}_i : i = 1, \dots , n \}.$$

Из построения следует, что $\ell(j) \neq \ell(j')$ для различных $j, j' \in K'$, имеем также

$$k(j) < \ell(j) \leqslant j.$$

Из этого неравенства следует, что $\varphi_{2^{n+2}}(j)$ есть продолжение $\varphi_{2^{n+1}}(\ell(j))$ и, с другой стороны, $\varphi_{2^{n+1}}(\ell(j))$ есть продолжение $\varphi_0(k(j)) = \pi_{n+1}(k(j))$. А отсюда следует, что

$$(*) \qquad C_{\varphi_{2^{n+1}}}(\ell(j)) \supseteq C_{\varphi_{2^{n+1}}}(j) \quad \text{и} \quad C_{\varphi_{2^{n+1}}}(\ell(j)) \subseteq C_{\pi_{n+1}}(k(j)).$$

Обозначим $K'' = \{ \ell(j) : j \in K' \}$. Из $(*)$ имеем $C_{\varphi_{2^{n+1}}|K''} \supseteq C_{\varphi_{2^{n+1}}|K'}$ и, следовательно, $x_{n+1} \in [C_{\varphi_{2^{n+1}}|K''}]$, с другой стороны, $C_{\varphi_{2^{n+1}}|K''} \subseteq C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}}$.

Из построения следует также, что $K'' \cap \left(\cup\{ \widetilde{M}_i : i \leqslant n \}\right) = \varnothing$. Таким образом, K'' и $\varphi_{2^{n+1}}$ удовлетворяют условиям i)–iii). Пусть $q \in \{ 0, \dots , 2^{n+2}-1 \}$ такое, что для класса вычетов $\overline{q}$ по mod 2^{n+2} выполнено $x \in [C_{\pi_{2^{n+1}}|K''\cap\overline{q}}]$. Положим $K'' \cap \overline{q} = \widetilde{M}_{n+1}$ и $\varphi_{2^{n+1}} = \widetilde{\pi}_{n+1}$.

Таким образом, мы построили множество $\widetilde{M}_{n+1}$ и отображение $\widetilde{\pi}_{n+1}$ так, что $\{ \widetilde{M}_i : i = 1, \dots , n, n+1 \}$ и $\{ \widetilde{\pi}_i : i = 1, \dots , n, n+1 \}$ удовлетворяют условиям i)–iv).

Итак, мы построили семейство окрестностей $\{ \widetilde{O}_{x_n} : n \in \mathbb{N} \}$ точек $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$, где $\widetilde{O}_{x_n} = [C_{\widetilde{\pi}_n|\widetilde{M}_n}]$. В силу условий i)–iii) имеем, что для любых подмножеств F, Φ таких, что $F, \Phi \subseteq \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$, $F \cap \Phi = \varnothing$,

$$\left[\cup\{ \widetilde{O}_{x_n} : x_n \in F \}\right] \cap \left[\cup\{ \widetilde{O}_{x_n} : x_n \in \Phi \}\right] = \varnothing$$

и, следовательно, $[F] \cap [\Phi] = \varnothing$. Отсюда следует, что $\left[\{ x_n : n = 1, 2, \dots \}\right]$ гомеоморфно βN. $\square$

Т е о р е м а 4.2. *Пусть $A = \{ x_i : x_i \in F_{f_i},\ i \in \omega \} \subseteq BN \setminus N$ такое, что $f_i \neq f_j$ $(i \neq j)$, то найдётся $A' \subseteq A$ такое, что $[A']$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in [A] \setminus A$ и $f \in P$ такое, что $x \in F_f$. Рассмотрим систему окрестностей $\{ [C_{f|_n}] : n \in \omega \}$ точки x. Так как $x \in [A] \setminus A$, то для любого $n \in \omega$ следует, что $|[C_{f|_n} \cap A]| = \omega$. Но из строения множества A следует, что $|F_f \cap A| = 1$. Тогда найдётся бесконечное $I \subseteq \omega$ такое, что $|[C_{f|_n} \setminus C_{f|_{n+1}}] \cap A| \neq \varnothing$ для $n \in I$. Для каждого $n \in I$ зафиксируем $y_n \in A$ из $[C_{f|_n} \setminus C_{f|_{n+1}}]$. Таким образом, можно построить строгую антицепь $\pi(M)$ такую, что $y_n \in [C_{\pi(n)}]$, из чего следует, что $\left[\{ y_n : n \in \omega \}\right]$ гомеоморфно $\beta\omega$. $\square$

С л е д с т в и е 4.1. *Из любого множества ℓ-точек можно выделить подмножество, замыкание которого гомеоморфно $\beta\omega$.*

Это следует из того факта, что для любого $f \in P$ множество F_f содержит единственную ℓ-точку.

П р и м е р 4.1. Множество в $BN \setminus N$, являющееся сходящейся последовательностью.

Рассмотрим семейство $\{ D_n : n \in \omega \}$ строгих антицепей $D_n = \{ t_k^n : k \in \omega \}$ таких, что t_k^{n+1} есть строгое продолжение t_k^n для всяких $n \in \omega$ и $k \in \omega$. Пусть $\xi = \{F\}$ — свободный ультрафильтр на ω, то есть $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$. Для всяких $F \in \xi$ и $n \in \omega$ обозначим $F_n = \{ t_k^n : k \in F \}$. Тогда $\xi_n = \{ F_n : F \in \xi \}$ является свободным ультрафильтром на множестве D_n. Обозначим $\overline{\xi}_n = \cap\{ [F_n] : F_n \in \xi_n \}$. Имеем $\overline{\xi}_n \in [D_n] \setminus D_n$ и $[D_n]$ гомеоморфно $\beta\omega$ по теореме 1.5.

Заметим, что по лемме 4.1 следует, что $\overline{\xi}_n \neq \overline{\xi}_m$ для $n, m \in \omega$, $n \neq m$.

I. Покажем, что последовательность $\{ \overline{\xi}_n : n \in \omega \}$ является сходящейся. Пусть $y \in BN \setminus N$ — предельная точка для множества $\{ \overline{\xi}_n : n \in \omega \}$ и $O_y = \big[C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big]$ — базисная окрестность точки y. Тогда множество $O_y \cap \{ \overline{\xi}_n : n \in \omega \}$ бесконечно. Рассмотрим некоторое $\overline{\xi}_n \in O_y$. Так как ξ_n — ультрафильтр на множестве D_n, найдётся $F_n \in \xi_n$, $F_n \subseteq D_n$, такое, что $F_n \setminus O_y$ конечно, следовательно, $F_n \setminus \big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big)$ конечно. Отсюда множества $F_n \setminus C_{\pi|M}$ и $F_n \cap \big(\bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big)$ конечны (на самом деле, найдётся $F_n \in \xi_n$ такое, что $F_n \subseteq C_{\pi|M}$ и $F_n \cap \big(\bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big) = \varnothing$).

Покажем, что для любого $m \in \omega$, $m > n$ выполняется $\overline{\xi}_m \in O_y$. По определению, $\xi_m = \{F_m\}$ — ультрафильтр на D_m. Предположим, что $\overline{\xi}_m \notin O_y$. Тогда найдётся $F'_m \in \xi_m$, $F'_m \subseteq F_m$ такое, что $F'_m \cap \big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big)$ конечно; в противном случае множество $\big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big)$ есть элемент ультрафильтра ξ_m и следовательно $\overline{\xi}_m \in O_y$.

Так как $F'_m \subseteq F_m$ и $F_m \setminus C_{\pi|M}$ конечно, то $F'_m \setminus C_{\pi|M}$ тоже конечно. Но тогда $F'_m \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ конечно. Так как y — предельная точка для $\{ \overline{\xi}_n : n \in \omega \}$, найдётся $m' \in \omega$, $m' < m$ такое, что $\xi_{m'} \in O_y$. Рассмотрим множество $F'_{m'} = \{ t_k^{m'} : t_k^m \in F'_m \}$. По определению, $t_k^{m'}$ есть строгое продолжение t_k^m, и поскольку $F'_m \subseteq \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$, за исключением, быть может, конечного числа точек, получаем, что $F'_{m'} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ конечно. Но тогда $F'_{m'} \cap \big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big) = F'_{m'} \cap O_y$ конечно, что противоречит тому, что $\overline{\xi}_{m'} \in O_y$.

Таким образом, мы показали, что $\{ \overline{\xi}_n : n \in \omega \}$ сходится к точке y; обозначим этот предел $\overline{\xi} = y = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{\xi}_n$. Заметим, что всякая $\overline{\xi}_n$ есть $\ell_{\pi|M}$-точка.

II. Докажем ещё несколько интересных свойств построенного множества. Обозначим $R = \{ \overline{\xi} : \xi \in \beta\omega \setminus \omega \}$. Покажем, что точка $\overline{\xi}$ не является ℓ-точкой. Действительно, $\overline{\xi} \in \big[\cup\{ C_{t_k^0} : k \in \omega \}\big]$, где $\{ t_k^0 : k \in \omega \} = D_0$ и $\overline{\xi} \notin [C_{t_k^0}]$ для всех $k \in \omega$. По теореме 2.2 $\overline{\xi}$ не является ℓ-точкой.

Рассмотрим произвольное $k \in \omega$ и множество $Q_k = \{ t_k^n : n \in \omega \}$. Это множество является цепью, и следовательно, $|[Q_k] \setminus Q_k| = 1$, то есть $Q_k = \{ t_k^n : n \in \omega \}$ является сходящейся последовательностью в BN; пусть $q_k = \lim\limits_{n \to \infty} t_k^n$.

Рассмотрим множество $\{ q_k : k \in \omega \}$. Докажем, что $\big[\{ q_k : k \in \omega \}\big]$ гомеоморфно $\beta\omega$. Рассмотрим семейство множеств $\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \}$. Имеем $q_k \in [C_{t_k^k}]$ для всякого $k \in \omega$, и множество $\cup\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \}$ есть элемент булевой алгебры B.

По теореме 1.5 получаем, что $\big[\{ q_k : k \in \omega \}\big]$ гомеоморфно $\beta\omega$.

Покажем,что $\big[\{ q_k : k \in \omega \}\big] \cap \{ \overline{\xi} : \xi \in \beta\omega \setminus \omega \} = \varnothing$. По построению, выполнено включение $\big[\{ q_k : k \in \omega \}\big] \subseteq \big[\cup\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \}\big]$. Покажем, что для всякого $\overline{\xi} = \lim\limits_{m \to \infty} \overline{\xi}_m$ $(\xi \in \beta\omega \setminus \omega)$ выполняется $\overline{\xi} \notin \big[\cup\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \}\big]$. Действительно, для всякого $m \in \omega$ имеем $\overline{\xi}_m \notin \big[\cup\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \}\big]$, так как $\cup\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \} \cap D_m = \{ t_n^m : n \leqslant m \}$. Так как множество $\big[\cup\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \}\big]$ открыто-замкнуто в BN и $\overline{\xi} = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{\xi}_n$, то $\overline{\xi} \notin \big[\cup\{ C_{t_k^k} : k \in \omega \}\big]$.

Известным фактом является то, что в $\beta\omega$ нет точек со счётным характером. Для пространства Белла ситуация аналогична.

Т е о р е м а 4.3. *В $BN \setminus N$ нет точек со счётным характером.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть $x \in BN \setminus N$ и $\{ U_i : i \in \omega \}$ — база точки x. Тогда легко построить последовательность точек из N, сходящуюся к x, и по теореме, доказанной А. Грызловым в [33], x — ℓ-точка. Тогда существует база $\{ O_i : i \in \omega \}$ точки x состоящая из множеств вида $\big[N \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant k} C_{\pi_j}\big]$.

Для каждого O_i найдётся $s_i \in N$ такое, что $x \notin [C_{s_i}] \subseteq O_i$. Для полученного множества $\{ s_i : i \in \omega \}$ пусть $s'_1 = s_1$, s'_i — продолжение s_i, такое что $\operatorname{dom} s'_i > \operatorname{dom} s'_{i-1}$. Рассмотрим π такое, что $x \notin [C_\pi]$, и построим π':

$$\pi' = \begin{cases} s'_i, & \text{если } n = \operatorname{dom} s'_i, \\ \pi(n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что $[N \setminus C_{\pi'}]$ — окрестность точки x и $O_i \setminus [N \setminus C_{\pi'}] \neq \varnothing$ для всех $i \in \omega$, что противоречит тому, что $\{ O_i : i \in \omega \}$ — база точки x. □

Список литературы

1. Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О некоторых бикомпактных расширениях счётных дискретных пространств // Труды мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 36. 2007. С. 23–24.

2. Бастрыков Е.С. Об одной базе расширения Белла // Тезисы XXXVI итоговой студенческой научной конференции. Ижевск: УдГУ, 2008. С. 5–6.

3. Bastrykov E.S. The limits of convergent sequences in Bell's compactification // 24th Summer Conference on Topology and Its Applications. Brno: Brno University of Technology, 2009. P. 19. http://atlas-conferences.com/c/a/x/s/83.htm.

4. Бастрыков Е.С. О пределах сходящихся последовательностей в расширении Белла счётного дискретного пространства // Тезисы 41-й всероссийской школы-конференции. Екатеринбург, 2010. С. 99–103.

5. Бастрыков Е.С. О подмножествах расширения Белла, не гомеоморфных $\beta\omega$ // Тезисы 42-й всероссийской школы-конференции. Екатеринбург, 2011. С. 257.

6. Rudin W. Homogenety problems in the theory of Čech compactifications // Duke Math. J. 1956. Vol. 23. № 3. P. 409–426.

7. Shelah S. On p-points $\beta\omega$ and other results in general topology // Notices Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 35 A-365. № 87T-G. P. 49.

8. Kunen K. Weak p-points in N^* // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 23 Topology. Budapest, 1978. P. 741–749.

9. Грызлов А.А. К теории пространства βN // Общая топология. Отображения топологических пространств. М.: МГУ, 1986. С. 20–34.

10. Frolik Z. Homogenity problems for extremally disconnected spaces // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1967. Vol. 8. P. 757–763.

11. Frolik Z. Sums of ultrafilters // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. P. 87–91.

12. Rudin M.E. Types of ultrafilters // Topology Seminar. Wisconsin, 1965. P. 145.

13. Rudin M.E. Partial orders on the types in βN // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 155. № 2. P. 353–362.

14. van Mill J. Sixteen topological types in $\beta\omega \setminus \omega$ // Topol. App. 1982. Vol. 13. P. 43–57.

15. Kunen K. Ultrafilters and independent sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 172. P. 295–306.

16. Gryzlov A.A. On the Rudin – Keisler order on ultrafilters // Topol. Appl. 1997. Vol. 76. P. 151–155.

17. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25. http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf.

18. J. van Mill. Weak p-points in compact P-spaces // Topology Proceedings. 1979. Vol. 4. № 2. P. 605–628.

19. J. van Mill. An introduction to $\beta\omega \setminus \omega$ / Handbook of Set-Theoretic Topology Amsterdam, 1984. P. 506–567.

20. J. van Mill. Weak p-points in Chech – Stone compactifications // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 173. № 2. P. 657–678.

21. Грызлов А.А. О бикомпактых расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 3. С. 803–848. http://www.math.msu.su/fpm/rus/96/963/96306t.htm.

22. Gryzlov A.A. Independent matrices and some points of $\beta\tau$ // Topol. Appl. 2002. Vol. 107. P. 79–81.

23. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. 2010. Vol. 35. P. 177–185. http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v35/.

24. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.

25. Бастрыков Е.С. О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 3–6. http://vestnik.udsu.ru/2009/2009-014/vuu_09_014_01.pdf.

26. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С. Некоторые центрированные системы множеств и определяемые ими точки // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 4. С. 76–82.

27. Бастрыков Е.С. О замыканиях счетных подмножеств BN // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 15–20.

28. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С. О замыканиях счётных множеств в пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 37–42.

29. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.

30. Архангельский А.В., Пономарёв В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.

31. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. № 6. С. 29–34.

32. Сикорский Р. Булевы алгебры. М: Мир, 1969. 376 с.

33. Gryzlov A.A. On convergent sequences and copies of βN in the Stone space of one boolean algebra // Topology Proceedings. 2013. Vol. 42. P. 165–171.

Поступила в редакцию 01.02.2013

E. S. Bastrykov

Point classes of compactifications of discrete spaces

We consider the compactification of one countable discrete space. This compactification is constructed as the Stone space of some Boolean algebra. We obtained some classes of points of remainder of this space, found dependence to the closures of countable subsets of these classes and also proved the existence of subsets of remainder whose closures are homeomorphic to a minimal (one-point) compactification of a countable discrete space, and subsets whose closure is homeomorphic to the Stone–Ĉzech space. We considered other properties of this space.

Keywords: compactification, Stone–Ĉzech space, discrete space, convergent sequence, Stone space of Boolean algebra

Mathematical Subject Classifications: 54D35, 54D80, 54-06

Бастрыков Евгений Станиславович, старший преподаватель, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: bastrykov@gmx.com

Bastrykov Evgenii Stanislavovich, Senior Lecturer, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia. E-mail: bastrykov@gmx.com