УДК 517.958+517.984.5

© *Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ДВУМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА[1]

Доказана абсолютная непрерывность спектра двумерного обобщенного периодического оператора Шредингера с непрерывной метрикой g и скалярным потенциалом V, если коэффициенты Фурье функций $g^{\pm 1/2}$ удовлетворяют условию $\sum |N|^{1/2}|(g^{\pm 1/2})_N| < +\infty$ и скалярный потенциал V имеет нулевую грань относительно оператора $-\Delta$ в смысле квадратичных форм.

Ключевые слова: обобщенный оператор Шредингера, абсолютная непрерывность спектра, периодический потенциал.

Введение

Рассмотрим двумерный обобщенный периодический оператор Шредингера

$$\widehat{H}_g + V = \sum_{j=1}^{2} \big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big) g \big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big) + V, \tag{0.1}$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^2)$, где положительная функция $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и скалярный потенциал $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — периодические функции с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ и g, $g^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $\{E_j\}$ — базис решетки Λ, K — элементарная ячейка решетки Λ, K^* — элементарная ячейка обратной решетки Λ^* с базисными векторами E_j^*, удовлетворяющими условиям $(E_j^*, E_l) = \delta_{jl}$ (где δ_{jl} — символ Кронекера). Скалярные произведения и нормы в пространствах $L^2(\mathbb{R}^2)$ и $L^2(K)$ вводятся обычным образом, при этом предполагается линейность по второму аргументу (в обозначениях пространство $L^2(K)$ не всегда будет явно указываться). Пусть $H^s(\mathbb{R}^2)$ — класс Соболева порядка $s \geqslant 0$, $\widetilde{H}^s(K)$ — множество функций $\varphi : K \to \mathbb{C}$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов Λ) принадлежат $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Функции, определенные на элементарной ячейке K, в дальнейшем будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbb{R}^2$. Через

$$\varphi_N = v^{-1}(K) \int_K \varphi(x)\, e^{-2\pi i\,(N,x)}\, dx\,, \quad N \in \Lambda^*,$$

обозначаются коэффициенты Фурье функций $\varphi \in L^1(K)$, где $v(.)$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ — множество периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ функций $\mathcal{F} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ таких, что для любой функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ функция $\mathcal{F}\varphi$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^2)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_{\varepsilon,\mathcal{F}} \geqslant 0$ такая, что для всех функций $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant \varepsilon\, \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{C}^2)} + C_{\varepsilon,\mathcal{F}}\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{0.2}$$

Через $\mathcal{L}^{\frac12}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ обозначим множество непрерывных периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|f\|_{(\frac12)} \doteq \sum_{N \in \Lambda^*} \big(2\pi|N|\big)^{\frac12}\, |f_N| < +\infty.$$

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 12–01–00195.

Т е о р е м а 0.1. *Спектр обобщенного периодического оператора Шредингера* (0.1) *абсолютно непрерывен, если* $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ *и для положительной функции* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *функции* $\sqrt{g}$ *и* $\frac{1}{\sqrt{g}}$ *принадлежат пространству* $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$.

Двумерный обобщенный периодический оператор Шредингера

$$\widehat{H}_{\widehat{G},\,A} + V = \sum_{j,\,l\,=\,1}^{2} \big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\big) G_{jl} \big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_l} - A_l\big) + V \tag{0.3}$$

рассматривался в [1–8]. При этом скалярный и векторный потенциалы $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, а также матричная функция (метрика) $\widehat{G} = \{G_{jl}\}_{j,\,l\,=\,1,\,2}$ предполагаются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Матричная функция $\widehat{G}$ является вещественной, симметрической и положительно определенной и, кроме того, $c_1 \widehat{I} \leqslant \widehat{G}(x) \leqslant c_2 \widehat{I}$ при почти всех (п.в.) $x \in \mathbb{R}^2$, $0 < c_1 \leqslant c_2$ ($\widehat{I}$ — единичная 2×2-матрица).

В [8] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.3), если

$$\det \widehat{G} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \det \widehat{G} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)\,, \quad j = 1,\,2\,, \tag{0.4}$$

$$A_j \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)\,, \quad j = 1,\,2\,, \tag{0.5}$$

и скалярный потенциал V определяется как обобщенная функция $\frac{d\mu}{dx}$, где μ — периодический борелевский заряд, удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям (см. [7]). В частности, можно предполагать, что $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — измеримая функция и $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$. В доказательстве используется периодическая изотермическая замена координат, приводящая матричную функцию $\widehat{G}$ к скалярному виду $g\widehat{I}$. Другое доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора (0.3), не использующее периодической замены координат и опирающееся на результаты о двумерном периодическом операторе Дирака, приведено в [9–11]. В [11] на матричную функцию $\widehat{G}$ и векторный потенциал A накладывались те же ограничения (0.4) и (0.5), а скалярный потенциал V задавался в виде эрмитовой формы $\mathcal{V}(\psi,\varphi)$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ с областью определения $Q(\mathcal{V}) = H^1(\mathbb{R}^2) \ni \psi,\ \varphi$, для которой

1) $\mathcal{V}(\psi(.-N),\varphi(.-N)) = \mathcal{V}(\psi,\varphi)$ для всех $\psi,\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ и всех $N \in \Lambda$;
2) $\mathcal{V}(e^{\,i\,(k,x)}\psi,\varphi) = \mathcal{V}(\psi, e^{-i\,(k,x)}\varphi)$ для всех $k \in \mathbb{R}^2$ (и всех $\psi,\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$);
3) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\mathcal{V}) \geqslant 0$ такое, что для всех $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$

$$|\mathcal{V}(\varphi,\varphi)| \leqslant \varepsilon\, \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{C}^2)} + C_\varepsilon\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.$$

Рассматриваемые формы $\mathcal{V}$ для функций $\psi,\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap C_0(\mathbb{R}^2)$ (где $C_0(\mathbb{R}^2)$ — пространство финитных функций из $C(\mathbb{R}^2)$) могут иметь вид

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi}\varphi\, d\mu\,, \tag{0.6}$$

где μ — периодический с решеткой периодов Λ борелевский заряд (с локально конечной полной вариацией). Однако не всякую такую форму можно представить в виде (0.6) (см. [9]). В частности (как и выше), можно предполагать, что

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} V\overline{\psi}\varphi\, dx\,,$$

где $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, для которой $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$.

Исследованию вопроса об абсолютной непрерывности спектра d-мерных (при $d \geqslant 3$) (обобщенных) периодических операторов Шредингера посвящены многие работы (см. [3, 4, 12–18] и более поздние статьи [19–23], а также ссылки в этих статьях).

Целью настоящей работы является получение новых условий на функцию g, обеспечивающих абсолютную непрерывность спектра двумерного обобщенного периодического оператора Шредингера (0.1). Относительно условий, при которых матричная функция $\widehat{G}$ с помощью периодической изотермической замены координат приводится к скалярному виду $g\widehat{I}$, см. [8]. Чтобы не усложнять доказательства, предполагается, что $A \equiv 0$, и скалярный потенциал $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ выбирается в виде измеримой функции, для которой $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство теоремы 0.1 приведено в § 1. В § 2 доказывается лемма 1.1, а в § 3 — теорема 1.2, используемая при доказательстве теоремы 0.1.

§ 1. Доказательство теоремы 0.1

Оператор $\widehat{H}_g + V$ определяется с помощью полуторалинейной формы

$$W_g(\psi,\varphi) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} g\, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V\overline{\psi}\varphi\, dx,$$

задаваемой в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и имеющей область определения $Q(W_g) = H^1(\mathbb{R}^2) \ni \psi,\ \varphi$. Так как $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, то скалярный потенциал V имеет нулевую грань относительно оператора $-\Delta$ в смысле квадратичных форм. Поэтому форма W_g замкнута и полуограничена и (в силу KLMN-теоремы) порождает самосопряженный оператор $\widehat{H}_g + V$ (см., например, [24]).

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$W_g(k+i\varkappa e;\psi,\varphi) = \sum_{j=1}^{2} \biggl(\Bigl(k_j - i\varkappa e_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigr)\psi, g\Bigl(k_j + i\varkappa e_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigr)\varphi\biggr)_{L^2(K)} + \int_K V\overline{\psi}\varphi\, dx\,,$$

$$\psi,\ \varphi \in Q(W_g(k+i\varkappa e;.,.)) = \widetilde{H}^1(K),$$

заданную в $L^2(K)$, где $k \in \mathbb{R}^2$, $e \in S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$, $\varkappa \in \mathbb{R}$. Из выбора функций g и V следует, что для всех $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^2$ форма $W_g(k+i\varkappa e;.,.)$ является замкнутой и секториальной. Поэтому она порождает m -секториальный оператор

$$\widehat{H}_g(k+i\varkappa e) + V = \sum_{j=1}^{2} \biggl(\Bigl(k_j + i\varkappa e_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigr) g \Bigl(k_j + i\varkappa e_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigr) + V$$

с некоторой областью определения $D(\widehat{H}_g(k+i\varkappa e) + V) \subset \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$ (не зависящей от комплексного вектора $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^2$) [24, 25]. Операторы $\widehat{H}_g(k) + V$ (при $\varkappa = 0$) являются (полуограниченными) самосопряженными операторами с компактной резольвентой и, следовательно, с дискретным спектром. Если векторы $k \in \mathbb{R}^2$ и $e \in S^1$ фиксированы, то операторы $\widehat{H}_g(k+\zeta e) + V$, $\zeta \in \mathbb{C}$, образуют самосопряженное аналитическое семейство типа (B) (см. [25]).

Оператор $\widehat{H}_g + V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*} \oplus\, (\widehat{H}_g(k) + V)\, \frac{dk}{(2\pi)^2\, v(K^*)}\,.$$

Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [3,4]. Сингулярный спектр оператора $\widehat{H}_g + V$ пуст. Если λ — собственное значение (бесконечной кратности) оператора $\widehat{H}_g + V$, то из аналитической теоремы Фредгольма следует, что λ — собственное значение операторов $\widehat{H}_g(k+i\varkappa e) + V$ при всех $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^2$. Поэтому для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) достаточно показать, что существует вектор $e \in S^1$ такой, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдутся вектор $k \in \mathbb{R}^2$ и число $\zeta \in \mathbb{C}$, для которых λ не является собственным значением оператора $\widehat{H}_g(k+\zeta e) + V$. Следовательно, теорема 0.1 вытекает из приводимой ниже теоремы 1.1.

Используемый здесь метод доказательства был впервые предложен в статье [12], в которой рассматривался трехмерный периодический оператор Шредингера.

Зафиксируем вектор $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$. Пусть $e \doteq |\gamma|^{-1}\gamma \in S^1$. Ортогональный базис $\{E_j\}_{j=1,2}$ в $\mathbb{R}^2$ выберем так, что $E_1 = e$. Для всех $N \in \Lambda^*$, $k \in \mathbb{R}^2$ и $\varkappa \in \mathbb{R}$ положим

$$G_N^{\pm} = G_N^{\pm}(k + i\varkappa e) \doteq \bigl((k_1 + 2\pi N_1)^2 + (\varkappa \pm (k_2 + 2\pi N_2))^2\bigr)^{\frac{1}{2}}.$$

Будем далее выбирать векторы $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$. В этом случае

$$G_N^{\pm} \geqslant |k_1 + 2\pi N_1| \geqslant \frac{\pi}{|\gamma|}\,, \quad \max_{\pm} G_N^{\pm} \geqslant |\varkappa|\,, \quad G_N^{+}G_N^{-} = |(k + 2\pi N + i\varkappa e)^2| \geqslant 2\pi\,\frac{|\varkappa|}{|\gamma|}\,.$$

Для всех $s \geqslant 0$ определим положительные операторы $\widehat{G}_{\pm}^{s} = \widehat{G}_{\pm}^{s}(k + i\varkappa e)$:

$$\widehat{G}_{\pm}^{s}\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \bigl(G_N^{\pm}(k + i\varkappa e)\bigr)^s \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \varphi \in D(\widehat{G}_{\pm}^{s}) = \widetilde{H}^s(K).$$

Далее используются краткие обозначения $\widehat{G}_{\pm} = \widehat{G}_{\pm}^{1}$. Операторы $\widehat{G}_{+}$ и $\widehat{G}_{-}$ коммутируют между собой. Если $s' \geqslant s \geqslant 0$, то операторы $\widehat{G}_{\pm}^{s}$ непрерывно отображают класс Соболева $\widetilde{H}^{s'}(K)$ на класс Соболева $\widetilde{H}^{s'-s}(K)$. Справедливо равенство $\widehat{G}_{\pm}(k + i\varkappa e) = \widehat{G}_{\mp}(k - i\varkappa e)$.

На пространстве $\mathcal{L}_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим также норму

$$\|f\|_{\frac{1}{2}} \doteq \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \sqrt{1 + 2\pi|N|}\,|f_N|\,.$$

Пространство $(\mathcal{L}_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2), \|.\|_{\frac{1}{2}})$ является банаховым и, более того, если $f,\ \widetilde{f} \in \mathcal{L}_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$, то

$$\|\,f\widetilde{f}\,\|_{\frac{1}{2}} = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \sqrt{1 + 2\pi|N|}\,\biggl|\sum_{M\,\in\,\Lambda^*} f_{N-M}\widetilde{f}_M\biggr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N\,\in\,\Lambda^*}\ \sum_{M\,\in\,\Lambda^*} \sqrt{1 + 2\pi|N - M|}\ |f_{N-M}| \cdot \sqrt{1 + 2\pi|M|}\ |\widetilde{f}_M| = \|f\|_{\frac{1}{2}}\|\,\widetilde{f}\,\|_{\frac{1}{2}}$$

(использовано неравенство $\sqrt{1 + 2\pi|N_1 + N_2|} \leqslant \sqrt{1 + 2\pi|N_1|}\,\sqrt{1 + 2\pi|N_2|}$, справедливое для всех векторов $N_1,\ N_2 \in \Lambda^*$), поэтому $(\mathcal{L}_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2), \|.\|_{\frac{1}{2}})$ — банахова алгебра.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, для которой $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и для положительной непрерывной функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ выполняются включения $\sqrt{g},\ \frac{1}{\sqrt{g}} \in \mathcal{L}_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$; $e = E_1 = |\gamma|^{-1}\gamma,\ \gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$. Тогда найдутся константа $C = C(|\gamma|) > 0$ и сколь угодно большие числа $\varkappa > 0$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$\sup_{\psi\,\in\,\widetilde{H}^1(K)\,:\,\|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}}(k+i\varkappa e)\psi\|_{L^2(K)}\,\leqslant\,1} |W_{g,\,V-\lambda}(k + i\varkappa e; \psi, \varphi)| \geqslant \tag{1.1}$$

$$\geqslant C\,\biggl\|\frac{1}{\sqrt{g}}\biggr\|_{\frac{1}{2}}^{-2} \|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\varphi\|_{L^2(K)}\,.$$

Доказательство теоремы 1.1 приведено в конце этого параграфа. Оно опирается на теорему 1.2 и леммы 1.1 и 1.2.

Т е о р е м а 1.2. *Для любой функции $f \in \mathcal{L}_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ найдутся сколь угодно большие числа $\varkappa > 0$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, и всех функций*

$\psi,\, \varphi \in L^2(K)$ *выполняется неравенство*

$$
\begin{aligned}
&|(\widehat{G}_+^{\frac12}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_-^{-\frac12}(k+i\varkappa e)\psi, f\widehat{G}_-^{\frac12}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_+^{-\frac12}(k+i\varkappa e)\varphi)_{L^2(K)}| \leqslant \\
&\qquad \leqslant C_1\|f\|_{\frac12}\|\psi\|_{L^2(K)}\|\varphi\|_{L^2(K)},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где $C_1 = C_1(|\gamma|) > 0$ *— некоторая константа* ($\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ *и* $e = E_1 = |\gamma|^{-1}\gamma$).

З а м е ч а н и е 1.1. Если в неравенстве (1.2) сделать замену $\psi \mapsto \widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi$ и $\varphi \mapsto \widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi$, то получится неравенство

$$
|(\widehat{G}_+\psi, f\widehat{G}_-\varphi)| \leqslant C_1\|f\|_{\frac12}\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|\,, \quad \psi,\, \varphi \in \widetilde{H}^1(K).
$$

Теорема 1.2 доказывается в § 3. Доказательство следующей леммы приведено в § 2.

Л е м м а 1.1. *Для любого тригонометрического многочлена* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ (*с решеткой периодов* $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$) *найдется число* $\widetilde{\varkappa}_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$, *всех векторов* $k \in \mathbb{R}^2$, *для которых* $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, *и всех функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ *справедлива оценка*

$$
\|\widehat{G}_+^{\frac12}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_-^{\frac12}(k+i\varkappa e)(f\varphi)\|_{L^2(K)} \leqslant C_2\,\|f\|_{\frac12}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_-^{\frac12}(k+i\varkappa e)\varphi\|_{L^2(K)},
$$

где $C_2 = C_2(|\gamma|) > 0$ *— некоторая константа* ($\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$).

Л е м м а 1.2. *Пусть* $\widetilde{V} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ (*и* $e = E_1 = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\varkappa_0 = \varkappa_0(\varepsilon, |\gamma|, \widetilde{V}) > 0$ *такое, что для всех* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, *всех векторов* $k \in \mathbb{R}^2$, *для которых* $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, *и всех функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$
\|\widetilde{V}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant \varepsilon\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_-^{\frac12}(k+i\varkappa e)\varphi\|_{L^2(K)}\,.
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (0.2) следует, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$ справедлива оценка

$$
\|\widetilde{V}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,\|(k-i\nabla)\varphi\|_{L^2(K;\mathbb{C}^2)} + C_{\frac{\varepsilon}{4},\widetilde{V}}\,\|\varphi\|_{L^2(K)}, \quad \varphi \in \widetilde{H}^1(K)
$$

(см., например, доказательство теоремы 3 в [23]). Для функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ определим функции $\varphi_\pm \in \widetilde{H}^1(K)$ с коэффициентами Фурье (для всех $N \in \Lambda^*$)

$$
(\varphi_+)_N = \begin{cases} \varphi_N, & \text{если } k_2 + 2\pi N_2 \geqslant 0, \\ 0\,, & \text{если } k_2 + 2\pi N_2 < 0, \end{cases}
$$

$$
(\varphi_-)_N = \begin{cases} 0\,, & \text{если } k_2 + 2\pi N_2 \geqslant 0, \\ \varphi_N, & \text{если } k_2 + 2\pi N_2 < 0; \end{cases}
$$

$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{V}\varphi\| \leqslant \|\widetilde{V}\varphi_+\| + \|\widetilde{V}\varphi_-\| &\leqslant \frac{\varepsilon}{4}\left(\|(k-\varkappa-i\nabla)\varphi_+\| + \|(k+\varkappa-i\nabla)\varphi_-\|\right) + C_{\frac{\varepsilon}{4},\widetilde{V}}\left(\|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|\right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4}\left(\|\widehat{G}_-\varphi_+\| + \|\widehat{G}_+\varphi_-\|\right) + 2\,C_{\frac{\varepsilon}{4},\widetilde{V}}\,\|\varphi\|.
\end{aligned}
$$

Выберем теперь любое положительное число

$$
\varkappa_0 = \varkappa_0(\varepsilon.|\gamma|, \widetilde{V}) \geqslant 8\pi^{-1}|\gamma|\,\varepsilon^{-2}\,C^2_{\frac{\varepsilon}{4},\widetilde{V}}\,.
$$

Пусть $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ и $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$. Так как $\widehat{G}_N^+(k+i\varkappa e)\widehat{G}_N^-(k+i\varkappa e) \geqslant 2\pi\varkappa|\gamma|^{-1}$, $N \in \Lambda^*$, то

$$
\|\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{|\gamma|}{2\pi\varkappa}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|. \tag{1.3}
$$

Кроме того, $\widehat{G}_N^+(k+i\varkappa e) \geqslant \widehat{G}_N^-(k+i\varkappa e)$, если $k_2+2\pi N_2 \geqslant 0$, и $\widehat{G}_N^-(k+i\varkappa e) > \widehat{G}_N^+(k+i\varkappa e)$ при $k_2+2\pi N_2 < 0$, поэтому

$$\|\widehat{G}_-\varphi_+\| \leqslant \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi_+\|, \quad \|\widehat{G}_+\varphi_-\| \leqslant \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|.$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{V}\varphi\| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + 2\,C_{\frac{\varepsilon}{4},\widetilde{V}}\sqrt{\frac{|\gamma|}{2\pi\varkappa}}\right)\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\| \leqslant \varepsilon\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|.$$

Лемма 1.2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.1. Пусть $C_1 = C_1(|\gamma|) > 0$ и $C_2 = C_2(|\gamma|) > 0$ — константы из теоремы 1.2 и леммы 1.1. Выберем числа $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ и $\varepsilon > 0$ так, что

$$6\delta\,C_1\,\|\sqrt{g}\|^2_{\frac{1}{2}} \;\leqslant\; \frac{1}{18}\,C_2^{-1}\left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|^{-2}_{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

$$3\,\varepsilon^2 \;\leqslant\; \frac{1}{18}\,C_2^{-1}\left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|^{-2}_{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Существует вещественнозначный тригонометрический многочлен $\mathcal{G}$ (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$), для которого

$$\|\sqrt{g}\,\mathcal{G}-1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \;\leqslant\; \|\sqrt{g}\,\mathcal{G}-1\|_{\frac{1}{2}} \;\leqslant\; \|\sqrt{g}\|_{\frac{1}{2}}\left\|\mathcal{G}-\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

(тогда $\mathcal{G}(x) \geqslant \frac{2}{3}\,g^{-\frac{1}{2}}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^2$). Из (1.6), в частности, следует оценка

$$\|\mathcal{G}\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|_{\frac{1}{2}}\|\sqrt{g}\,\mathcal{G}\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{3}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|_{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Так как

$$\mathcal{G}^{-1}-\sqrt{g} \;=\; \frac{\sqrt{g}}{1+(\sqrt{g}\,\mathcal{G}-1)}-\sqrt{g} \;=\; \sqrt{g}\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l(\sqrt{g}\,\mathcal{G}-1)^l,$$

то $\mathcal{G}^{-1} \in \mathcal{L}_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ и

$$\|\,\mathcal{G}^{-1}-\sqrt{g}\,\|_{\frac{1}{2}} \;\leqslant\; \|\sqrt{g}\|_{\frac{1}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\|\sqrt{g}\,\mathcal{G}-1\|^l_{\frac{1}{2}} \leqslant \delta(1-\delta)^{-1}\|\sqrt{g}\|_{\frac{1}{2}} \leqslant 2\delta\,\|\sqrt{g}\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \|\sqrt{g}\|_{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим $\widetilde{g} = g-\mathcal{G}^{-2} \in \mathcal{L}_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$. Из предыдущих оценок получаем

$$\|\widetilde{g}\|_{\frac{1}{2}} = \|g-\mathcal{G}^{-2}\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \|\,\mathcal{G}^{-1}-\sqrt{g}\,\|_{\frac{1}{2}}\left(\|\,\mathcal{G}^{-1}-\sqrt{g}\,\|_{\frac{1}{2}}+2\|\sqrt{g}\|_{\frac{1}{2}}\right) \leqslant 6\delta\,\|\sqrt{g}\|^2_{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\widehat{p}_j = k_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,2$; $\widehat{p}_\pm = \widehat{p}_1 \pm \widehat{p}_2$. Справедливы равенства

$$W_{g,V-\lambda}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi) = \tag{1.8}$$

$$= \frac{1}{2}\left((\widehat{p}_+-i\varkappa)\psi, g(\widehat{p}_++i\varkappa)\varphi\right) + \frac{1}{2}\left((\widehat{p}_--i\varkappa)\psi, g(\widehat{p}_-+i\varkappa)\varphi\right) + \int_K (V-\lambda)\,\overline{\psi}\varphi\,dx =$$

$$= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \int_K (V-\lambda)\,\overline{\psi}\varphi\,dx\,,$$

где

$$\mathcal{X}_1 = \frac{1}{2}\big((\widehat{p}_+ - i\varkappa)\psi, \widetilde{g}(\widehat{p}_+ + i\varkappa)\varphi\big) + \frac{1}{2}\big((\widehat{p}_- - i\varkappa)\psi, \widetilde{g}(\widehat{p}_- + i\varkappa)\varphi\big),$$

$$\mathcal{X}_2 = \frac{1}{2}\big((\widehat{p}_+ - i\varkappa)\psi, \mathcal{G}^{-2}(\widehat{p}_+ + i\varkappa)\varphi\big) + \frac{1}{2}\big((\widehat{p}_- - i\varkappa)\psi, \mathcal{G}^{-2}(\widehat{p}_- + i\varkappa)\varphi\big).$$

Вначале оценим $|\mathcal{X}_1|$. Так как

$$(\widehat{p}_\pm - i\varkappa)\psi \;=\; \sum_{N\,\in\,\Lambda^*}\big((k_1 + 2\pi N_1) \pm i(k_2 + 2\pi N_2 \mp \varkappa)\big)\psi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)},$$

$$(\widehat{p}_\pm + i\varkappa)\varphi \;=\; \sum_{N\,\in\,\Lambda^*}\big((k_1 + 2\pi N_1) \pm i(k_2 + 2\pi N_2 \pm \varkappa)\big)\varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)},$$

то

$$(\widehat{p}_+ - i\varkappa)\psi \;=\; \widehat{G}_-(k + i\varkappa e)\,\psi', \quad (\widehat{p}_- - i\varkappa)\psi \;=\; \widehat{G}_+(k + i\varkappa e)\,\psi'',$$

$$(\widehat{p}_+ + i\varkappa)\varphi \;=\; \widehat{G}_+(k + i\varkappa e)\,\varphi', \quad (\widehat{p}_- + i\varkappa)\varphi \;=\; \widehat{G}_-(k + i\varkappa e)\,\varphi'',$$

где для каждого $N \in \Lambda^*$ модули коэффициентов Фурье функций ψ', $\psi'' \in \widetilde{H}^1(K)$ совпадают с модулями коэффициентов Фурье функции $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$, а модули коэффициентов Фурье функций φ', $\varphi'' \in \widetilde{H}^1(K)$ совпадают с модулями коэффициентов Фурье функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$. Из теоремы 1.2 и замечания 1 следует, что существует неограниченное сверху множество $\mathbb{M} \subseteq (0, +\infty)$ такое, что для всех $\varkappa \in \mathbb{M}$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, и всех функций ψ, $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\big|\big((\widehat{p}_+ - i\varkappa)\psi, \widetilde{g}(\widehat{p}_+ + i\varkappa)\varphi\big)\big| \;=\; |(\widehat{G}_-\psi', \widetilde{g}\,\widehat{G}_+\varphi')| \;=\; |(\widehat{G}_+\varphi', \widetilde{g}\,\widehat{G}_-\psi')| \;\leqslant$$

$$\leqslant\; C_1\,\|\widetilde{g}\|_{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi'\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi'\| \;\leqslant\; 6\delta\, C_1\,\|\sqrt{g}\|^2_{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,,$$

$$\big|\big((\widehat{p}_- - i\varkappa)\psi, \widetilde{g}(\widehat{p}_- + i\varkappa)\varphi\big)\big| \;=\; |(\widehat{G}_+\psi'', \widetilde{g}\,\widehat{G}_-\varphi'')| \;\leqslant$$

$$\leqslant\; C_1\,\|\widetilde{g}\|_{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi''\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi''\| \;\leqslant\; 6\delta\, C_1\,\|\sqrt{g}\|^2_{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,.$$

Откуда

$$|\mathcal{X}_1| \;\leqslant\; 6\delta\, C_1\,\|\sqrt{g}\|^2_{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,. \tag{1.9}$$

Теперь последний интеграл в правой части равенства (1.8) оценим с помощью леммы 1.2. Пусть $\mathbb{M}' = \mathbb{M} \cap [\varkappa_0(\varepsilon, |\gamma|, \sqrt{|V|}), +\infty)$ (где число $\varkappa_0(\varepsilon, |\gamma|, \sqrt{|V|})$ определяется для функции $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ в лемме 1.2). Тогда для всех $\varkappa \in \mathbb{M}'$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, и всех функций ψ, $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ из леммы 1.2 (и неравенства (1.3)) получаем

$$\left|\int_K (V - \lambda)\,\overline{\psi}\varphi\, dx\right| \;\leqslant\; \|\sqrt{|V|}\,\psi\| \cdot \|\sqrt{|V|}\,\varphi\| + |\lambda|\,\|\psi\| \cdot \|\varphi\| \;\leqslant \tag{1.10}$$

$$\leqslant\; \left(\varepsilon^2 + \frac{|\gamma|}{2\pi\varkappa}\,|\lambda|\right)\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,.$$

Наконец, рассмотрим второе слагаемое $\mathcal{X}_2$ в правой части равенства (1.8). Для $\mathcal{X}_2$ справедливо тождество

$$\mathcal{X}_2 = \big((\widehat{p}_+ - i\varkappa)\mathcal{G}^{-1}\psi, (\widehat{p}_+ + i\varkappa)\mathcal{G}^{-1}\varphi\big) + \big(\psi, \mathcal{G}^{-1}(\Delta\,\mathcal{G}^{-1})\varphi\big),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Для заданной функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ (и для чисел $\varkappa \in \mathbb{M}'$ и векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$) будем далее выбирать ненулевую функцию $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\big((\widehat{p}_+ - i\varkappa)\mathcal{G}^{-1}\psi, (\widehat{p}_+ + i\varkappa)\mathcal{G}^{-1}\varphi\big) \;=\; \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\mathcal{G}^{-1}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\mathcal{G}^{-1}\varphi\|\,.$$

Такую функцию ψ можно выбрать, так как для всех $N \in \Lambda^*$

$$\big|\big((k_1+2\pi N_1)-i(k_2+2\pi N_2-\varkappa)\big)\big((k_1+2\pi N_1)+i(k_2+2\pi N_2+\varkappa)\big)\big| = G_N^+(k+i\varkappa)G_N^-(k+i\varkappa)$$

(и $\mathcal{G}$ — тригонометрический многочлен). Пусть $\widetilde{\varkappa}_0>0$ — число из леммы 1.1, определяемое для тригонометрического многочлена $\mathcal{G}$. Обозначим $\mathbb{M}''=\mathbb{M}'\cap[\widetilde{\varkappa}_0,+\infty)$. Тогда из леммы 1.1 для всех $\varkappa\in\mathbb{M}''$ (и всех векторов $k\in\mathbb{R}^2$ (для которых $k_1=\pi|\gamma|^{-1}$) и функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$) следуют оценки

$$\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\mathcal{G}^{-1}\varphi\| \geqslant C_2^{-1}\|\mathcal{G}\|_{\frac12}^{-1}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|,\quad \|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\mathcal{G}^{-1}\psi\| \geqslant C_2^{-1}\|\mathcal{G}\|_{\frac12}^{-1}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|.$$

Поэтому (см. (1.7))

$$\big((\widehat{p}_+-i\varkappa)\mathcal{G}^{-1}\psi,(\widehat{p}_++i\varkappa)\mathcal{G}^{-1}\varphi\big) \geqslant \frac49\,C_2^{-2}\left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|_{\frac12}^{-2}\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|$$

и, следовательно, (для всех векторов $k\in\mathbb{R}^2$, для которых $k_1=\pi|\gamma|^{-1}$)

$$|\mathcal{X}_2| \geqslant \left(\frac49\,C_2^{-2}\left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|_{\frac12}^{-2}-\frac{|\gamma|}{2\pi\varkappa}\,\big\|\mathcal{G}^{-1}\big(\Delta\,\mathcal{G}^{-1}\big)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\right)\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\| \tag{1.11}$$

(использована также оценка (1.3)). Выберем число $\varkappa_1>0$ так, что

$$\frac{|\gamma|}{2\pi\varkappa_1}\,|\lambda| \leqslant \varepsilon^2,\quad \frac{|\gamma|}{2\pi\varkappa}\,\big\|\mathcal{G}^{-1}\big(\Delta\,\mathcal{G}^{-1}\big)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \varepsilon^2.$$

Используя равенство (1.8), из оценок (1.9), (1.10), (1.11) и выбора чисел δ и ε (см. (1.4) и (1.5)) для всех $\varkappa\in\mathbb{M}''\cap[\varkappa_1,+\infty)$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^2$, для которых $k_1=\pi|\gamma|^{-1}$, и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ получаем оценку

$$|W_{g,V-\lambda}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)| \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac49\,C_2^{-2}\left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|_{\frac12}^{-2}-6\delta\,C_1\,\|\sqrt{g}\|_{\frac12}^2-3\varepsilon^2\right)\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\| \geqslant$$

$$\geqslant C\left\|\frac{1}{\sqrt{g}}\right\|_{\frac12}^{-2}\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|,$$

где $C=\frac13\,C_2^{-2}$. Оценка (1.1) следует из последнего неравенства, так как для любой ненулевой функции $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ (определяемая ею) функция $\psi\in\widetilde{H}^1(K)$ также ненулевая. □

§ 2. Доказательство леммы 1.1

Л е м м а 2.1. *Для всех функций $f\in\mathcal{L}_\Lambda^{\frac12}(\mathbb{R}^2)$ и $\varphi\in\widetilde{H}^{\frac12}(K)$ функция $f\varphi$ принадлежит пространству $\widetilde{H}^{\frac12}(K)$ и (при всех $k\in\mathbb{R}^2$ и $\varkappa\in\mathbb{R}$) выполняются оценки*

$$\big\|\big(\widehat{G}_\pm^{\frac12}(k+i\varkappa e)f-f\widehat{G}_\pm^{\frac12}(k+i\varkappa e)\big)\varphi\big\| \leqslant \|f\|_{(\frac12)}\,\|\varphi\|. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что f — тригонометрический многочлен (с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$) и $\varphi\in\widetilde{H}^{\frac12}(K)$ (тогда $\widehat{G}_\pm^{\frac12}\varphi\in L^2(K)$ и $f\varphi\in\widetilde{H}^{\frac12}(K)$). Так как для всех N_1, $N_2\in\Lambda^*$

$$\Big|\sqrt{G_{N_1}^\pm(k+i\varkappa e)}-\sqrt{G_{N_2}^\pm(k+i\varkappa e)}\,\Big| \leqslant \sqrt{2\pi|N_1-N_2|}\,,$$

то

$$\big\|\big(\widehat{G}_\pm^{\frac12}f-f\widehat{G}_\pm^{\frac12}\big)\varphi\big\| = v(K)\sum_{N\in\Lambda^*}\Big|\sum_{M\in\Lambda^*}f_M\big(\sqrt{G_N^\pm}-\sqrt{G_{N-M}^\pm}\big)\varphi_{N-M}\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant v(K) \sum_{N\in\Lambda^*} \Big(\sum_{M\in\Lambda^*} \sqrt{2\pi|M|}\, |f_M| \cdot |\varphi_{N-M}| \Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{M\in\Lambda^*} \sqrt{2\pi|M|}\, |f_M| \Big)^2 \|\varphi\|^2 = \|f\|^2_{(\frac12)} \|\varphi\|^2$$

(то есть оценка (2.1) справедлива для всех тригонометрических многочленов $f \in \mathcal{L}^{\frac12}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$). Пусть теперь f — произвольная функция из пространства $\mathcal{L}^{\frac12}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ (и $\varphi \in \widetilde{H}^{\frac12}(K)$). Выберем любую последовательность f_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, тригонометрических многочленов (с решеткой периодов Λ), для которой $(f_\nu)_0 = f_0$ при всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $\|f - f_\nu\|_{(\frac12)} \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Последовательности функций $f_\nu \widehat{G}^{\frac12}_\pm \varphi$ (поточечно и) в $L^2(K)$ сходятся к функциям $f \widehat{G}^{\frac12}_\pm \varphi$. С другой стороны, $f_\nu \varphi \in \widetilde{H}^{\frac12}(K)$ и из доказанных для тригонометрических многочленов f_ν оценок (2.1) получаем, что $(\widehat{G}^{\frac12}_\pm f_\nu - f_\nu \widehat{G}^{\frac12}_\pm)\varphi$, $\nu \in \mathbb{N}$, — фундаментальные последовательности в $L^2(K)$. Следовательно, последовательности функций $\widehat{G}^{\frac12}_\pm f_\nu \varphi$ при $\nu \to +\infty$ сходятся в $L^2(K)$ к некоторым функциям. Но $f_\nu \varphi \to f\varphi$ при $\nu \to +\infty$ (поточесно и) в $L^2(K)$ и операторы $\widehat{G}^{\frac12}_\pm$ замкнуты, поэтому также $f\varphi \in \widetilde{H}^{\frac12}(K)$ и $\widehat{G}^{\frac12}_\pm f_\nu \varphi \to \widehat{G}^{\frac12}_\pm f\varphi$ в $L^2(K)$ при $\nu \to +\infty$. Оценки (2.1) для функции $f \in \mathcal{L}^{\frac12}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ теперь следуют из этих же оценок, доказанных для тригонометрических многочленов f_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1.1. Пусть $R = R(f) \geqslant 0$ — минимальное число такое, что $2\pi|M| \leqslant R$ для всех $M \in \Lambda^*$, для которых $f_M \neq 0$. Ограничения (снизу) на число $\widetilde{\varkappa}_0$ будут уточняться по ходу доказательства. Вначале предположим, что $\widetilde{\varkappa}_0 \geqslant 2R$ (тогда $R \leqslant \frac{\varkappa}{2}$). Для функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ определим функции

$$\varphi^o(x) = \sum_{N\,\in\,\mathcal{K}^o} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \varphi^\pm(x) = \sum_{N\,\in\,\mathcal{K}^\pm} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$\mathcal{K}^o = \{N \in \Lambda^* : |k + 2\pi N| > 2\varkappa\}, \quad \mathcal{K}^+ = \{N \in \Lambda^* : |k + 2\pi N| \leqslant 2\varkappa,\ k_2 + 2\pi N_2 \geqslant 0\},$$

$$\mathcal{K}^- = \{N \in \Lambda^* : |k + 2\pi N| \leqslant 2\varkappa,\ k_2 + 2\pi N_2 < 0\}.$$

Если $|k + 2\pi N| \leqslant 2\varkappa - R$ для некоторого $N \in \Lambda^*$, то $(f\varphi^o)_N = 0$. Поэтому $(f\varphi^o)_N = 0$ при всех $N \in \Lambda^*$, для которых $|k + 2\pi N| \leqslant \frac{3\varkappa}{2}$. С другой стороны, при $|k + 2\pi N| > \frac{3\varkappa}{2}$ выполняются оценки

$$\frac13\, |k + 2\pi N| \,<\, G^\pm_N(k + i\varkappa e) \,<\, \frac53\, |k + 2\pi N|\,.$$

Следовательно, (при $\varkappa > 0$)

$$\|\widehat{G}^{\frac12}_+ \widehat{G}^{\frac12}_- (f\varphi^o)\| \,\leqslant\, \frac53 \Big(\sum_{j\,=1}^{2} \big\| \big(k_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big)(f\varphi^o)\big\|^2 \Big)^{\frac12} \,\leqslant$$

$$\leqslant \frac53\, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \Big(\sum_{j\,=1}^{2} \big\| \big(k_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big)\varphi^o\big\|^2 \Big)^{\frac12} \,+\, \frac53\, \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{C}^2)}\, \|\varphi^o\| \,\leqslant$$

$$\leqslant\, \big(5\, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \,+\, \frac{10}{3\varkappa}\, \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{C}^2)} \big)\, \|\widehat{G}^{\frac12}_+ \widehat{G}^{\frac12}_- \varphi^o\|\,.$$

Будем теперь выбирать число $\widetilde{\varkappa}_0 > 0$ так, что

$$\frac{10}{3\widetilde{\varkappa}_0}\, \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{C}^2)} \,\leqslant\, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,.$$

Тогда (при $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$)

$$\|\widehat{G}^{\frac12}_+ \widehat{G}^{\frac12}_- (f\varphi^o)\| \,\leqslant\, 6\, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\, \|\widehat{G}^{\frac12}_+ \widehat{G}^{\frac12}_- \varphi^o\|\,. \tag{2.2}$$

Если $|k+2\pi N| > 2\varkappa + R$ или $k_2 + 2\pi N_2 < -R$, то $(f\varphi^+)_N = 0$. Поэтому $(f\varphi^+)_N = 0$ для всех $N \in \Lambda^*$, для которых либо $|k+2\pi N| > \frac{5\varkappa}{2}$, либо $k_2 + 2\pi N_2 < -\frac{\varkappa}{2}$. С другой стороны, при всех $N \in \Lambda^*$, для которых $|k+2\pi N| \leqslant \frac{5\varkappa}{2}$ и $k_2 + 2\pi N_2 \geqslant -\frac{\varkappa}{2}$, справедливы оценки

$$\frac{\varkappa}{2} \leqslant G_N^+(k+i\varkappa e) \leqslant \frac{7\varkappa}{2}\,.$$

Поэтому (в силу леммы 2.1)

$$\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(f\varphi^+)\| \leqslant \tag{2.3}$$

$$\leqslant \|\widehat{G}_+^{\frac12}(\widehat{G}_-^{\frac12} f - f\widehat{G}_-^{\frac12})\varphi^+\| + \|(\widehat{G}_+^{\frac12} f - f\widehat{G}_+^{\frac12})\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^+\| + \|f\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^+\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{7\varkappa}{2}}\,\|(\widehat{G}_-^{\frac12} f - f\widehat{G}_-^{\frac12})\varphi^+\| + \|f\|_{(\frac12)}\,\|\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^+\| + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^+\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{(\frac12)}\bigl(\sqrt7\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\varphi^+\| + \|\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^+\|\bigr) + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^+\|\,.$$

Так как $\|f\|_{(\frac12)} \leqslant \|f\|_{\frac12}$, $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|f\|_{\frac12}$ и для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, и всех функций $\psi \in \widetilde{H}^{\frac12}(K)$

$$\|\widehat{G}_\pm^{\frac12}\psi\| \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{|\gamma|}}\,\|\psi\|\,,$$

то из (2.3) следует неравенство

$$\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(f\varphi^+)\| \leqslant \left(1 + \frac{1+\sqrt7}{\sqrt\pi}\sqrt{|\gamma|}\right)\|f\|_{\frac12}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^+\|\,. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом, $(f\varphi^-)_N = 0$ при всех $N \in \Lambda^*$, для которых либо $|k+2\pi N| > \frac{5\varkappa}{2}$, либо $k_2 + 2\pi N_2 \geqslant \frac{\varkappa}{2}$. При этом для всех $N \in \Lambda^*$, для которых $|k+2\pi N| \leqslant \frac{5\varkappa}{2}$ и $k_2 + 2\pi N_2 < \frac{\varkappa}{2}$, выполняются оценки

$$\frac{\varkappa}{2} < G_N^-(k+i\varkappa e) \leqslant \frac{7\varkappa}{2}\,.$$

Поэтому, используя лемму 2.1, получаем

$$\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(f\varphi^-)\| \leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant \|\widehat{G}_-^{\frac12}(\widehat{G}_+^{\frac12} f - f\widehat{G}_+^{\frac12})\varphi^-\| + \|(\widehat{G}_-^{\frac12} f - f\widehat{G}_-^{\frac12})\widehat{G}_+^{\frac12}\varphi^-\| + \|f\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^-\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{7\varkappa}{2}}\,\|(\widehat{G}_+^{\frac12} f - f\widehat{G}_+^{\frac12})\varphi^-\| + \|f\|_{(\frac12)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\varphi^-\| + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^-\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{(\frac12)}\bigl(\sqrt7\,\|\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^-\| + \|\widehat{G}_+^{\frac12}\varphi^-\|\bigr) + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^-\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1+\sqrt7}{\sqrt\pi}\sqrt{|\gamma|}\right)\|f\|_{\frac12}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^-\|\,.$$

Теперь доказываемая в лемме 1.1 оценка непосредственно вытекает из (2.2), (2.4) и (2.5). (При этом можно положить $C_2 = 6 + 3\sqrt{|\gamma|}$.)

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Будем предполагать, что векторы $k \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяют условию $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$; $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$, $e = E_1 = |\gamma|^{-1}\gamma$. Для чисел $\varkappa > 0$ и $b \in (0,\varkappa)$ определим множества

$$\mathcal{C}_\pm^{(b)} = \mathcal{C}_\pm^{(b)}(k+i\varkappa e) = \{N \in \Lambda^* : G_N^\mp(k+i\varkappa e) \leqslant b\};$$

$\mathcal{C}_+^{(b)} \cap \mathcal{C}_-^{(b)} = \varnothing$. Если $N \in \mathcal{C}_\pm^{(b)}$, то

$$2\varkappa - b \leqslant G_N^{\pm}(k + i\varkappa e) \leqslant 2\varkappa + b. \tag{3.1}$$

Для функций $\Phi \in L^2(K)$ будут использоваться обозначения

$$\Phi_{\pm}^{(b)}(x) = \sum_{N \in \mathcal{C}_{\pm}^{(b)}} \Phi_N \, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

(в качестве функций Φ рассматриваются функции ψ, $\varphi \in L^2(K)$). Если $\mathcal{C}_{\pm}^{(b)} = \varnothing$, то считаем, что $\Phi_{\pm}^{(b)}(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Числа $\varkappa > 0$ в дальнейшем выбираются вполне определенным образом. Ограничения на них накладываются по ходу доказательства (при этом при введении новых ограничений все предыдущие предполагаются выполненными). Введем краткое обозначение

$$Y(\psi, \varphi) = (\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} \widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}} \psi, f \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} \widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \varphi), \quad \psi,\, \varphi \in L^2(K).$$

Пусть $a \in [\frac{\varkappa}{4}, \frac{\varkappa}{2}]$. Доказательство неравенства (1.2) сводится к получению соответствующих оценок для девяти скалярных произведений $Y(\psi_1, \varphi_1)$, где $\psi_1 = \psi_+^{(a)}$, $\psi_-^{(a)}$, $\psi - \psi_+^{(a)} - \psi_-^{(a)}$ и $\varphi_1 = \varphi_+^{(a)}$, $\varphi_-^{(a)}$, $\varphi - \varphi_+^{(a)} - \varphi_-^{(a)}$. Оценим вначале $Y(\psi_{\pm}^{(a)}, \varphi_{\pm}^{(a)})$. Обозначим

$$\widetilde{\psi}_+^{(a)} = \widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} \psi_+^{(a)}, \quad \dot{\psi}_-^{(a)} = \widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}} \psi_-^{(a)}, \quad \widetilde{\varphi}_+^{(a)} = \widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \varphi_+^{(a)}, \quad \dot{\varphi}_-^{(a)} = \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} \varphi_-^{(a)}.$$

Тогда

$$Y(\psi_+^{(a)}, \varphi_+^{(a)}) = (\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\psi}_+^{(a)}, f \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} \widetilde{\varphi}_+^{(a)}), \quad Y(\psi_-^{(a)}, \varphi_-^{(a)}) = (f \widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} \dot{\psi}_-^{(a)}, \widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \dot{\varphi}_-^{(a)}).$$

Так как

$$\|\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\psi}_+^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\, \|\widetilde{\psi}_+^{(a)}\|, \quad \|\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \dot{\varphi}_-^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\, \|\dot{\varphi}_-^{(a)}\|$$

и (см. (3.1))

$$\|\widetilde{\psi}_+^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{5\varkappa}{2}}\, \|\psi_+^{(a)}\|, \quad \|\widetilde{\varphi}_+^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{3\varkappa}}\, \|\varphi_+^{(a)}\|, \quad \|\dot{\psi}_-^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{3\varkappa}}\, \|\psi_-^{(a)}\|, \quad \|\dot{\varphi}_-^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{5\varkappa}{2}}\, \|\varphi_-^{(a)}\|,$$

то с помощью леммы 2.1 получаем

$$|Y(\psi_+^{(a)}, \varphi_+^{(a)})| \leqslant |(\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\psi}_+^{(a)}, (f \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} - \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} f) \widetilde{\varphi}_+^{(a)})| + |(\widetilde{\psi}_+^{(a)}, f \widetilde{\varphi}_+^{(a)})| \leqslant \tag{3.2}$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\, \|f\|_{(\frac{1}{2})} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \right) \|\widetilde{\psi}_+^{(a)}\| \cdot \|\widetilde{\varphi}_+^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{5}{3}} \left(1 + \sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}} \right) \|f\|_{\frac{1}{2}}\, \|\psi_+^{(a)}\| \cdot \|\varphi_+^{(a)}\|.$$

Аналогичным образом,

$$|Y(\psi_-^{(a)}, \varphi_-^{(a)})| \leqslant |((f \widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} - \widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} f) \dot{\psi}_-^{(a)}, \widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \dot{\varphi}_-^{(a)})| + |(f \dot{\psi}_-^{(a)}, \dot{\varphi}_-^{(a)})| \leqslant \tag{3.3}$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\, \|f\|_{(\frac{1}{2})} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \right) \|\dot{\psi}_-^{(a)}\| \cdot \|\dot{\varphi}_-^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{5}{3}} \left(1 + \sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}} \right) \|f\|_{\frac{1}{2}}\, \|\psi_-^{(a)}\| \cdot \|\varphi_-^{(a)}\|.$$

С помощью (3.1) непосредственно выводится оценка

$$|Y(\psi_-^{(a)}, \varphi_+^{(a)})| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\, \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} \widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}} \psi_-^{(a)}\| \cdot \|\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} \widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \varphi_+^{(a)}\| \leqslant \tag{3.4}$$

$$\leqslant a\, \|f\|_{\frac{1}{2}}\, \|\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}} \psi_-^{(a)}\| \cdot \|\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \varphi_+^{(a)}\| \leqslant a(2\varkappa - a)^{-1}\, \|f\|_{\frac{1}{2}}\, \|\psi_-^{(a)}\| \cdot \|\varphi_+^{(a)}\| \leqslant \frac{1}{3}\, \|f\|_{\frac{1}{2}}\, \|\psi_-^{(a)}\| \cdot \|\varphi_+^{(a)}\|.$$

Труднее получить оценку для $Y(\psi_+^{(a)}, \varphi_-^{(a)})$. Справедлива

Л е м м а 3.1. *Существует неограниченное сверху множество* $\mathbb{K} \subseteq [10\pi, +\infty)$ *такое,* *что для любого $\varkappa \in \mathbb{K}$ найдется число $a \in [\frac{\varkappa}{4}, \frac{\varkappa}{2}]$ такое, что для любых векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$, и всех функций ψ, $\varphi \in L^2(K)$*

$$|Y(\psi_+^{(a)}, \varphi_-^{(a)})| \leqslant C_3 \sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}} \left(\ln \log_5 \frac{5\varkappa}{2\pi}\right)^{-1} \|\psi_+^{(a)}\| \cdot \|\varphi_-^{(a)}\|, \tag{3.5}$$

где $C_3 > 0$ — некоторая универсальная константа.

Доказательство. Пусть $\varkappa^{(J)} = 2\pi \cdot 5^{J-1}$, $J \in \mathbb{N}$. Так как

$$\sum_{J=1}^{+\infty} \sum_{M \in \Lambda^* : \varkappa^{(J)} \leqslant 2\pi M_2 \leqslant 5\varkappa^{(J)}} \sqrt{2\pi M_2}\, |f_M| \leqslant 2\,\|f\|_{(\frac{1}{2})} < +\infty$$

(и ряд $\sum\limits_{J=2}^{+\infty} \dfrac{1}{J \ln J}$ расходится), то существует бесконечное множество $\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathbb{N} \backslash \{1\}$ такое, что для всех $J \in \widetilde{\mathcal{M}}$

$$\sum_{M \in \Lambda^* : \varkappa^{(J)} \leqslant 2\pi M_2 \leqslant 5\varkappa^{(J)}} \sqrt{2\pi M_2}\, |f_M| \leqslant \frac{1}{J \ln J}$$

и, следовательно,

$$\sum_{M \in \Lambda^* : \varkappa^{(J)} \leqslant 2\pi M_2 \leqslant 5\varkappa^{(J)}} |f_M| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varkappa^{(J)}}} \left(\log_5 \frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}\right)^{-1} \left(\ln \log_5 \frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}\right)^{-1}. \tag{3.6}$$

Существует число $\widetilde{J} = \widetilde{J}(\Lambda, |\gamma|) \in \mathbb{N}$, для которого

$$5^{-\widetilde{J}+1} < \sqrt{2}\,|\gamma| \leqslant 5^{\widetilde{J}+1} \tag{3.7}$$

и

$$\mathcal{C}_{\pm}^{(\varkappa^{(J)}/2)}(k + i\varkappa' e) \neq \varnothing \tag{3.8}$$

для всех чисел $J \in \widetilde{\mathcal{M}}$, для которых $J \geqslant \widetilde{J}$, всех $\varkappa' \geqslant \varkappa^{(J)}$ и всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$ (таких, что $k_1 = \pi|\gamma|^{-1}$). Обозначим

$$\mathcal{M} \doteq \widetilde{\mathcal{M}} \bigcap \{\widetilde{J}, \widetilde{J}+1, \ldots\}.$$

Из (3.7) для всех $J \in \mathcal{M}$ следуют оценки

$$0 < \log_2 \frac{|\gamma|\,\varkappa^{(J)}}{\sqrt{2}\,\pi} \leqslant (2\log_2 5)\, \log_5 \frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}. \tag{3.9}$$

В дальнейшем выбирается любое число $J \in \mathcal{M}$ (для него $\varkappa^{(J)} \geqslant 10\pi$). Пусть $\varkappa \in [\varkappa^{(J)}, 2\varkappa^{(J)}]$. Конкретное значение числа $\varkappa$ будет выбрано далее в зависимости от $J \in \mathcal{M}$ (но не от вектора $k \in \mathbb{R}^2$). Будем пока рассматривать произвольные числа $\varkappa \in [\varkappa^{(J)}, 2\varkappa^{(J)}]$. Для всех $j \in \mathbb{N}$ определим множества (зависящие от k и $\varkappa$)

$$\mathcal{C}_{\pm}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\{j\} = \mathcal{C}_{\pm}^{(2^{-j}\varkappa^{(J)})}(k + i\varkappa e) \backslash \mathcal{C}_{\pm}^{(2^{-j-1}\varkappa^{(J)})}(k + i\varkappa e) =$$

$$= \{N \in \Lambda^* : 2^{-j-1}\varkappa^{(J)} < G_N^{\mp}(k + i\varkappa e) \leqslant 2^{-j}\varkappa^{(J)}\}.$$

Пусть $j_0 \in \mathbb{Z}$ — наименьшее число, для которого $2^{-j_0}\varkappa^{(J)} < \pi|\gamma|^{-1}$. Имеем

$$j_0 = \left[\log_2 \frac{|\gamma|\,\varkappa^{(J)}}{\pi}\right] + 1$$

(где $[\xi]$ — целая часть числа $\xi \in \mathbb{R}$). Если $j \geqslant j_0$, то

$$\mathcal{C}_{\pm}^{(2^{-j}\varkappa^{(J)})}(k+i\varkappa e) \subseteq \mathcal{C}_{\pm}^{(2^{-j_0}\varkappa^{(J)})}(k+i\varkappa e) = \varnothing$$

(так как $|k_1 + 2\pi N_1| \geqslant \pi|\gamma|^{-1}$ для всех векторов $N \in \Lambda^*$). Поэтому из (3.8) следует, что $j_0 \geqslant 2$ (и, в частности, $5^{-J+1} \leqslant |\gamma|$).

Для всех $j, l = 1, \dots, j_0 - 1$ обозначим через $\mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)$ множество векторов $M \in \Lambda^*$, для которых

$$\big((2\pi M_1)^2 + (2\pi M_2 - 2\varkappa)^2\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{-\min\{j,l\}+1}\varkappa^{(J)}$$

и, следовательно,

$$2\pi|M_1| \leqslant 2^{-\min\{j,l\}+1}\varkappa^{(J)} \leqslant \varkappa^{(J)}, \quad |2\pi M_2 - 2\varkappa| \leqslant 2^{-\min\{j,l\}+1}\varkappa^{(J)} \leqslant \varkappa^{(J)}$$

(в частности, справедливы оценки $2\pi M_2 \geqslant 2\varkappa - \varkappa^{(J)} \geqslant \varkappa \geqslant \varkappa^{(J)}$). Если вектор $M \in \Lambda^*$ представим в виде $M = M' - M''$, где

$$M' \in \mathcal{C}_{\pm}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\{j\}, \quad M'' \in \mathcal{C}_{\pm}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\{l\},$$

то

$$\big((2\pi M_1)^2 + (2\pi M_2 - 2\varkappa)^2\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{-j}\varkappa^{(J)} + 2^{-l}\varkappa^{(J)} \leqslant 2^{-\min\{j,l\}+1}\varkappa^{(J)}.$$

Поэтому $M \in \mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)$.

Для всех $j, l = 1, \dots, j_0 - 1$ определим функции

$$\widetilde{\psi}_{+}^{[j]}(x) = \sum_{N \in \mathcal{C}_{+}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\{j\}} \big(G_N^{+}(k+i\varkappa e)\big)^{\frac{1}{2}}\, \psi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)},$$

$$\dot{\varphi}_{-}^{[l]}(x) = \sum_{N \in \mathcal{C}_{-}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\{j\}} \big(G_N^{-}(k+i\varkappa e)\big)^{\frac{1}{2}}\, \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)},$$

$$f_{jl}(x) = f_{jl}(J;\varkappa;x) = \sum_{M \in \mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)} f_M\, e^{2\pi i\,(M,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

(если какое-либо из множеств $\mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)$, $\mathcal{C}_{+}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\{j\}$ или $\mathcal{C}_{-}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\{l\}$ пустое, то соответствующая ему функция считается тождественно равной нулю). Тогда

$$Y(\psi_{+}^{(\varkappa^{(J)}/2)}, \varphi_{-}^{(\varkappa^{(J)}/2)}) = (\widehat{G}_{-}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}_{+}^{(\varkappa^{(J)}/2)}, f\widehat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\dot{\varphi}_{-}^{(\varkappa^{(J)}/2)}) = \sum_{j,\,l=1}^{j_0-1} (\widehat{G}_{-}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}_{+}^{[j]}, f_{jl}\widehat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\dot{\varphi}_{-}^{[l]}). \tag{3.10}$$

Так как $(G_N^{+})^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{5\varkappa}{2}}$ для всех $N \in \mathcal{C}_{+}^{(\varkappa^{(J)}/2)}$ и $(G_N^{-})^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{5\varkappa}{2}}$ для всех $N \in \mathcal{C}_{-}^{(\varkappa^{(J)}/2)}$, то

$$\sum_{j=1}^{j_0-1} \|\widetilde{\psi}_{+}^{[j]}\|^2 \leqslant \frac{5\varkappa}{2}\,\|\psi_{+}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\|^2, \tag{3.11}$$

$$\sum_{l=1}^{j_0-1} \|\dot{\varphi}_{-}^{[l]}\|^2 \leqslant \frac{5\varkappa}{2}\,\|\varphi_{-}^{(\varkappa^{(J)}/2)}\|^2. \tag{3.12}$$

Для векторов $M \in \mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)$ имеем

$$\varkappa^{(J)} \leqslant 2\pi M_2 \leqslant 2\varkappa + \varkappa^{(J)} \leqslant 5\varkappa^{(J)}. \tag{3.13}$$

Обозначим

$$\mathcal{Z}(J) \,=\, \int_{\varkappa^{(J)}}^{2\varkappa^{(J)}} \biggl(\sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\,\frac{3}{4}\,\min\{j,l\}} \sum_{M\,\in\,\mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)} |f_M|\biggr)\, d\varkappa \,=$$

$$=\, \sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\,\frac{3}{4}\,\min\{j,l\}} \sum_{M\,\in\,\Lambda^*} |f_M| \cdot \operatorname{meas}\{\varkappa\in[\varkappa^{(J)},2\varkappa^{(J)}] : M\in\mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)\}$$

(где meas — мера Лебега на $\mathbb{R}$). Так как

$$\{\varkappa\in[\varkappa^{(J)},2\varkappa^{(J)}] : M\in\mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)\} \,\subseteq\, \{\varkappa : |2\pi M_2 - 2\varkappa| \leqslant 2^{-\min\{j,l\}+1}\varkappa^{(J)}\}\,,$$

то

$$\operatorname{meas}\{\varkappa\in[\varkappa^{(J)},2\varkappa^{(J)}] : M\in\mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)\} \,\leqslant\, 2^{-\min\{j,l\}+1}\varkappa^{(J)}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{-\frac{1}{4}\,\min\{j,l\}} \,=\, \sum_{\nu\,=\,1}^{j_0\,-\,1} (2j_0-1-2\nu)\,2^{-\frac{\nu}{4}} \,<\, (2^{\,\frac{1}{4}}-1)^{-1}(2j_0-3) \,<\, 2\,(2^{\,\frac{1}{4}}-1)^{-1}\log_2\frac{|\gamma|\,\varkappa^{(J)}}{\sqrt{2}\,\pi}\,.$$

Поэтому (см. также (3.6), (3.9) и (3.13))

$$\mathcal{Z}(J) \,\leqslant\, 2\,\biggl(\sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{-\frac{1}{4}\,\min\{j,l\}}\biggr)\,\varkappa^{(J)} \sum_{M\,\in\,\Lambda^*\,:\,\varkappa^{(J)}\,\leqslant 2\pi M_2\,\leqslant 5\varkappa^{(J)}} |f_M| \,\leqslant\, C_4\,\sqrt{\varkappa^{(J)}}\,\Bigl(\ln\log_5\frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}\Bigr)^{-1},$$

где $C_4 = 8\,(2^{\,\frac{1}{4}}-1)^{-1}\,\log_2 5$. Из последней оценки для $\mathcal{Z}(J)$ вытекает существование (не зависящего от вектора $k\in\mathbb{R}^2$) числа $\varkappa = \varkappa(\varkappa^{(J)}) \in [\varkappa^{(J)},2\varkappa^{(J)}]$ (именно такое число выбирается в оставшейся части доказательства леммы 3.1) такого, что

$$\sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\,\frac{3}{4}\,\min\{j,l\}}\,\|f_{jl}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \,\leqslant$$

$$\leqslant\, \sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\,\frac{3}{4}\,\min\{j,l\}} \sum_{M\,\in\,\mathfrak{M}_{jl}(J;\varkappa)} |f_M| \,\leqslant\, \frac{\mathcal{Z}(J)}{\varkappa^{(J)}} \,\leqslant\, C_4\,(\varkappa^{(J)})^{-\frac{1}{2}}\,\Bigl(\ln\log_5\frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}\Bigr)^{-1}.$$

Следовательно, для всех $j,l=1,\ldots,j_0-1$

$$\|f_{jl}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \,\leqslant\, C_4\,2^{-\frac{3}{4}\,\min\{j,l\}}\,(\varkappa^{(J)})^{-\frac{1}{2}}\,\Bigl(\ln\log_5\frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}\Bigr)^{-1}. \tag{3.14}$$

Получим теперь оценку для $|Y(\psi_+^{(\varkappa^{(J)}/2)},\varphi_-^{(\varkappa^{(J)}/2)})|$. Так как

$$\|\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}_+^{[j]}\| \,\leqslant\, \biggl(\frac{2^{\,j+1}}{\varkappa^{(J)}}\biggr)^{\frac{1}{2}}\,\|\widetilde{\psi}_+^{[j]}\|\,, \quad \|\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\dot{\varphi}_-^{[l]}\| \,\leqslant\, \biggl(\frac{2^{\,l+1}}{\varkappa^{(J)}}\biggr)^{\frac{1}{2}}\,\|\dot{\varphi}_-^{[l]}\|\,,$$

то из (3.10) следует

$$|Y(\psi_+^{(\varkappa^{(J)}/2)},\varphi_-^{(\varkappa^{(J)}/2)})| \,\leqslant\, \sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} \|f_{jl}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}_+^{[j]}\| \cdot \|\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\dot{\varphi}_-^{[l]}\| \,\leqslant \tag{3.15}$$

$$\leqslant\, \sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\,\frac{j+l}{2}+1}\,\frac{1}{\varkappa^{(J)}}\,\|f_{jl}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widetilde{\psi}_+^{[j]}\| \cdot \|\dot{\varphi}_-^{[l]}\|\,.$$

Для всех $L=2,\dots,2j_0-2$ обозначим

$$F_L = \max_{j,\,l\,:\,j\,+\,l\,=\,L} \|f_{jl}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,,$$

и пусть $j_L, l_L \in \{1,\dots,j_0-1\}$ — (некоторые) числа, для которых $j_L+l_L=L$ и $F_L = \|f_{j_L l_L}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. Тогда (см. (3.11), (3.12) и (3.14))

$$\sum_{j,\,l\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\,\frac{j+l}{2}+1}\,\frac{1}{\varkappa^{(J)}}\,\|f_{jl}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widetilde{\psi}_+^{[j]}\|\cdot\|\dot{\varphi}_-^{[l]}\| \leqslant \tag{3.16}$$

$$\leqslant \sum_{L\,=\,2}^{2j_0\,-\,2} 2^{\,\frac{L}{2}+1}\,\frac{1}{\varkappa^{(J)}}\,F_L \sum_{j\,=\,\max\{1,L-j_0+1\}}^{\min\{L-1,j_0-1\}} \|\widetilde{\psi}_+^{[j]}\|\cdot\|\dot{\varphi}_-^{[l]}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{L\,=\,2}^{2j_0\,-\,2} 2^{\,\frac{L}{2}+1}\,F_L\,\frac{1}{\varkappa^{(J)}}\left(\sum_{j\,=\,1}^{j_0\,-\,1}\|\widetilde{\psi}_+^{[j]}\|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{l\,=\,1}^{j_0\,-\,1}\|\dot{\varphi}_-^{[l]}\|^2\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant 10\sum_{L\,=\,2}^{2j_0\,-\,2} 2^{\,\frac{L}{2}}\,F_L\,\|\psi_+^{(\varkappa^{(J)}/2)}\|\cdot\|\varphi_-^{(\varkappa^{(J)}/2)}\| \leqslant$$

$$\leqslant 10\,C_4\left(\sum_{L\,=\,2}^{2j_0\,-\,2} 2^{\,\frac{L}{2}-\frac34\,\min\{j_L,l_L\}}\right)\frac{1}{\sqrt{\varkappa^{(J)}}}\left(\ln\log_5\frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}\right)^{-1}\|\psi_+^{(\varkappa^{(J)}/2)}\|\cdot\|\varphi_-^{(\varkappa^{(J)}/2)}\|\,.$$

При этом

$$\sum_{L\,=\,2}^{2j_0\,-\,2} 2^{\,\frac{L}{2}-\frac34\,\min\{j_L,l_L\}} = \sum_{L\,=\,2}^{2j_0\,-\,2} 2^{\,\frac12\,\max\{j_L,l_L\}-\frac14\,\min\{j_L,l_L\}}. \tag{3.17}$$

Для всех $L=2,\dots,2j_0-2$ упорядоченные пары чисел (j_L,l_L) попарно различны (так как $j_L+l_L=L$). Более того, для любых чисел $\nu_1\in\{1,\dots,j_0-1\}$ и $\nu_2\in\{1,\dots,\nu_1\}$ существует не более одной упорядоченной пары (j_L,l_L), для которой $\max\{j_L,l_L\}=\nu_1$ и $\min\{j_L,l_L\}=\nu_2$. Поэтому

$$\sum_{L\,=\,2}^{2j_0\,-\,2} 2^{\,\frac12\,\max\{j_L,l_L\}-\frac14\,\min\{j_L,l_L\}} \leqslant \sum_{\nu_1\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\frac{\nu_1}{2}}\sum_{\nu_2\,=\,1}^{\nu_1} 2^{-\frac{\nu_2}{4}} < (2^{\,\frac14}-1)^{-1}\sum_{\nu_1\,=\,1}^{j_0\,-\,1} 2^{\frac{\nu_1}{2}} <$$

$$< (2^{\,\frac14}-1)^{-1}\,(\sqrt2-1)^{-1}\,2^{\frac{j_0}{2}} \leqslant (2^{\,\frac14}+1)(\sqrt2+1)^2\sqrt{\frac{2|\gamma|\,\varkappa^{(J)}}{\pi}}\,.$$

Теперь из (3.15), (3.16) и (3.17) следует оценка

$$|Y(\psi_+^{(\varkappa^{(J)}/2)},\varphi_-^{(\varkappa^{(J)}/2)})| \leqslant C_3\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\left(\ln\log_5\frac{5\varkappa^{(J)}}{2\pi}\right)^{-1}\|\psi_+^{(\varkappa^{(J)}/2)}\|\cdot\|\varphi_-^{(\varkappa^{(J)}/2)}\|\,,$$

где $C_3 = 10\sqrt2\,(2^{\,\frac14}+1)(\sqrt2+1)^2\,C_4$. Осталось определить множество $\mathbb{K}$ как объединение всех чисел $\varkappa=\varkappa(\varkappa^{(J)})\in[\varkappa^{(J)},2\varkappa^{(J)}]$, соответствующих числам $\varkappa^{(J)}$, $J\in\mathcal{M}$. При этом для каждого числа $\varkappa=\varkappa(\varkappa^{(J)})\in\mathbb{K}$ выбирается число $a=\frac{\varkappa^{(J)}}{2}\in[\frac{\varkappa}{4},\frac{\varkappa}{2}]$. $\square$

Получим теперь оставшиеся оценки. Обозначим $\psi^{(a)} \doteq \psi-\psi_+^{(a)}-\psi_-^{(a)}$, $\varphi^{(a)}\doteq\varphi-\varphi_+^{(a)}-\varphi_-^{(a)}$ (где $a\in[\frac{\varkappa}{4},\frac{\varkappa}{2}]$, $\varkappa>0$). Если $N\in\Lambda^*\backslash(\mathcal{C}_+^{(a)}\cup\mathcal{C}_-^{(a)})$, то

$$(G_N^{\pm})^{\frac12}(G_N^{\mp})^{-\frac12} \leqslant \sqrt{\frac{2\varkappa+a}{a}} \leqslant 3\,, \tag{3.18}$$

поэтому

$$\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi^{(a)}\| \leqslant 3\,\|\psi^{(a)}\|\,, \quad \|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi^{(a)}\| \leqslant 3\,\|\varphi^{(a)}\|$$

и, следовательно,

$$|Y(\psi^{(a)},\varphi^{(a)})| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi^{(a)}\|\cdot\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi^{(a)}\| \leqslant 9\,\|f\|_{\frac12}\,\|\psi^{(a)}\|\cdot\|\varphi^{(a)}\|\,. \qquad (3.19)$$

Так как (см. (3.1))

$$\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi_+^{(a)}\| \leqslant \sqrt{a}\,\|\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi_+^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{a}{2\varkappa-a}}\,\|\varphi_+^{(a)}\| \leqslant \frac{1}{\sqrt3}\,\|\varphi_+^{(a)}\|\,,$$

$$\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi_-^{(a)}\| \leqslant \sqrt{a}\,\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi_-^{(a)}\| \leqslant \sqrt{\frac{a}{2\varkappa-a}}\,\|\psi_-^{(a)}\| \leqslant \frac{1}{\sqrt3}\,\|\psi_-^{(a)}\|\,,$$

то

$$|Y(\psi^{(a)},\varphi_+^{(a)})| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi^{(a)}\|\cdot\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi_+^{(a)}\| \leqslant \sqrt3\,\|f\|_{\frac12}\,\|\psi^{(a)}\|\cdot\|\varphi_+^{(a)}\|\,, \qquad (3.20)$$

$$|Y(\psi_-^{(a)},\varphi^{(a)})| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi_-^{(a)}\|\cdot\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi^{(a)}\| \leqslant \sqrt3\,\|f\|_{\frac12}\,\|\psi_-^{(a)}\|\cdot\|\varphi^{(a)}\|\,. \qquad (3.21)$$

Обозначим

$$f_{\{a\}}(x) = \sum_{M\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|M|\,\geqslant\,\frac a2} f_M\, e^{2\pi i\,(M,x)}, \quad x\in\mathbb{R}^2.$$

Справедлива оценка

$$\|f_{\{a\}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \sum_{M\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|M|\,\geqslant\,\frac a2} |f_M| \leqslant \qquad (3.22)$$

$$\leqslant \sqrt{\frac2a}\sum_{M\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|M|\,\geqslant\,\frac a2}\sqrt{2\pi|M|}\;|f_M| \leqslant \sqrt{\frac2a}\;\|f\|_{(\frac12)} \leqslant \frac{2\sqrt2}{\sqrt\varkappa}\,\|f\|_{(\frac12)}\,.$$

Из (3.1) и левой части оценки (3.18) (при замене a на $\frac a2$) получаем

$$\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi_-^{(a/2)}\| \leqslant \sqrt{2\varkappa+\frac a2}\;\|\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi_-^{(a/2)}\| \leqslant \frac{3\sqrt\varkappa}{2}\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\;\|\varphi_-^{(a/2)}\|\,, \qquad (3.23)$$

$$\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}(\varphi_-^{(a)}-\varphi_-^{(a/2)})\| \leqslant \sqrt{17}\,\|\varphi_-^{(a)}-\varphi_-^{(a/2)}\|\,. \qquad (3.24)$$

С другой стороны, если $N_1\in\Lambda^*\backslash(\mathcal{C}_+^{(a)}\cup\mathcal{C}_-^{(a)})$ и $N_2\in\mathcal{C}_\pm^{(a/2)}$, то

$$2\pi\,|N_1-N_2| > \frac a2\,. \qquad (3.25)$$

Поэтому из (3.22), (3.23) и (3.24) вытекает оценка

$$|Y(\psi^{(a)},\varphi_-^{(a)})| \leqslant \qquad (3.26)$$

$$\leqslant |(\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi^{(a)}, f\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}(\varphi_-^{(a)}-\varphi_-^{(a/2)}))| + |(\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi^{(a)}, f_{\{a\}}\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi_-^{(a/2)})| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi^{(a)}\|\cdot\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}(\varphi_-^{(a)}-\varphi_-^{(a/2)})\| +$$

$$+\|f_{\{a\}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{-\frac12}\psi^{(a)}\|\cdot\|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{G}_+^{-\frac12}\varphi_-^{(a/2)}\| \leqslant$$

$$\leqslant 3\sqrt{17}\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\psi^{(a)}\|\cdot\|\varphi_-^{(a)}-\varphi_-^{(a/2)}\| + 9\sqrt2\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\;\|f\|_{(\frac12)}\,\|\psi^{(a)}\|\cdot\|\varphi_-^{(a/2)}\| \leqslant$$

$$\leqslant 3\left(\sqrt{17}+3\sqrt{2}\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\right)\|f\|_{\frac{1}{2}}\,\|\psi^{(a)}\|\cdot\|\varphi_-^{(a)}\|\,.$$

Аналогично оценкам (3.23) и (3.24) выводятся оценки

$$\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}\psi_+^{(a/2)}\| \leqslant \frac{3\sqrt{\varkappa}}{2}\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\,\|\psi_+^{(a/2)}\|\,,$$

$$\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}(\psi_+^{(a)}-\psi_+^{(a/2)})\| \leqslant \sqrt{17}\,\|\psi_+^{(a)}-\psi_+^{(a/2)}\|\,,$$

из которых, а также из (3.22) и (3.25) получаем

$$|Y(\psi_+^{(a)},\varphi^{(a)})| \leqslant \tag{3.27}$$

$$\leqslant |(\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}(\psi_+^{(a)}-\psi_+^{(a/2)}), f\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(a)})| + |(\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}\psi_+^{(a/2)}, f_{\{a\}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(a)})| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}(\psi_+^{(a)}-\psi_+^{(a/2)})\|\cdot\|\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(a)}\| +$$

$$+\|f_{\{a\}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}\psi_+^{(a/2)}\|\cdot\|\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(a)}\| \leqslant$$

$$\leqslant 3\sqrt{17}\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\|\psi_+^{(a)}-\psi_+^{(a/2)}\|\cdot\|\varphi^{(a)}\| + 9\sqrt{2}\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\,\|f\|_{(\frac{1}{2})}\,\|\psi_+^{(a/2)}\|\cdot\|\varphi^{(a)}\| \leqslant$$

$$\leqslant 3\left(\sqrt{17}+3\sqrt{2}\sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\right)\|f\|_{\frac{1}{2}}\,\|\psi_+^{(a)}\|\cdot\|\varphi^{(a)}\|\,.$$

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось воспользоваться оценками (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.19), (3.20), (3.21), (3.26) и (3.27). При этом числа $\varkappa = \varkappa(\varkappa^{(J)})$ принадлежат множеству $\mathbb{K}$, определяемому в лемме 3.1, и для каждого числа $\varkappa = \varkappa(\varkappa^{(J)})$ (как и в лемме 3.1) выбирается число $a = \frac{\varkappa^{(J)}}{2} \in [\frac{\varkappa}{4}, \frac{\varkappa}{2}]$. □

Список литературы

1. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. Vol. 31. P. 7593–7601.
2. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36.
3. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
4. Kuchment P., Levendorskiĭ S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. № 2. P. 537–569.
5. Бирман М.Ш., Суслина Т.А., Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 6. С. 140–177.
6. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Труды С.-Петерб. матем. об–ва. 2001. Т. 9. С. 199–233.
7. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 4. С. 196–228.
8. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320.
9. Данилов Л.И. О спектре двумерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2002. Вып. 3 (26). С. 3–98.
10. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шредингера // Теор. и матем. физика. 2003. Т. 134. № 3. С. 447–459.
11. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шредингера // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84.

12. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Commun. Math. Phys. 1973. Vol. 33. P. 335–343.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
14. Sobolev A.V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator // Invent. Math. 1999. Vol. 137. P. 85–112.
15. Shen Z. Absolute continuity of generalized periodic Schrödinger operators // Contemp. Math. 2001. Vol. 277. P. 113–126.
16. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class // J. Funct. Anal. 2002. Vol. 193. P. 314–345.
17. Friedlander L. On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators // Commun. Math. Phys. 2002. Vol. 229. P. 49–55.
18. Тихомиров М., Филонов Н. Абсолютная непрерывность «четного» периодического оператора Шредингера с негладкими потенциалами // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. № 3. С. 201–210.
19. Shen Z., Zhao P. Uniform Sobolev inequalities and absolute continuity of periodic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360. № 4. P. 1741–1758.
20. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. 275204.
21. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. Vol. 43. 215201.
22. Zhao P., Liu W. On absolute continuity of periodic elliptic operators with singularity // Acta Mathematica Scientia. 2010. Vol. 30A. № 1. P. 18–30 (in Chinese).
23. Данилов Л.И. О спектре периодического оператора Шредингера с потенциалом из пространства Морри // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 25–47.
24. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 400 с.
25. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 15.01.2013

L. I. Danilov

On the spectrum of a two-dimensional generalized periodic Schrödinger operator

Absolute continuity of the spectrum of a two-dimensional generalized periodic Schrödinger operator with continuous metric g and scalar potential V is proved provided that the Fourier coefficients of the functions $g^{\pm 1/2}$ satisfy the condition $\sum |N|^{1/2}|(g^{\pm 1/2})_N| < +\infty$ and the scalar potential V has relative bound zero with respect to the operator $-\Delta$ in the sense of quadratic forms.

Keywords: generalized Schrödinger operator, absolute continuity of the spectrum, periodic potential.

Mathematical Subject Classifications: 35P05

Данилов Леонид Иванович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132. E-mail: lidanilov@mail.ru

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical Technical Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia. E-mail: lidanilov@mail.ru