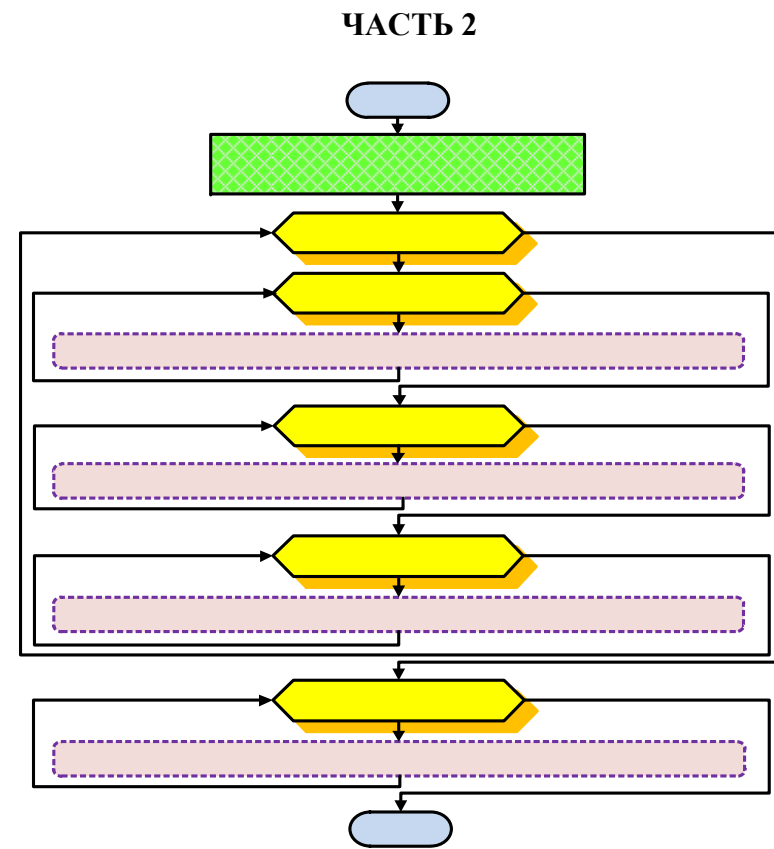
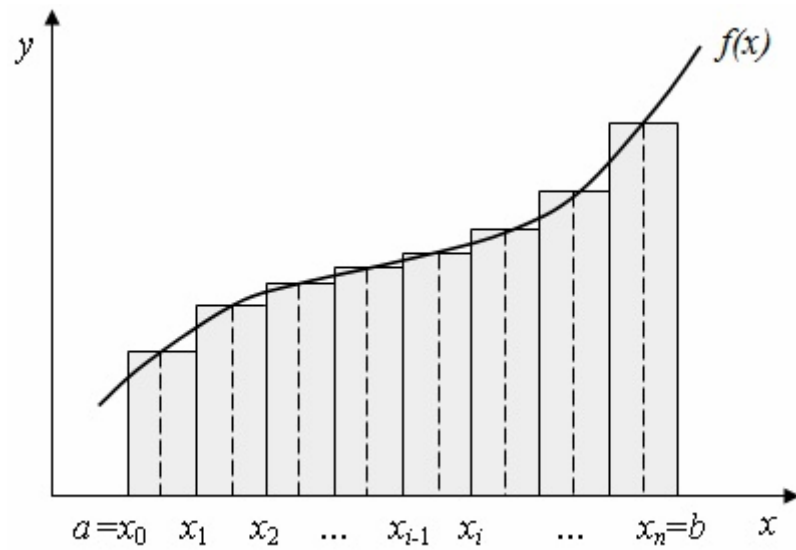


И.Г. Ким, Н.В. Латыпова, О.Л. Моторина

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ



Ижевск 2013

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
Кафедра математического анализа

И. Г. Ким, Н. В. Латыпова, О. Л. Моторина

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебно–методическое пособие

Часть 2

УДК 519.6(075)
ББК 22.19я7
К 697

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Ким И. Г., Латыпова Н. В., Моторина О. Л.

К 697 Численные методы: учеб.-метод. пособие. Ч. 2. Ижевск:
Изд-во «Удмуртский университет», 2013. 64 с.

В данном пособии излагаются основные понятия, формулы и алгоритмы курса «Численные методы». Во второй части пособия рассматриваются задачи численного интегрирования и дифференцирования. Излагаются основные методы численного решения дифференциальных уравнений. Даны темы для домашнего задания и варианты лабораторных работ.

Пособие предназначено для студентов направлений подготовки бакалавров «Механика и математическое моделирование», «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика».

УДК 519.6(075)
ББК 22.19.1я7

©И. Г. Ким, Н. В. Латыпова, О. Л. Моторина, 2013
©ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», 2013

Оглавление

Предисловие	5
1. Метод Рунге–Ромберга	6
2. Численное интегрирование	7
2.1. Формулы прямоугольников	8
2.2. Формула трапеций	10
2.3. Формула Симпсона	11
2.4. Вычисления с заданной точностью	12
2.5. Формулы интерполяционного типа	13
2.6. Сплайны в задаче численного интегрирования	14
2.7. Квадратурные формулы Гаусса	16
2.8. Некоторые весовые функции и соответствующие им ортогональные многочлены	17
2.9. Несобственные интегралы	19
3. Численное дифференцирование	20
3.1. Метод неопределенных коэффициентов	20
3.2. Интерполяционный метод	22
3.3. Численное дифференцирование при помощи интерполяционных сплайнов	23
4. Численное решение задачи Коши	24
4.1. Метод последовательных приближений	25
4.2. Метод Эйлера, его модификации	25
4.3. Семейство схем второго порядка точности	27
4.4. Семейство методов Рунге–Кутты	27
4.5. Метод Рунге–Ромберга	28
4.6. Метод Адамса	29
5. Численное решение краевых задач с одной независимой переменной	29
5.1. Метод стрельбы для линейных краевых задач	30
5.2. Метод стрельбы для нелинейных краевых задач	31
5.3. Метод коллокации	32
5.4. Метод Галеркина	34
5.5. Разностный метод	35
6. Численное решение уравнений в частных производных	37
6.1. Основные понятия теории разностных схем	37
6.2. Основные теоремы	40

6.3.	Разностный метод для уравнений эллиптического типа	41
6.4.	Разностный метод для уравнений параболического типа	43
6.5.	Разностный метод для уравнений гиперболического типа	46
6.6.	Метод конечных элементов (МКЭ)	47
7.	Лабораторные работы	51
7.1.	Численное интегрирование	51
7.2.	Численное дифференцирование	51
7.3.	Численное решение задачи Коши	52
7.4.	Численное решение краевых задач	53
7.5.	Примерные темы домашних заданий	58
	Список рекомендуемой литературы	60
	Приложение	62

Предисловие

Курс «Численные методы» традиционно считается сложным у студентов, так как в нем требуется сочетать умения и навыки программирования со знаниями базовых математических курсов. Поэтому данное учебное пособие призвано помочь студентам в освоении данной дисциплины. Основные цели и задачи курса: научить правильно оценивать результаты вычислений, выполненных на компьютере средствами языков программирования; ознакомить с методами получения аналитических зависимостей при обработке результатов экспериментов; ознакомить с признаками плохо обусловленных и некорректных задач и подходами к их решению; сформировать культуру критичного отношения к полученным результатам.

Пособие снабжено теоретической частью, в которой кратко излагаются формулы и алгоритмы классических методов. При оформлении справочной части были использованы материалы [3, 5, 9]. Для самостоятельной работы студентов предложен лабораторный практикум с индивидуальными заданиями и тематика домашних работ. Лабораторные работы курса направлены на углубление и расширение лекционного материала, приобретение вычислительного опыта при решении поставленных задач. Домашнее задание предполагает составление математической модели, разработку метода решения, написание программы на языке программирования и проведение вычислительного эксперимента.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать такими общекультурными компетенциями, как «значительные навыки самостоятельной работы с компьютером, программирования, использования методов обработки информации и численных методов решения базовых задач»; и такими профессиональными компетенциями, как «навыки самостоятельного построения алгоритма и его анализа»; «владение методами математического и алгоритмического моделирования при анализе и решении прикладных и инженерно-технических проблем».

Издание предназначено прежде всего для студентов направлений подготовки бакалавров «Механика и математическое моделирование», «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика». Кроме того, пособие может быть использовано и студентами инженерных направлений, а также будет полезно всем, кто интересуется вычислительной математикой.

1. Метод Рунге–Ромберга

Пусть решается задача определения Y и есть алгоритм нахождения приближенного значения в зависимости от параметра h такой, что $\|Y - Y_h\| = O(\|h\|^m)$, т.е. остаточный член приближенной формулы Y_h

$$Y - Y_h = R \cdot h^m + O(h^{m+1}). \quad (1.1)$$

Выполним теперь вычисления по той же приближенной формуле, но с другим шагом (параметром сетки) rh :

$$Y - Y_{rh} = R \cdot (rh)^m + O(h^{m+1}), \quad (1.2)$$

где r — константа. Вычтем почленно из (1.1) формулу (1.2) и преобразуем, выразив $R \cdot h^m$:

$$R \cdot h^m = \frac{Y_{rh} - Y_h}{r^m - 1} + O(h^{m+1}). \quad (1.3)$$

Формулу (1.3) называют *первой формулой Рунге*. Первое слагаемое справа есть главный член погрешности, который позволяет оценить погрешность уже найденного значения Y_h . Подставим его в (1.1) и выразим Y :

$$Y = Y_h + \frac{Y_h - Y_{rh}}{r^m - 1} + O(h^{m+1}). \quad (1.4)$$

Получили *вторую формулу Рунге* для нахождения Y с более высокой точностью.

В частном случае $r = \frac{1}{2}$ формула принимает вид

$$Y = Y_{\frac{h}{2}} + \frac{Y_{\frac{h}{2}} - Y_h}{2^m - 1} + O(h^{m+1}). \quad (1.5)$$

Если мы хотим получить значение Y с заданной точностью ε , то вычисляем значения с шагами h и $\frac{h}{2}$ и проверяем выполнение неравенства:

$$|\delta| < \varepsilon, \text{ где } \delta = \frac{Y_{\frac{h}{2}} - Y_h}{2^m - 1}.$$

Если неравенство выполняется, то счет можно прекращать, взяв в качестве приближенного значения, найденное с заданной точностью $Y \approx Y_{\frac{h}{2}} + \delta$. Если же неравенство не выполняется, т.е. $\delta \geq \varepsilon$, то

снова уменьшаем шаг в два раза, вычисляем новое значение и сравниваем два последних приближения и т.д.

Отсюда видно, что для получения высокой точности не обязательно проводить вычисления по формулам высокого порядка. Достаточно провести вычисления по простым формулам низкой точности на разных сетках и уточнить результат методом Рунге–Ромберга.

Замечание. При реализации метода, кроме ошибок связанных с величиной h , на результат оказывает влияние и округление.

2. Численное интегрирование

Основная задача численного интегрирования — получить простые, однотипные формулы или алгоритмы, которые легко реализуются в виде программ на ЭВМ и пригодны для вычисления определенных интегралов для достаточно широкого класса функций. *Общий способ построения* формул численного интегрирования состоит в том, что подынтегральная функция приближенно заменяется на другую, более простую, от которой интеграл легко «берется».

Будем изучать формулы, основанные на замене интеграла конечной суммой

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n C_k f(x_k) \doteq I_n. \quad (2.1)$$

Приближенное равенство (2.1) называется *квадратурной формулой*, точки x_k — *узлами* квадратурной формулы, числа C_k — *коэффициентами*, а разность

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^n C_k f(x_k)$$

называется *погрешностью квадратурной формулы*.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на узлы, не обязательно равномерно:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

и представим интеграл в виде суммы интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \quad (2.2)$$

Ясно, что нам достаточно построить квадратурную формулу для одного конкретного интервала $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ и воспользоваться (2.2).

2.1. Формулы прямоугольников

Самый простой способ получения приближенных формул численного интегрирования — это методы прямоугольников.

1. Если криволинейную площадь под графиком подынтегральной функции на участке $[x_{i-1}, x_i]$ заменить площадью прямоугольника высотой, равной значению функции в левом конце отрезка $f(x_{i-1})$, то получим *формулу левых прямоугольников*:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_{i-1}). \quad (2.3)$$

2. Если криволинейную площадь под графиком подынтегральной функции на участке $[x_{i-1}, x_i]$ заменить площадью прямоугольника высотой, равной значению функции в правом конце $f(x_i)$, то получим *формулу правых прямоугольников*:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i). \quad (2.4)$$

3. Если площадь криволинейной трапеции на участке $[x_{i-1}, x_i]$ заменить площадью прямоугольника высотой, равной значению функции в середине отрезка $f(x_{i-\frac{1}{2}})$, где $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, то получим *формулу средних прямоугольников*:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx (x_i - x_{i-1}) \cdot f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right). \quad (2.5)$$

Подставив формулы (2.3)–(2.5) в формулу (2.2), получим так называемые обобщенные формулы левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_{i-1}), \quad (2.6)$$

правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i) \quad (2.7)$$

и обобщенную формулу средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \cdot f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right). \quad (2.8)$$

В случае когда узлы расположены равномерно: $x_i - x_{i-1} = h$, формулы примут вид соответственно:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i), \quad \int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^N f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right).$$

Обозначим $M_{1i} = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f'(x)|$, $r_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - hf(x_{i-1})$.

Оценка погрешности формул левых и правых прямоугольников на каждом маленьком отрезке разбиения имеет вид

$$|r_i| \leq M_{1i} \frac{h^2}{2} = O(h^2). \quad (2.9)$$

Погрешность для обобщенных формул левых и правых прямоугольников равняется суммарной погрешности $R = \sum_{i=1}^N r_i$ и оценивается следующим образом

$$|R| \leq \frac{(b-a)h}{2} M_1 = O(h), \quad \text{где } M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|. \quad (2.10)$$

Обозначим $M_{2i} = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$, $r_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - hf\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$.

Для формулы средних имеем $|r_i| \leq \frac{h^3}{24} M_{2i}$. Для формулы обобщенных средних получается оценка

$$|R| = \left| \sum_{i=1}^N r_i \right| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = O(h^2), \text{ где } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (2.11)$$

Замечание. Формулы (2.11) для оценки погрешности не улучшаемы, так как можно указать функцию, для которой такая погрешность достигается: например, $f(x) = \left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2$.

2.2. Формула трапеций

Если определенный интеграл на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ заменить площадью трапеции с длинами оснований $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, высотой $h_i = x_i - x_{i-1}$, то получится формула трапеций

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}. \quad (2.12)$$

Обобщенная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$

которая в случае равномерной сетки будет (для краткости $f_i \doteq f(x_i)$): $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{N-1} + f_N)$.

Оценка погрешности формулы трапеций на каждом шаге имеет вид $|r_i| \leq \frac{M_{2i} h^3}{12}$, где $M_{2i} = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$, а обобщенная формула дает погрешность порядка h^2 :

$$|R| = \left| \sum_{i=1}^N r_i \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 = O(h^2), \text{ где } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (2.13)$$

Замечание. Формула трапеций имеет погрешность в два раза больше, чем погрешность для формулы средних (сравните формулы (2.11) и (2.13)).

2.3. Формула Симпсона

Если подынтегральную функцию $f(x)$ заменить квадратичной функцией, то вычислив определенный интеграл от нее на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, получим формулу Симпсона:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i). \quad (2.14)$$

Обобщенная формула Симпсона будет иметь вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f_0 + f_N + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1}) + 4(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \dots + f_{N-\frac{1}{2}})].$$

Замечание. Если взять четное число N , то можно формулу Симпсона записать в виде $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$,

а обобщенную формулу Симпсона в виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + f_N + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{N-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{N-1})]. \quad (2.15)$$

Теорема. Формула Симпсона является точной для любого многочлена третьей степени, т. е. имеет место равенство

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i), \text{ где } f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Оценка погрешности формулы Симпсона на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеет вид

$$|r_i| \leq \frac{M_{4i} h^5}{2880}, \text{ где } M_{4i} = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f^{(4)}(x)|.$$

Оценка погрешности для обобщенной формулы Симпсона получается, если просуммировать погрешности по всем отрезкам:

$$|R| = \left| \sum_{i=1}^N r_i \right| \leq \frac{b-a}{2880} h^4 M_4 = O(h^4), \text{ где } M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (2.16)$$

Формулу Симпсона можно получить как линейную комбинацию формулы средних прямоугольников и формулы трапеций.

2.4. Вычисления с заданной точностью

Имеется два подхода для вычисления $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon > 0$.

- Используя оценки для погрешностей (2.11), (2.13), (2.16) выписываем неравенство для нахождения шага h . Например, для приближенного вычисления интеграла с заданной точностью $\varepsilon > 0$ по формуле Симпсона решаем неравенство

$$|R| \leq \frac{M_4(b-a)h^4}{2880} < \varepsilon \Rightarrow h < \sqrt[4]{\frac{2880\varepsilon}{M_4(b-a)}},$$

и с этим шагом находим приближенное значение интеграла по формуле (2.15). При этом будет гарантирована точность ε . Но у этого метода есть недостаток: нужно иметь производную четвертого порядка от подынтегральной функции, оценить ее по модулю и получить M_4 . Такой метод называется априори (заранее), ибо мы заранее знаем, что если будем использовать найденный шаг, то получим необходимую точность.

- Пользуясь тем, что имеется формула оценки погрешности, можно применить метод Рунге–Ромберга. Обозначим через

$$Y = \int_a^b f(x)dx \text{ точное значение интеграла, а приближенное значение интеграла, полученное по какой-либо квадратурной формуле при шаге } h \text{ через } Y_h.$$

Пусть квадратурная формула имеет погрешность порядка m , т. е. $Y - Y_h = O(h^m)$. Например, для обобщенной формулы Симпсона $m = 4$. Для вычисления с заданной точностью $\varepsilon > 0$ используем двойной пересчет: сначала

вычисляем приближенное значение интеграла с каким-то шагом h , получаем Y_h , затем интеграл вычисляется при $\frac{h}{2}$, полу-

чаем $Y_{\frac{h}{2}}$, далее оцениваем $\delta = \frac{Y_{\frac{h}{2}} - Y_h}{2^m - 1}$. Если $|\delta| < \varepsilon$, то счет можно прекращать — правило Рунге–Ромберга дает приближенное значение $Y \approx Y_{\frac{h}{2}} + \delta$ с заданной точностью. Если же $|\delta| \geq \varepsilon$, то снова уменьшаем шаг в два раза, вычисляем новое значение интеграла и сравниваем два последних приближения и т. д. Таким образом, обеспечивается автоматический подбор шага интегрирования, при котором будет найдено приближенное значение интеграла с любой наперед заданной точностью. Шаг определяется не заранее, а по ходу вычислений, поэтому такая оценка называется апостериорной.

2.5. Формулы интерполяционного типа

На отрезке $[a, b]$ рассмотрим множество (не обязательно равноотстоящих) узлов x_0, x_1, \dots, x_N и заменим подынтегральную функцию интерполяционным многочленом N -ой степени сразу на всем отрезке. Тогда можно положить $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_N(x)dx$. Получен-

ная квадратурная формула имеет вид $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^N C_i f(x_i)$, т. к.

$$L_N(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i) \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}, \text{ где } \omega(x) = \prod_{k=0}^N (x - x_k), \text{ (см. [7, с. 30])}$$

и $C_i = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} dx$. Такие формулы называются *квадратурными формулами интерполяционного типа*.

Рассмотренные ранее квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ являются частным случаем интерполяционной формулы для $N = 0, 1, 2$ соответственно.

Обобщая этот подход, можно найти квадратурную формулу для приближенного вычисления интегралов с весами $\int_a^b \rho(x)f(x)dx$,

где $\rho(x) > 0$ — некоторая весовая функция:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^N C_i f(x_i), \quad (2.17)$$

причем

$$C_i = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} dx, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

Формула (2.17) будет квадратурной формулой интерполяционного типа тогда, и только тогда, когда коэффициенты C_i вычисляются по формулам (2.18).

Погрешность квадратурной формулы (2.17) определяется как

$$|R| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!} \int_a^b \rho(x) |\omega(x)| dx, \quad \text{где } M_{N+1} = \max_{[a,b]} |f^{(N+1)}(x)|.$$

Откуда видно, что интерполяционная формула (2.17) точна для всех многочленов до N -ой степени включительно. Верно и обратное утверждение.

Теорема. Если квадратурная формула (2.17) точна для всех многочленов до N -ой степени, то это квадратурная формула интерполяционного типа.

★**Упр.** Докажите сформулированную теорему.

Если в качестве крайних узлов используются a и b , то квадратурная формула называется *формулой замкнутого типа*, если же хотя бы один из концов отрезка $[a, b]$ не является узлом, то формула называется *формулой открытого типа*. Например, формула средних прямоугольников — формула открытого типа, а формула трапеций — замкнутого типа.

2.6. Сплайны в задаче численного интегрирования

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Функцию $f(x)$ заменим интерполяционным сплайном $S(x)$ и в качестве приближенного значения

искомого интеграла возьмем $\int_a^b S(x) dx$, т. е. $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b S(x) dx$.

Погрешность вычисления можно оценить следующим образом:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - S(x)| dx \leq (b-a) \|f - S\|_{C[a,b]}.$$

Другими словами, для оценки погрешности приближения определенного интеграла, достаточно иметь оценку погрешности приближения функции $f(x)$ сплайном $S(x)$.

Ограничимся рассмотрением только кубических сплайнов. Пусть на $[a, b]$ задана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Кубический сплайн через $M_i = S_3''(x_i)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, представим в виде (см. [7, с. 35]): $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$

$$S_3(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left[f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6} \right] \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left[f(x_{i+1}) - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right] \frac{x - x_i}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.19)$$

Подставляя в интеграл и вычисляя его, имеем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i (f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{24} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^3 (M_i + M_{i+1}). \quad (2.20)$$

Аналог формулы (2.20) на равномерной сетке имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{5h}{12} (f_0 + f_n) + \frac{13h}{12} (f_1 + f_{n-1}) + h \sum_{i=2}^{n-2} f_i - \frac{h^3}{72} (2M_0 + M_1 + M_{n-1} + 2M_n). \quad (2.21)$$

★**Упр.** Докажите формулу (2.21).

Пусть требуется вычислить интегралы от сильно осцилирующих функций вида $\int_a^b \cos \alpha x f(x) dx$, $\int_a^b \sin \alpha x f(x) dx$. При больших значениях параметра α здесь невыгодно использовать квадратурные формулы, основанные на замене сплайном всей подынтегральной функции, т. к. это потребует большого числа узлов. Более удобные формулы получаются, когда функции $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$ рассматриваются как весовые, а сплайном приближается только $f(x)$.

2.7. Квадратурные формулы Гаусса

В квадратурной формуле

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n C_i f(x_i), \quad (2.22)$$

где $\rho(x) > 0$ весовая функция, подберем коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_n и узлы x_1, x_2, \dots, x_n так, чтобы она была точна для многочленов наибольшей возможной степени. Такие формулы называются *квадратурными формулами Гаусса*. Наивысшая степень многочлена, для которых формула будет точна, это $m = 2n - 1$.

Теорема 1. *Квадратурная формула (2.22) точна для многочленов степени $m = 2n - 1$ тогда, и только тогда, когда*

1) *многочлен $\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ степени n ортогонален с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ любому многочлену $q(x)$ степени меньше n , т. е.*

$$\int_a^b \rho(x) \omega(x) q(x) dx = 0; \quad (2.23)$$

2) *формула (2.22) является квадратурной формулой интерполяционного типа, т. е.*

$$C_i = \int_a^b \frac{\rho(x) \omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.24)$$

Использование теоремы упрощает построение формул Гаусса. Условия (2.23) эквивалентны требованиям

$$\int_a^b \rho(x) \omega(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (2.25)$$

и представляют из себя систему с n неизвестными относительно узлов квадратурной формулы x_1, x_2, \dots, x_n . Решая ее, затем при найденных узлах определяем коэффициенты C_i по формулам (2.24).

★Упр. Получите квадратурные формулы Гаусса при $n = 1, 2$, используя систему (2.25) и (2.24).

Теорема 1 не гарантирует существования и единственности решения системы (2.25). Тем более она не гарантирует, что все найденные узлы, т. е. корни многочлена $\omega(x)$ будут из отрезка $[a, b]$. Ответы на эти важные вопросы дает следующая теорема.

Теорема 2. *Многочлен $\omega(x)$ степени n , ортогональный с весом $\rho(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$ любому многочлену $q(x)$ степени меньше n , определяется однозначно, все корни этого многочлена различны и находятся на отрезке $[a, b]$.*

Свойства квадратурных формул Гаусса

1. Наивысший порядок многочлена, для которых формула Гаусса с n узлами точна, — это $2n - 1$, т. е. существует многочлен степени $2n$, для которого формула уже не будет точна.

2. Все коэффициенты формулы Гаусса положительны, т. е. $C_i > 0$.

3. Для любой квадратурной формулы интерполяционного типа $\sum_{k=1}^n C_k$ ограничена.

★Упр. 1. Докажите свойства квадратурных формул Гаусса.

2. Оцените погрешность квадратурной формулы Гаусса.

2.8. Некоторые весовые функции и соответствующие им ортогональные многочлены

Весовые функции $\rho(x)$ обычно используются, чтобы заранее учесть наиболее часто встречающиеся особенности подынтегральных функций $F(x)$ путем представления их в виде произведения $F(x) = \rho(x)f(x)$. Теорема 1 для формулы Гаусса утверждает, что в качестве узлов x_1, \dots, x_n нужно взять корни такого многочлена

$\omega(x)$, который ортогонален с весом $\rho(x)$ всем многочленам $q(x)$ степени меньше n . В качестве $\rho(x)$ применяются следующие классические весовые функции:

- Если $\rho(x) \equiv 1$, то в качестве многочлена $\omega(x)$ используются ортогональные многочлены Лежандра, которые определяются как $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$ и являются ортогональными на отрезке $[-1, 1]$, т. е. $\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = 0$ при $n \neq m$. В частности, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, ... Имеет место рекуррентная формула $(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

- Если $\rho(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$, то в качестве многочлена $\omega(x)$ используются ортогональные многочлены Якоби. Данная весовая функция применяется, если подынтегральная функция имеет степенные особенности на концах отрезка.

- Если $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то в качестве многочлена $\omega(x)$ используются ортогональные многочлены Чебышева, которые определяются как $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$. В частности, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, ... Имеет место рекуррентная формула:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Корни x_k многочлена Чебышева и коэффициенты C_k квадратной формулы вычисляются в явном виде: $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $C_k = \frac{\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда, формула Гаусса для такого типа интегралов имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

- Если $\rho(x) = e^{-x^2}$, то в качестве многочлена $\omega(x)$ используются ортогональные многочлены Эрмита, которые имеют следующий вид: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$. В частности, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, ... Имеет место рекуррентная формула:

$$H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

2.9. Несобственные интегралы

Чтобы вычислить сходящийся несобственный интеграл первого рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ с точностью ε , необходимо: аналитически най-

ти такое b , чтобы $\left| \int_b^{+\infty} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$; вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$

по приближенным формулам с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда это полученное приближенное значение будет давать значение исходного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ с точностью ε .

Аналогично можно поступить в случае $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.

Чтобы вычислить сходящийся несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x) dx$ с точностью ε , где функция $f(x)$ имеет особенность в некоторой точке $c \in (a, b)$, необходимо: аналитически най-

ти такое $\delta > 0$, чтобы $\left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$; вычислить два определен-

ных интеграла $I_1 = \int_a^{c-\delta} f(x) dx$ и $I_2 = \int_{c+\delta}^b f(x) dx$ по приближенным

формулам с точностью $\frac{\varepsilon}{3}$ каждый. Тогда приближенное равенство

$\int_a^b f(x)dx \approx I_1 + I_2$ имеет погрешность не более ε .

Комбинируя эти методы, можно вычислять интеграл, например, с бесконечными пределами при наличии нескольких особых точек, при этом отделяем каждую особую точку и весь интеграл заменяем суммой собственных интегралов на конечном отрезке без особенностей.

3. Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции $f(x)$ по заданной таблице значений.

x	x_0	x_1	\dots	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	\dots	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	\dots	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	\dots	f_n

Требуется определить приближенные значения производных этой функции в какой-либо точке x , т.е. найти $f^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, причем x не обязательно совпадает с одним из значений заданных точек x_i .

3.1. Метод неопределенных коэффициентов

В качестве приближенного значения производной $f^{(k)}(x)$ рассмотрим линейную комбинацию заданных значений функции в узлах сетки

$$f^{(k)}(x) \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad (3.1)$$

где коэффициенты a_i подбирают из некоторых требований. Можно, например, потребовать, чтобы формула (3.1) была точна для многочленов как можно более высокой степени.

Возьмем в качестве f многочлен $f(x) = \sum_{j=0}^m c_j x^j$ и потребуем, чтобы для такого многочлена при некотором k левые и правые части приближенного равенства (3.1) совпадали.

Рассмотрим случай $k = 1$, т.е. получим приближенную формулу для первой производной. Система для нахождения коэффициентов a_j имеет вид:

$$\sum_{i=0}^n a_i = 0, \sum_{i=0}^n a_i x_i = 1, \sum_{i=0}^n a_i x_i^2 = 2x, \dots, \sum_{i=0}^n a_i x_i^m = m x^{m-1}. \quad (3.2)$$

Система (3.2) имеет единственное решение, если все точки x_i различны и $m = n$. Решив эту систему и подставляя найденные a_i в (3.1), получим формулу для приближенного вычисления первой производной и эта формула будет точна для всех многочленов степени $m = n$.

Рассмотрим случай $k = 2$. Аналогично получается система с той же матрицей, что и в (3.2), но другим столбцом свободных членов

$$\sum_{i=0}^n a_i = 0, \sum_{i=0}^n a_i x_i = 0, \sum_{i=0}^n a_i x_i^2 = 2, \dots, \sum_{i=0}^n a_i x_i^m = m(m-1)x^{m-2}.$$

Решение такой системы даст коэффициенты приближенной формулы (3.1) для второй производной в точке x . Аналогичным образом можно найти производные и других порядков.

Частные случаи

1. При $k = 1$ формула дает точное значение первой производной в любой точке x для всех многочленов первой степени ($n = 1$) по любым двум значениям $f(x_{i+1})$ и $f(x_i)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}, \text{ где } h = x_{i+1} - x_i, x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (3.3)$$

Приближенная формула (3.3) имеет погрешность порядка h .

2. При $k = 1, m = n = 2$ приближенная формула

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}, \text{ где } h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (3.4)$$

дает точное значение производной для всех многочленов до второй степени включительно. Приближенная формула (3.4) имеет погрешность порядка h^2 , т.е. она лучше, чем (3.3).

★**Упр.** Проверьте, что формула (3.4) точна для многочленов до второй степени включительно.

Заметим, что мы нашли приближенную формулу для первой производной в центральной точке $x = x_i$ по трем значениям функции в точках x_{i-1} , x_i и x_{i+1} , симметрично расположенных относительно x_i . Однако точно так же можно найти формулу и для любой другой точки x . При этом коэффициенты формулы будут теперь зависеть от x (т. к. правая часть системы зависит от x), и она будет не столь красива как (3.4). Но она так же будет точна для всех многочленов второй степени.

3. При $k = 2$, $m = n = 2$ приближенная формула для второй производной по трем значениям функции в точках x_{i-1} , x_i и x_{i+1} , $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$, имеет вид

$$f''(x) \approx \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) для аппроксимации второй производной имеет погрешность порядка h^2 и точна для всех многочленов до второй степени включительно для любого $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. В центральной точке эта формула точна и для всех многочленов третьей степени.

★**Упр.** Проверьте точность формулы (3.5).

Замечание. Увеличивая количество используемых точек, можно увеличить степень многочлена для которого формула будет точна. Например, если взять пять равномерно расположенных с шагом h точек x_{i-2} , x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , x_{i+2} , то для приближенного вычисления первой производной в точке $x = x_i$ можно получить формулу

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-2}) - 8f(x_{i-1}) + 8f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{12h}, \quad (3.6)$$

которая точна для всех многочленов четвертой степени.

★**Упр.** Докажите формулу (3.6), проверьте ее точность и найдите оценку ее погрешности.

Если выбрать вместо обычных многочленов другой класс функций и накладывать соответствующие ограничения, то получим другие приближенные формулы.

3.2. Интерполяционный метод

Идея метода проста: по заданной таблице значений функции на отрезке $[a, b]$ строят интерполяционный многочлен Лагранжа

$L_n(x) \approx f(x)$ и полагают $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$. Рассмотрим неравномерную сетку $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$), $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Используя многочлен Лагранжа первой степени по двум значениям функции в точках x_i и x_{i-1} , получим $f'(x) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$, что совпадает с приближенной формулой (3.3).

Используя интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени по трем узлам x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , получим приближенное значение первой производной на неравномерной сетке

$$f'(x) \approx f_{i-1} \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} - f_i \frac{2x - x_{i+1} - x_{i-1}}{h_i h_{i+1}} + f_{i+1} \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}].$$

На равномерной сетке, например, для точки $x = x_i$ ($h_i = h_{i+1} = h$), получаем центральную разностную формулу (3.4).

Вторая производная будет иметь приближенную формулу

$$f''(x) \approx \frac{1}{\bar{h}_i} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (3.7)$$

где $\bar{h}_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$. На равномерной сетке данное выражение для приближенного вычисления второй производной совпадает с (3.5). На неравномерной сетке ($h_i \neq h_{i+1}$) приближенная формула (3.7) имеет только первый порядок аппроксимации, на равномерной сетке только в точке $x = x_i$ будет второй порядок аппроксимации.

3.3. Численное дифференцирование при помощи интерполяционных сплайнов

Аналогично интерполяционному методу производные функции $f(x)$ заменяем производными интерполяционного сплайна.

Пусть на $[a, b]$ задана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Рассмотрим на примере кубического сплайна $S_3(x)$, построенного по значениям $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. $S_3(x)$ на каждом промежутке $x \in [x_i, x_{i+1}]$ представим в виде (2.19).

Обозначив $t = \frac{x - x_i}{h_i}$, имеем следующие формулы численного дифференцирования при $i = 0, 1, \dots, n - 1$

$$f'(x) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} [(2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}],$$

$$f''(x) \approx M_i(1 - t) + M_{i+1}t, \quad f'''(x) \approx \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}.$$

4. Численное решение задачи Коши

Пусть дана задача Коши:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Будем предполагать, что правая часть уравнения удовлетворяет условиям, при которых в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, u_0)$ задача имеет единственное решение. Задачу Коши в эквивалентном виде можно записать как

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(x, u) dx. \quad (4.2)$$

Для численного решения таких задач используют *метод дискретизации задачи*. Это означает, что вместо функции $y(x)$ непрерывного аргумента $x \in [a, b]$ ищут таблицу значений этой функции для некоторого набора узлов $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Узлы расположены не обязательно равномерно. Чаще всего узлы задают заранее, что связано с естественной задачей определить значения функции в конкретных, заранее перечисленных точках.

Многие методы решения одного уравнения можно применить к системе уравнений. Задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений высокого порядка можно записать в виде задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому мы ограничимся численными методами решения задачи Коши для уравнений первого порядка.

В дальнейшем $u(x)$ будет означать точное решение дифференциального уравнения, а $y(x)$ — приближенное решение. В частности, через y_i будем обозначать таблицу приближенных значений искомой функции.

4.1. Метод последовательных приближений

Рассмотрим задачу Коши (4.1) в эквивалентном виде (4.2). Пусть $y^{(0)}(x) = u(x_0) = u_0$ — начальное приближение. Тогда процесс

$$y^{(n)}(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(x, y^{(n-1)}(x)) dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

называют *методом Пикара* или *методом последовательных приближений*.

Теорема (сходимости метода Пикара). Если правая часть задачи Коши удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, то последовательные приближения $y^{(n)}(x)$ на некотором достаточно малом отрезке $[x_0, x_0 + h]$ имеют смысл и равномерно сходятся к $u(x)$, причем предельная функция является решением задачи (4.1).

Замечание. Метод Пикара легко переносится на системы дифференциальных уравнений первого порядка, причем будет справедлива аналогичная теорема сходимости метода Пикара.

Метод Пикара имеет один существенный недостаток: на каждом шаге приходится вычислять интегралы, которые трудно запрограммировать. Т.к. на практике обычно требуется не аналитическое выражение для решения, а таблица значений, то итерационные процессы по формулам (4.3) реализуют в виде программ, в которых вычисление определенных интегралов заменяют квадратурными формулами.

4.2. Метод Эйлера, его модификации

Рассмотрим задачу Коши (4.1) на отрезке $[a, b]$, где $a = x_0$. Разобьем отрезок точками $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Метод Эйлера (*метод ломаных*) определяется формулой

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \\ y_0 = u_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Заметим, что погрешность метода на одном шаге $[x_i, x_{i+1}]$ имеет порядок $O(h^2)$, а на всем отрезке $[a, b]$ составит величину порядка $O(h)$. Поэтому этот метод на практике используется редко из-за большой погрешности.

Обычно используют другие варианты метода Эйлера.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \cdot (f'_x(x_i, y_i) + f'_u(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i)), \\ i = 0, 1, \dots, N-1, \quad y_0 = u_0. \end{cases}$$

Процесс по данным формулам называют *исправленным методом Эйлера*. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, погрешность имеет порядок $O(h^3)$, на всем отрезке $[a, b]$ — погрешность $O(h^2)$. Главный недостаток метода в том, что на каждом шаге приходится вычислять частные производные f'_x и f'_u , поэтому он тоже используется редко.

Существует другая идея получения точных формул — это *усовершенствованные формулы Эйлера*.

$$\begin{cases} y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right), i = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $y_0 = u_0$, $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Формулы (4.5) определяют *первый усовершенствованный метод Эйлера*. *Второй усовершенствованный метод Эйлера (метод трапеций Эйлера)* имеет вид

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})), i = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.6)$$

Этот метод можно комбинировать с итерационным методом:

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где в качестве начального приближения берем $y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$ и на каждом шаге i решаем нелинейное уравнение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

относительно y_{i+1} итерационным способом, причем продолжаем процесс, пока не будет выполнено условие $|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| < \varepsilon$, где ε — точность решения нелинейного уравнения. Если неравенство выполнено, то берем в качестве $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$.

Замечание. Нет смысла решать нелинейное уравнение, используя этот итерационный процесс, с большей точностью, чем погрешность самого усовершенствованного метода.

Все эти методы без труда переносятся на решение систем дифференциальных уравнений.

В формулах Эйлера можно при необходимости менять шаг на ходу, т.е. если в процессе вычислений обнаружится, что функция y_i стала очень медленно (быстро) меняться, то дальше вычисления лучше вести с более крупным (мелким) шагом.

4.3. Семейство схем второго порядка точности

Семейство формул вида

$$y_{i+1} = y_i + h \left[(1 - \beta)f(x_i, y_i) + \beta f\left(x_i + \frac{h}{2\beta}, y_i + \frac{hf(x_i, y_i)}{2\beta}\right) \right] \quad (4.7)$$

имеют третий порядок точности на одном шаге и второй порядок точности на всем отрезке $[a, b]$. При $\beta = 1$ получаем первую усовершенствованную формулу Эйлера (4.5). При $\beta = \frac{1}{2}$ имеем вторую усовершенствованную формулу Эйлера (4.6). Значит, усовершенствованные формулы Эйлера имеют точность второго порядка. Используя другие значения коэффициента β можно получить различные формулы этого семейства.

4.4. Семейство методов Рунге–Кутты

Правую часть уравнения (4.1) вычислим p раз:

$$\begin{cases} \varphi_1 = hf(x_k, y_k), \\ \varphi_2 = hf(x_k + \alpha_1 h, y_k + \beta_{11}\varphi_1), \\ \varphi_3 = hf(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2), \\ \vdots \\ \varphi_p = hf\left(x_k + \alpha_{p-1}h, y_k + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_{p-1,i}\varphi_i\right). \end{cases} \quad (4.8)$$

Тогда общая формула семейства методов Рунге–Кутты имеет вид:

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^p A_i \varphi_i, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

Метод выбирается заданием p и набором параметров $\alpha_i, \beta_{ij}, A_i$.

Наиболее часто используется метод при $p = 4$, т.е. имеем формулы Рунге–Кутты 4-го порядка точности:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \varphi_4), \\ \varphi_1 = hf(x_k, y_k), \\ \varphi_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{\varphi_1}{2}\right), \\ \varphi_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{\varphi_2}{2}\right), \\ \varphi_4 = hf(x_k + h, y_k + \varphi_3). \end{cases} \quad (4.10)$$

Основные достоинства метода:

- 1) хорошая точность при простом алгоритме;
- 2) явная схема;
- 3) шаг h можно менять на ходу, т.е. в процессе вычислений;
- 4) для начала расчета нужно только то, что дано в самой постановке задачи Коши;
- 5) легко переносится на систему дифференциальных уравнений первого порядка.

4.5. Метод Рунге–Ромберга

Используя формулу Рунге–Ромберга (1.5) можно получить приближенное решение задачи Коши (4.1) в точке b с любой заранее заданной точностью $\varepsilon > 0$.

В соответствии с методикой Рунге–Ромберга, будем находить приближенные решения в этой точке с разными шагами и сравнивать их. Находим $Y_h(b)$, например, по формулам Рунге–Кутты с $m = 4$. Уменьшаем шаг в два раза и вычисляем значение $Y_{\frac{h}{2}}(b)$. Находим

$$\delta = \frac{Y_{\frac{h}{2}}(b) - Y_h(b)}{2^m - 1}.$$

Если $|\delta| < \varepsilon$, то полагаем $u(b) \approx Y_{\frac{h}{2}}(b) + R$, и на этом вычисления заканчиваются. Если $|\delta| \geq \varepsilon$, то уменьшаем шаг вдвое, находим новое приближение в точке b , сравниваем с тем, что было найдено на предыдущем этапе и т.д. Описанная методика дает возможность получить приближенное значение решения $u(x)$ задачи Коши с наперед заданной точностью в любой точке $b > a$.

Для получения таблицы приближенных значений решения $u(x)$ в точках x_i с заданной точностью ε , тоже можно пользоваться методикой Рунге–Ромберга. Сначала решаем задачу Коши на $[x_0, x_1]$ с заданной точностью ε , получим $u(x_1) \approx y(x_1)$ с точностью ε . Далее берем другой отрезок $[x_1, x_2]$ и находим $u(x_2) \approx y(x_2)$ с точностью ε и т.д. Получим таблицу $\left| \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ \hline y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{array} \right|$ с требуемой точностью ε .

4.6. Метод Адамса

Пусть решается задача Коши (4.1) на $[a, b]$. Используя для нахождения y_{i+1} четыре предыдущих значения $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}$ получаем 4-шаговый разностный метод Адамса при $h = x_{i+1} - x_i$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left[55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3}) \right], \quad i = 3, 4, \dots, \quad (4.11)$$

который имеет четвертый порядок точности.

★**Упр.** Докажите, что формулы Адамса имеют четвертый порядок точности.

Вычисления по формулам Адамса можно начать только после того, как найдено 4 «начальных» значения y_0, y_1, y_2, y_3 . Их находят другим методом, обычно методом Рунге–Кутты.

В одношаговых методах можно было легко менять шаг на ходу. В методе Адамса, как видно из формулы (4.11), это трудно сделать в процессе вычисления. При необходимости сперва нужно получить значение y_i для четырех узлов с новым шагом, с помощью одношагового метода, а потом продолжить вычисление с новым шагом по формулам Адамса.

5. Численное решение краевых задач с одной независимой переменной

Краевая задача называется *корректной*, если в некотором классе входных данных ее решение существует, единственно и непрерывным образом зависит от входных данных.

5.1. Метод стрельбы для линейных краевых задач

Рассмотрим простейшую краевую задачу, удовлетворяющую следующим условиям:

$$L[u] \equiv u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad (5.1)$$

$$l_a[u] \equiv \alpha u'(a) + \beta u(a) = A, \quad (5.2)$$

$$l_b[u] \equiv \delta u'(b) + \gamma u(b) = B, \quad (5.3)$$

где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$, а на функции f , p , q накладываются такие условия, при которых задача (5.1)–(5.3) имеет единственное решение. Метод основан на том, что линейную краевую задачу (5.1)–(5.3) можно свести к решению двух задач Коши.

Пусть $v(x)$ — решение задачи Коши (5.1) с краевыми условиями

$$v'(a) = \frac{A}{\alpha}, \quad v(a) = 0 \quad \text{при } \alpha \neq 0 \quad (5.4)$$

или

$$v'(a) = 0, \quad v(a) = \frac{A}{\beta} \quad \text{при } \beta \neq 0. \quad (5.5)$$

Пусть $w(x)$ — решение однородного уравнения

$$L[w] = 0 \quad (5.6)$$

с однородным условием на левом конце

$$l_a[w] = 0. \quad (5.7)$$

Для определенности начальные условия можно взять в виде

$$w'(a) = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad w(a) = 1 \quad \text{при } \alpha \neq 0$$

или

$$w'(a) = 1, \quad w(a) = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{при } \beta \neq 0.$$

Функция

$$u(x) = v(x) + cw(x) \quad (5.8)$$

с константой c , определяемой равенством

$$c = \frac{B - \delta v'(b) - \gamma v(b)}{\delta w'(b) + \gamma w(b)}, \quad (5.9)$$

дает искомое решение $u(x)$ исходной краевой задачи (5.1)–(5.3).

Таким образом, метод стрельбы для линейной задачи (5.1)–(5.3) сводится к решению двух задач Коши для функций $v(x)$ и $w(x)$ — двум пробным пристрелкам и построению функции $y(x)$ по формуле (5.8), где константа c определяется из (5.9). Задачи Коши (5.1), (5.4) (или (5.1), (5.5)) и (5.6)–(5.7) решаются, как правило, численными методами, например, методом Рунге–Кутты. Поэтому метод стрельбы относится к численным методам. Погрешность метода определяется погрешностью решения задачи Коши для функций $v(x)$ и $w(x)$.

Если знаменатель выражения (5.9) окажется равным нулю, т. е. $\delta w'(b) + \gamma w(b) = 0$, то $l_b[w] = 0$, что значит: наша задача имеет нетривиальное решение, а это служит признаком вырожденности исходной задачи (5.1)–(5.3).

Целесообразно строить численные решения обеих задач Коши на одном и том же дискретном множестве. Если требуется найти решение краевой задачи с заданной точностью ε , то можно использовать метод Рунге–Ромберга.

5.2. Метод стрельбы для нелинейных краевых задач

Если оператор $L[u]$ — нелинейный, то рассмотренный вариант метода стрельбы не будет работать. Но метод стрельбы можно использовать и для решения нелинейных краевых задач, если применить следующий несколько общий подход, который продемонстрируем на примере решения простейшей краевой задачи

$$u'' = f(x, u, u'), \quad (5.10)$$

$$u(a) = u_a, \quad (5.11)$$

$$u(b) = u_b, \quad (5.12)$$

где функция f — нелинейная.

Возьмем некоторую константу ξ и рассмотрим задачу Коши для уравнения (5.10) с начальными условиями

$$u(a) = u_a, \quad u'(a) = \xi, \quad (5.13)$$

где ξ — произвольное число, пока неизвестное. Предположим, что мы нашли решение $u(x, \xi)$ этой задачи при некотором $\xi = \xi_1$. Тогда

в точке b значение $u(b, \xi_1) \neq u_b$, т.е. $u(x, \xi_1)$ не является решением (5.10)–(5.12). Значит, будем подбирать параметр ξ таким образом, чтобы функция $u(x, \xi)$ удовлетворяла не только условиям (5.10)–(5.11), но и условию (5.12):

$$u(b, \xi) = u_b, \quad (5.14)$$

где $u(b, \xi)$ — решение задачи Коши (5.10), (5.13).

Уравнение (5.14) — нелинейное уравнение относительно ξ , значит его решение в явном виде не выписывается по результатам двух пристрелок. Следовательно, его решение ищем приближенным методом, например, методом половинного деления. Введем функцию $F(\xi) = u(b, \xi) - u_b$ и решаем уравнение $F(\xi) = 0$. Надо иметь в виду, что эта функция не задана аналитическим выражением, а задается в виде алгоритма — при каждом заданном значении аргумента для нахождения $F(\xi)$ надо решать задачу Коши (5.10), (5.13). Для решения уравнения методом половинного деления определяем отрезок $[c, d]$, на концах которого функция принимала бы значения разных знаков: $F(c) \cdot F(d) < 0$. Найдем точку $\xi_* : F(\xi_*) = 0$. Для найденного значения $\xi = \xi_*$ еще раз решаем задачу Коши (5.10), (5.13). Полученное решение удовлетворяет нелинейной краевой задаче (5.10)–(5.12).

5.3. Метод коллокации

Другие названия метода коллокации — интерполяционный метод или метод совпадений. Будем искать приближенное решение линейной краевой задачи (5.1)–(5.3) в виде функции

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (5.15)$$

где определяемые на отрезке $[a, b]$ базисные функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ и дополнительная функция $\varphi_0(x)$ должны быть дважды дифференцируемы и попарно линейно независимыми. Кроме того, функция $\varphi_0(x)$ должна удовлетворять краевым условиям (5.2)–(5.3), а функции $\varphi_i(x)$ при $i = 1, 2, \dots, n$ — соответствующим однородным краевым условиям, т.е. должны выполняться равенства $\forall i = 1, \dots, n$

$$l_a[\varphi_i] = \alpha \varphi_i'(a) + \beta \varphi_i(a) = 0, \quad l_b[\varphi_i] = \delta \varphi_i'(b) + \gamma \varphi_i(b) = 0. \quad (5.16)$$

В таком случае функция $y(x)$, определяемая выражением (5.15), при любых значениях коэффициентов c_i гарантировано удовлетворяет краевым условиям (5.2)–(5.3).

В методе коллокации коэффициенты c_i в представлении (5.15) приближенного решения $y(x)$ подбираются так, чтобы в узлах коллокации x_i таких, что $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, значения $y(x_i)$ приближенного решения были согласованы с точными значениями $u(x_i)$. Узлы коллокации должны быть не обязательно равноотстоящими, но строго внутренними точками отрезка $[a, b]$.

Поскольку точное решение $u(x)$ задачи (5.1)–(5.3) неизвестно, то согласование $y(x)$ и $u(x)$ в узлах коллокации x_i проводят подстановкой $y(x)$ в уравнение (5.1). Полагая

$$a_{ij} = \varphi_j''(x_i) + p(x_i)\varphi_j'(x_i) + q(x_i)\varphi_j(x_i), \quad (5.17)$$

$$b_i = f(x_i) - \varphi_0''(x_i) - p(x_i)\varphi_0'(x_i) - q(x_i)\varphi_0(x_i), \quad (5.18)$$

получим СЛАУ относительно коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n

$$\sum_{j=1}^n c_j a_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.19)$$

Решив эту систему каким-нибудь стандартным методом (см. [7]) и подставив найденные коэффициенты c_i в (5.15), получим приближенное решение краевой задачи (5.1)–(5.3) методом коллокации.

Успех применения метода коллокации к задаче (5.1)–(5.3) во многом зависит от удачного выбора базисных функций φ_i . В конкретных задачах выбор таких функций, по возможности, должен опираться на априорные и эмпирические сведения о решении. В отсутствие таковых, для смешанной краевой задачи можно предложить следующий набор базисных функций.

Функцию $\varphi_0(x)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла неоднородным краевым условиям (5.2)–(5.3). Обычно берут линейную функцию $\varphi_0(x) = cx + d$, для которой находят коэффициенты c и d из системы:

$$\begin{cases} \alpha c + \beta(ca + d) = A, \\ \delta c + \gamma(cb + d) = B. \end{cases} \quad (5.20)$$

Функции $\varphi_i(x)$ можно взять однопараметрическими вида

$$\varphi_i(x) = p_i(x - a)^i + (x - a)^{i+1}, \quad (5.21)$$

где $p_i = -\frac{(b-a)(\delta(i+1) + \gamma(b-a))}{\delta i + \gamma(b-a)}$, если $\alpha = 0$, или вида

$$\varphi_i(x) = p_i(x-a)^{i+1} + (x-a)^{i+2}, \quad (5.22)$$

где $p_i = -\frac{(b-a)(\delta(i+2) + \gamma(b-a))}{\delta(i+1) + \gamma(b-a)}$ в самом общем случае. Тогда функция (5.15), где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_i(x)$ определены с помощью (5.20) и (5.21)–(5.22), может служить приближенным решением краевой задачи (5.1)–(5.3).

Приближенное решение $y(x)$ в точках коллокации $x_i \in (a, b)$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению (5.1), но оно не обязано совпадать в этих точках с точным решением $u(x)$.

Метод коллокации можно использовать и для решения нелинейных краевых задач. Трудности здесь ожидают с подбором базисных функций и в необходимости решать нелинейные системы при отыскании коэффициентов c_i .

5.4. Метод Галеркина

Метод Галеркина относится к проекционным методам. Пусть необходимо решить краевую задачу (5.1)–(5.3). В качестве гильбертова пространства рассмотрим $L_2[a, b]$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом, где скалярное произведение определяется как

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная замкнутая система линейно независимых элементов в $L_2[a, b]$. Зафиксируем первые n элементов системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда они образуют базис некоторого конечномерного подпространства $H_n \subset L_2[a, b]$. Приближенное решение $y(x)$ будем искать в виде $y(x) = \varphi_0(x) + y_n(x)$, где $y_n(x) \in H_n$, $\varphi_0(x) \perp H_n$ и любой элемент раскладывается по базису $y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$, т.е. $y(x)$ ищется в виде (5.15).

Успех приближенного метода во многом зависит от удачного выбора базисных функций φ_i . Сначала выбирают функцию $\varphi_0(x)$, которая удовлетворяла бы краевым условиям (5.2)–(5.3). Обычно берут линейную функцию $\varphi_0(x) = cx + d$, для которой находят коэффициенты c и d из системы (5.20). Далее выбирают функции $\varphi_i(x)$

так, чтобы они удовлетворяли однородным краевым условиям (5.16) при любых коэффициентах c_i . К примеру в качестве функции $\varphi_i(x)$ можно взять однопараметрический набор функций вида (5.21) или (5.22).

Неизвестные c_i подбираем так, чтобы решение $y(x)$ было наилучшим среди всех возможных таких решений (5.15). Для этого подставим (5.15) в дифференциальное уравнение (5.1) и рассмотрим разность, которую называют *невязкой* уравнения $L[u] = f$

$$R(c_1, c_2, \dots, c_n) = L[\varphi_0] + \sum_{i=1}^n c_i L[\varphi_i] - f. \quad (5.23)$$

Если $u(x)$ — точное решение, то $R(c_i) = 0$. Поэтому для приближенного решения коэффициенты c_i выбираем так, чтобы невязка была в каком-то смысле мала. Согласно методу Галеркина требуется, чтобы невязка R была ортогональна всем базисным функциям φ_j , т.е.

$$(R, \varphi_j) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Используя свойства скалярного произведения, получим СЛАУ (5.19), где $a_{ij} = (L[\varphi_i], \varphi_j)$ и $b_j = (f - L[\varphi_0], \varphi_j)$. Решив СЛАУ и подставив найденные коэффициенты c_i в (5.15), получим решение краевой задачи (5.1)–(5.3) методом Галеркина.

5.5. Разностный метод

Один из наиболее простых и универсальных методов приближенного решения краевых задач является конечно-разностный метод. **Идея метода** заключается в следующем.

1. Область непрерывного изменения аргумента заменяется конечным множеством точек, которое называется *сеткой*.

2. На этом конечном множестве определяют сеточную функцию, поставив в соответствие каждому элементу множества вполне определенное число. Вместо функции непрерывного аргумента будем искать сеточную функцию, которая в каком-то смысле является решением исходной краевой задачи. Другими словами, мы хотим найти таблицу значений искомой функции в некоторых точках.

3. Понятие производной к сеточным функциям в обычном классическом смысле неприменимо, т.к. есть минимальное расстояние меж-

ду узлами сетки и нет смысла рассматривать предел при стремлении приращения аргумента к нулю. Вместо производных в исходном дифференциальном уравнении и краевых условиях используются их приближенные конечно–разностные аппроксимации, т. е. линейные комбинации значений функции в некоторых точках заданной сетки.

4. Заменяя производные конечно–разностными отношениями формул численного дифференцирования, получим систему уравнений. Причем количество уравнений равно количеству узлов сетки. Таким образом, вместо данной краевой задачи будем иметь систему алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах выбранной сетки. Полученная система называется *разностной схемой*.

Рассмотрим реализацию метода на примере решения линейной краевой задачи (5.1)–(5.3). На отрезке $[a, b]$ введем сетку с постоянным шагом $h = \frac{b-a}{n}$, $\omega_h = \{x_i\}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Для замены дифференциального уравнения разностным надо ввести сеточные функции. Положим $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, где $i = 0, 1, \dots, n$. Подставляя формулы численного дифференцирования (3.3)–(3.5) для производных в дифференциальное уравнение (5.1) и граничные условия (5.2)–(5.3), получим разностную схему

$$\begin{cases} \alpha \frac{y_1 - y_0}{h} + \beta y_0 = A, \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \delta \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \gamma y_n = B, \end{cases}$$

которая представляет из себя СЛАУ относительно неизвестных значений сеточной функции y_0, \dots, y_n .

Дифференциальное уравнение аппроксимировали с точностью $O(h^2)$, краевые условия — с точностью $O(h)$, поэтому разностная схема аппроксимирует исходную краевую задачу с точностью $O(h)$.

Вводя обозначения: $\beta h - \alpha = c_0$, $\alpha = d_0$, $Ah = r_0$, $b_i = 2 - p_i h$, $c_i = -4 + 2h^2 q_i$, $d_i = 2 + hp_i$, $r_i = 2h^2 f_i$, $b_n = -\delta$, $c_n = \gamma h + \delta$, $r_n = Bh$, систему перепишем следующим образом

$$\begin{cases} c_0 y_0 + d_0 y_1 = r_0, \\ b_i y_{i-1} + c_i y_i + d_i y_{i+1} = r_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ b_n y_{n-1} + c_n y_n = r_n. \end{cases}$$

Это СЛАУ с трехдиагональной матрицей, которая решается высокоэффективным методом прогонки (см. [7, с. 10]). Достаточные условия устойчивости и корректности метода прогонки для данной системы имеют вид (см. [7, с. 11])

$$h \max_{x \in [a, b]} |p(x)| \leq 2, \quad q(x) < 0. \quad (5.24)$$

Если имеем краевые условия первого рода, то достаточно выполнения условий (5.24). В случае краевых условий третьего рода требуется выполнение (5.24), $\alpha\beta < 0$ и $\gamma\delta > 0$.

6. Численное решение уравнений в частных производных

6.1. Основные понятия теории разностных схем

Суть разностного метода была изложена в п. 5.5. Применение метода приводит к решению СЛАУ. Получив вместо исходной задачи СЛАУ, недостаточно считать, что решение задачи закончено, необходимо еще изучить возможные методы решения полученных систем. Заметим, что получаемые системы будут иметь, как правило, некоторые особенности, которые облегчают решение.

Каждое уравнение системы будет связывать значения искомой функции в нескольких соседних точках, называемых *шаблоном*, т. е. в каждое уравнение входит только несколько неизвестных (в зависимости от количества точек в шаблоне), а значит, получим матрицу, хоть и большого порядка, но очень сильно разреженную. Это позволяет подбирать экономичные методы решения таких систем.

Пусть имеем следующую краевую задачу:

$$Lu = f(x), \quad x \in G, \quad G \subset \mathbb{R}^m. \quad (6.1)$$

Будем считать, что все дополнительные условия (начальные и краевые) включены в линейный оператор L и в функцию f .

В области G выберем сетку G_h , где $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ задает шаг сетки по каждой координате. На сетке G_h будем рассматривать сеточные функции $y_h(x)$, $x \in G_h$. Эти функции образуют некоторое пространство H_h . Функция $u(x)$, $x \in G$, непрерывного аргумента является элементом некоторого функционального пространства

$u(x) \in H_0$. Заменяем дифференциальный оператор L разностным оператором L_h , а $f(x)$ сеточной функцией $\varphi_h(x)$. Тогда (6.1) заменится разностной схемой:

$$L_h y_h(x) = \varphi_h(x), \quad x \in G_h. \quad (6.2)$$

Пусть $u(x)$ — решение исходной задачи (6.1), $y_h(x)$ — решение разностной задачи (6.2). Каждой функции $u(x) \in H_0$ ставим в соответствие некоторую сеточную функцию $u_h(x) \in H_h, x \in G_h$ с помощью оператора проектирования $P_h : H_0 \rightarrow H_h$, т. е. $P_h u(x) = u_h(x)$.

Рассмотрим разность $y_h - u_h$, которая является элементом пространства H_h , и близость этих функций будем оценивать по норме этого пространства $\|y_h - u_h\|_h$. При этом нужно, чтобы выполнялось условие согласования норм $\|\cdot\|_h$ и $\|\cdot\|_0$ в смысле предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0, \quad \forall u \in H_0.$$

Погрешностью аппроксимации оператора L разностным оператором L_h называется сеточная функция $\psi_h = (Lv)_h - L_h v_h$, где $v \in H_0, v_h = P_h v, (Lv)_h = P_h(Lv)$. Если $\|\psi_h\|_h \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$, то говорят, что разностный оператор L_h *аппроксимирует дифференциальный оператор L* . Оператор L_h *аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $k > 0$* , если выполнено равенство: $\|\psi_h\|_h = O(\|h\|^k)$ ($\|h\| \rightarrow 0$).

Разностная схема (6.2) называется *корректной*, если 1) решение разностной схемы существует и единственно для любой правой части $\varphi_h \in H_h$; 2) существует константа $M_1 > 0$, не зависящая от h : $\forall \varphi_h \in H_h$ выполнено неравенство: $\|y_h\|_h \leq M_1 \|\varphi_h\|_h$. Свойство 2) означает, что решение разностной задачи непрерывно зависит от правой части, причем имеем равномерную непрерывность относительно h . Свойство 2) называется *устойчивостью разностной схемы к малым изменениям правой части*.

Сеточная функция $z_h(x) = y_h(x) - P_h u(x), x \in G_h$ называется *погрешностью разностной схемы*. Говорят, что решение разностной задачи (6.2) *сходится к решению дифференциальной задачи* (6.1), если погрешность $\|z_h\|_h \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Разностная схема имеет *k -й порядок точности*, если $\|z_h\|_h = O(\|h\|^k)$ ($\|h\| \rightarrow 0$).

Ответ на вопрос об оценке точности получаемых результатов и сходимости дает следующая теорема.

Теорема (о сходимости в теории разностных схем). Пусть дифференциальная задача (6.1) поставлена корректно, разностная схема (6.2) является корректной и аппроксимирует исходную задачу. Тогда решение задачи (6.2) сходится к решению исходной задачи (6.1), причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Обозначим через P центральную точку (x_i, y_j) шаблона, через $I(P)$ — множество всех точек этого шаблона, а через $I'(P)$ обозначим проколотую окрестность точки P .

Каноническая запись разностного уравнения имеет вид

$$A(P)u(P) = \sum_{Q \in I'(P)} B(P, Q)u(Q) + F(P), \quad P \in \Omega, \quad (6.3)$$

где Ω — сеточное множество.

Отметим, что коэффициенты $A(P)$ и $B(P, Q)$, вообще говоря, зависят от выбранной точки P сетки и обладают важными свойствами:

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad A(P) = \sum_{Q \in I'(P)} B(P, Q). \quad (6.4)$$

***Упр.** Докажите свойства (6.4).

Для граничных узлов $P \in G_h$ полагают выполнение условий:

$$A(P) = 1, \quad I'(P) = \emptyset, \quad F(P) = \varphi(P). \quad (6.5)$$

Введем сеточный оператор

$$Lu(P) = A(P)u(P) - \sum_{Q \in I'(P)} B(P, Q)u(Q), \quad (6.6)$$

тогда разностное уравнение (6.3) запишется в виде

$$Lu(P) = F(P), \quad P \in \Omega. \quad (6.7)$$

Вводя обозначение $D(P) = A(P) - \sum_{Q \in I'(P)} B(P, Q)$, получим

$$Lu(P) = D(P)u(P) + \sum_{Q \in I'(P)} B(P, Q)[u(P) - u(Q)].$$

Говорят, что в точке $P \in \Omega$ выполнены условия положительности коэффициентов разностной схемы (6.3), если

$$A(P) > 0, B(P, Q) > 0 \forall Q \in I'(P), D(P) \geq 0. \quad (6.8)$$

Если точка сетки $P_0 \in \Omega$ является граничной, то $D(P_0) = A(P_0) > 0$.

6.2. Основные теоремы

Теорема 1. Пусть при всех $P \in \Omega$ выполнено условие положительности коэффициентов (6.8), $Lu(P) \leq 0$ ($Lu(P) \geq 0$) и найдется хотя бы один узел $P_0 \in \Omega$: $D(P_0) > 0$. Тогда $u(P) \leq 0$ ($u(P) \geq 0$) $\forall P \in \Omega$.

Теорема 2 (существование и единственность решения разностной схемы). Если выполнено условие положительности коэффициентов (6.8) и $\exists P_0 \in \Omega$: $D(P_0) > 0$, то разностная задача (6.7) имеет единственное решение.

Пусть наряду с уравнением (6.7) дано уравнение

$$Lv(P) = \tilde{F}(P), P \in \Omega, \quad (6.9)$$

которое отличается от (6.7) только правой частью. Пусть Ω — сеточное множество.

Теорема 3 (сравнения). Пусть на сетке Ω выполнены условия положительности коэффициентов (6.8) Тогда если выполнено $|F(P)| \leq |\tilde{F}(P)|$, $\forall P \in \Omega$, то $|u(P)| \leq |v(P)|$, $\forall P \in \Omega$.

Обозначим через ω — множество внутренних точек, γ — множество граничных точек, причем $\Omega = \omega \cup \gamma$.

Переформулируем теорему сравнения на случай краевой задачи первого типа. Пусть даны две задачи:

$$Lu(P) = F(P), P \in \omega, u(P) = \mu(P), P \in \gamma, \quad (6.10)$$

$$Lv(P) = \tilde{F}(P), P \in \omega, v(P) = \tilde{\mu}(P), P \in \gamma. \quad (6.11)$$

Теорема 4 (сравнения для краевых задач). Пусть при $P \in \gamma$ выполнены условия положительности коэффициентов (6.8) и $|F(P)| \leq |\tilde{F}(P)|$, $\forall P \in \omega$; $|\mu(P)| \leq |\tilde{\mu}(P)|$, $\forall P \in \gamma$. Тогда $|u(P)| \leq |v(P)|$, $\forall P \in \Omega = \omega \cup \gamma$.

Используя теорему сравнения, легко получить устойчивость решения первой краевой задачи по граничным условиям.

Теорема 5 (устойчивости решения). Для решения однородного уравнения $Lu(P) = 0$, $\forall P \in \omega$, с неоднородными краевыми условиями $u(P) = \mu(P)$, $\forall P \in \gamma$, при выполнении условий положительности коэффициентов (6.8) имеет место следующая оценка $\max_{P \in \omega} |u(P)| \leq \max_{P \in \gamma} |\mu(P)|$.

6.3. Разностный метод для уравнений эллиптического типа

Пусть дано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad (x, y) \in G \quad (6.12)$$

с условиями Дирихле на границе области G

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma = \partial G. \quad (6.13)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда область $G = [0, a] \times [0, b]$ есть прямоугольник. Введем сетку на области G с шагами $h_1 = \frac{a}{n+1}$ и $h_2 = \frac{b}{m+1}$ по переменным $x_i = h_1 \cdot i$ и $y_j = h_2 \cdot j$:

$$G_h = \{(x_i, y_j), i = 0, 1, \dots, n+1, j = 0, 1, \dots, m+1\}.$$

Введем сеточные функции $f(x_i, y_j) = f_{ij}$, $\varphi(x_i, y_j) = \varphi_{ij}$.

Уравнение Лапласа заменится разностным уравнением для внутренних узлов

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_2^2} = -f_{ij}, \quad (6.14)$$

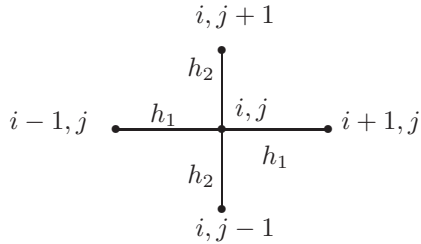
$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m,$$

а условие Дирихле (6.13) для граничных узлов переписется в виде

$$u_{ij} = \varphi_{ij} \quad (6.15)$$

при $i=0$ и $i=n+1$: $j=0, 1, \dots, m+1$; при $j=0$ и $j=m+1$: $i=1, 2, \dots, n$. Разностное уравнение (6.14) в узле (x_i, y_j) связывает значения функции в пяти точках шаблона (x_i, y_j) , (x_{i-1}, y_j) ,

$(x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}), (x_i, y_{j+1})$.



Получили СЛАУ (6.14), (6.15) для неизвестных значений u_{ij} сеточной функции в узлах сетки G_h . Количество уравнений и неизвестных этой функции в общем случае равно $(n+2) \cdot (m+2)$. Учитывая граничные условия, которые определяются сразу, имеем количество уравнений и неизвестных — $n \cdot m$.

Заметим, что при $h_1 = h_2 = h$ уравнение (6.14) можно переписать в виде

$$u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = -h^2 f_{ij}. \quad (6.16)$$

Из самого уравнения (6.16) видно, что удобно использовать метод Якоби или метод Зейделя. Перепишем в виде

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + \frac{h^2}{4} f_{ij}.$$

Возьмем $u_{ij}^{(0)}$ — начальное приближение. Тогда итерационный процесс с помощью метода Якоби задается как

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}) + \frac{h^2}{4} f_{ij}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для заданной точности ε итерационный процесс останавливается, если будет выполнено неравенство $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \varepsilon$.

Для метода Зейделя итерационный процесс принимает вид

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)}) + \frac{h^2}{4} \cdot f_{ij}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Замечание. В методе Якоби порядок, в котором обрабатываются уравнения, не имеет значения, а для метода Зейделя каждому способу упорядочения соответствует свой итерационный процесс.

★Упр. Исследуйте вопросы сходимости рассмотренных итерационных методов. *Указание.* Используйте необходимое и достаточное условие сходимости метода простых итераций для СЛАУ (см. [7, с. 12]).

6.4. Разностный метод для уравнений параболического типа

Рассмотрим на области $G = \{(x, t) \mid 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (6.17)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in (0, l), \quad (6.18)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad \forall t \in (0, T], \quad (6.19)$$

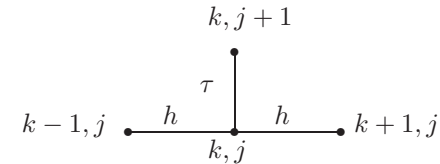
где $g(x, t), f(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ — заданные функции. Введем сеточное множество

$$G_{h,\tau} = \{(x_k, t_j) \mid x_k = kh, k = 0, 1, \dots, n; t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m\},$$

где $h = \frac{l}{n}$ — шаг по пространственной координате, $\tau = \frac{T}{m}$ — шаг по временной координате. Введем сеточные функции $g_{kj} = g(x_k, t_j), f_k = f(x_k), \mu_{1j} = \mu_1(t_j), \mu_{2j} = \mu_2(t_j), k = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$. Получим схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{k,j+1} - y_{k,j}}{\tau} = \frac{y_{k-1,j} - 2y_{k,j} + y_{k+1,j}}{h^2} + g_{kj}, \\ k = 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m-1; \\ y_{k,0} = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n; \\ y_{0,j} = \mu_{1j}, \quad y_{n,j} = \mu_{2j}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \end{cases}$$

шаблон которой имеет вид



Получим СЛАУ относительно $y_{k,j}$. Выразим $y_{k,j+1}$:

$$y_{k,j+1} = \frac{\tau}{h^2} y_{k-1,j} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_{k,j} + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1,j} + \tau g_{kj}, \quad (6.20)$$

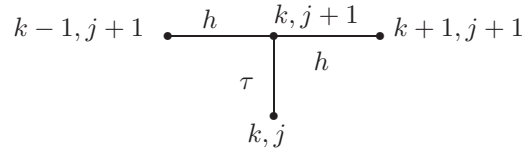
$$k = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Равенство (6.20) позволяет вычислять все значения $y_{k,j}$ в явном виде, не решая системы. Взяв $j = 0$, можно вычислить $y_{k,1}$; взяв $j = 1$ можем вычислить $y_{k,2}$ и т.д. В силу записи (6.20), полученная разностная схема называется *явной разностной схемой* решения уравнения теплопроводности (6.17)–(6.19). Погрешность аппроксимации полученной разностной схемы имеет величину порядка $O(\tau + h^2)$. Недостаток явной схемы заключается в том, что решение задачи является неустойчивым к погрешностям в начальных данных. Условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}. \quad (6.21)$$

Так как устойчивость возможна только при (6.21), то разностная схема называется *условно устойчивой*. Условие (6.21) является достаточно сильным ограничением. Поэтому условно устойчивые схемы на практике используются редко.

Используя шаблон:



получим *неявную разностную схему*

$$\begin{cases} \frac{y_{k,j+1} - y_{k,j}}{\tau} = \frac{y_{k+1,j+1} - 2y_{k,j+1} + y_{k-1,j+1}}{h^2} + g_{kj}, \\ k = 1, 2, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m-1; \\ y_{k,0} = f_k, k = 0, 1, \dots, n; \\ y_{0,j} = \mu_{1j}, j = 0, 1, \dots, m; \\ y_{n,j} = \mu_{2j}, j = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (6.22)$$

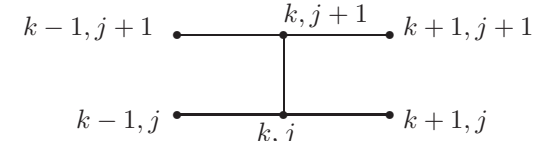
Преобразуя (6.22) и вводя обозначение $\frac{\tau}{h^2} = \sigma$, получим систему для

нахождения неизвестных:

$$\begin{cases} \sigma y_{k-1,j+1} - (1 + 2\sigma) y_{k,j+1} + \sigma y_{k+1,j+1} = -\tau g_{kj} - y_{k,j}, \\ k = 1, 2, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m-1, \\ y_{k,0} = f_k, k = 0, 1, \dots, n; \\ y_{0,j} = \mu_{1j}, j = 0, 1, \dots, m; \\ y_{n,j} = \mu_{2j}, j = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

При каждом фиксированном j имеем СЛАУ с трехдиагональной матрицей, следовательно, можно применить метод прогонки. Неявная схема лишена главного недостатка, присущего явным схемам, — она *безусловно устойчива*.

Рассмотрим для исходной задачи (6.17)–(6.19) разностную схему с весами — объединенный вариант явной и неявной схемы, которая использует следующий шаблон.



Введем параметр $\rho \geq 0$, который будем называть *весом*. Для аппроксимации второй производной по x в правой части уравнения (6.17) будем использовать и j слой, как в явной схеме, и $j+1$ слой, как в неявной.

$$\begin{cases} \frac{y_{k,j+1} - y_{k,j}}{\tau} = \rho \frac{y_{k+1,j+1} - 2y_{k,j+1} + y_{k-1,j+1}}{h^2} + \\ + (1 - \rho) \frac{y_{k+1,j} - 2y_{k,j} + y_{k-1,j}}{h^2} + g_{kj}, \\ k = 1, 2, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m-1; \\ y_{k,0} = f_k, k = 0, 1, \dots, n; \\ y_{0,j} = \mu_{1j}, j = 0, 1, \dots, m; \\ y_{n,j} = \mu_{2j}, j = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

При $\rho = 0$ получим явную схему, при $\rho = 1$ — неявную схему, а при $\rho = \frac{1}{2}$ симметричную шеститочечную разностную схему. Разностная схема с весами будет устойчивой, если выполнены условия:

$$0 < \rho < 1, \quad \rho > 1 - \frac{h^2}{2\tau}.$$

6.5. Разностный метод для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим уравнение колебания однородной струны единичной длины:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (6.23)$$

с начальными условиями

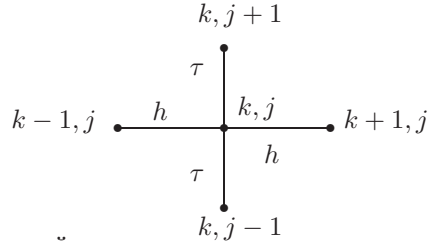
$$u(x, 0) = \varphi(x), u'_t(x, 0) = \psi(x), x \in [0, 1], \quad (6.24)$$

и краевыми условиями первого типа

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t), t \in (0, T), \quad (6.25)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ — заданные функции.

На пятиточечном шаблоне



получим простейшее разностное уравнение

$$\frac{y_{k,j+1} - 2y_{k,j} + y_{k,j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{k-1,j} - 2y_{k,j} + y_{k+1,j}}{h^2}, \quad (6.26)$$

$$j = 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, n-1,$$

которое имеет второй порядок погрешности аппроксимации по τ и h ,

т. е. $O(\tau^2 + h^2)$. Вводя обозначение $\frac{\tau^2}{h^2} = \sigma$, перепишем разностное уравнение (6.26) в виде

$$y_{k,j+1} = \sigma y_{k-1,j} + 2(1 - \sigma)y_{k,j} + \sigma y_{k+1,j} - y_{k,j-1}, \quad (6.27)$$

$$j = 1, 2, \dots, m-1, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Дополним его граничными условиями

$$u_{0,j} = \mu_1 j, y_{n,j} = \mu_2 j, j = 1, 2, \dots, m, \quad (6.28)$$

$$y_{k,0} = \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n, \quad (6.29)$$

$$y_{k,1} = y_{k,0} + \tau \cdot \psi_k + \frac{\tau^2}{2} \cdot \varphi''_k, k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.30)$$

Дифференциальная задача (6.23)–(6.25) заменяется разностной задачей (6.27)–(6.30) и порядок аппроксимации полученной разностной схемы будет второй. Данная разностная схема решается в явном виде следующим образом. По (6.29)–(6.30) определим значения на нулевом и первом слоях сетки и добавим значения $y_{0,1}$, $y_{n,1}$, найденные по формулам (6.28). По (6.27) при $j = 1$ вычисляем значения на втором слое $y_{k,2}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Эти значения дополняем значениями $y_{0,2}$ и $y_{n,2}$ по (6.28). Вычисляем по (6.27) при $j = 2$, значения $y_{k,3}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и дополняем $y_{0,3}$ и $y_{n,3}$, найденными по (6.28) и т. д.

Устойчивость полученной разностной схемы определяется соотношением

$$\tau \leq h, \quad (6.31)$$

которое называют *условием Куранта*. Снова имеем ограничение на шаг по времени. Но это ограничение не такое жесткое, как в случае явных схем для уравнений параболического типа.

Используя неявные схемы для гиперболических уравнений также можно получить безусловно устойчивые схемы. Однако они применяются редко, т. к. условие Куранта не является обременительным для расчетов, т. е. у неявных схем нет особых преимуществ перед явными.

★Упр. Получите неявную схему для уравнений колебаний и исследуйте ее на устойчивость.

6.6. Метод конечных элементов (МКЭ)

Пусть дана краевая задача в операторном виде

$$Au = f. \quad (6.32)$$

Задача построения обобщенного решения этого уравнения равносильна задаче об отыскании элемента энергетического пространства H_A , реализующего минимум функционала

$$J(u) = (Au, u) - 2(f, u), u \in H_A. \quad (6.33)$$

Для отыскания минимума функционала обычно строят минимизирующую последовательность.

Последовательность функций $\{u_n\}$, принадлежащих области определения функционала D_A , называют *минимизирующей* для этого функционала, если $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \mu$. Предел минимизирующей последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ дает искомое решение.

Одним из способов построения минимизирующей последовательности является процесс Ритца. В классическом варианте **метод Ритца** заключается в следующем. Выберем последовательность элементов $\{\varphi_i\}$, удовлетворяющую трем условиям:

- 1) все элементы $\varphi_i \in H_A$ из энергетического пространства;
- 2) $\forall n$ элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно не зависимы;
- 3) последовательность $\{\varphi_i\}$ полна в H_A , т. е. $\forall u \in H_A, \forall \varepsilon > 0, \exists N,$

$$\forall n > N, \exists u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, a_i = \text{const} : \|u - u_n\|_{H_A} < \varepsilon.$$

Тогда n -е приближение (или n -й элемент минимизирующей последовательности) ищется в виде $u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$, где числовые коэффициенты a_i выбираются из условия минимума функционала $J(u_n)$.

Но нам потребуется несколько более **общая формулировка метода Ритца**. Введем последовательность конечномерных подпространств $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ энергетического пространства H_A . Будем говорить, что эта последовательность $\{V_i\}$ полна в H_A , если $\forall u \in H_A, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \inf_{v \in V_n} \|u - v\|_{H_A} < \varepsilon$. Другими словами, полнота последовательности пространств $\{V_i\}$ означает, что каждый элемент $u \in H_A$ с любой степенью точности может быть приближен элементом $u_n \in V_n$, если n достаточно велико. Тогда n -м приближением (или n -м элементом минимизирующей последовательности) назовем элемент $u_n \in V_n$, который минимизирует функционал $J(u)$ на этом подпространстве.

В данной формулировке метод Ритца реализуется следующим образом. Пусть $\{\varphi_i^{(n)}\}$ — базис подпространства V_n , т. е. любой элемент $u_n \in V_n$ может быть записан в виде

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}. \quad (6.34)$$

Подставим u_n вместо u в функционал (6.33). Тогда получим функцию n независимых переменных $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$. Коэффициенты

$a_i^{(n)}$ выберем таким образом, чтобы полученная функция принимала минимальное значение, для чего приравняем нулю ее первые частные производные по этим переменным. Получаем систему Ритца

$$\sum_{j=1}^n (A\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)}) a_j^{(n)} = (f, \varphi_i^{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.35)$$

Матрица этой системы симметрична, т. к. $(Au, v) = (u, Av)$. Определитель СЛАУ (6.35) есть определитель Грамма линейно независимых элементов и поэтому отличен от нуля. Найдя коэффициенты $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ и подставив их в (6.34), получим элемент u_n , являющийся приближенным решением уравнения (6.32) по Ритцу.

Приближенное по Ритцу решение тем ближе к точному, чем больше n . Как следствие, для достижения высокой точности приходится решать СЛАУ (6.35) с матрицей большой размерности.

Метод Ритца основан на вариационной формулировке краевой задачи. Более общим вариационным методом, который непосредственно применим к уравнению (6.32), является метод Галеркина (называемый так же проекционный метод Бубнова–Галеркина). Теперь оператор A может быть произвольным линейным оператором, определенным на множестве D_A , всюду плотном в гильбертовом пространстве H_A . Запишем уравнение (6.32) в виде уравнения Галеркина

$$(Au, v) = (f, v), \quad v \in H_A. \quad (6.36)$$

Как и в методе Ритца выбирается последовательность конечномерных подпространств $V_n \subset H_A$ с базисами $\{\varphi_i^{(n)}\}$. Приближение по Галеркину по-прежнему ищется в виде (6.34). Но теперь коэффициенты $a_j^{(n)}$ определяются не из условия минимизации функционала, а из условия ортогональности невязки $Au_n - f$ элементам базиса $\{\varphi_i^{(n)}\}$, т. е.

$$(Au_n - f, \varphi_i^{(n)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это снова даст СЛАУ вида (6.35). Полученное совпадение в общем случае носит формальный характер, а по существу имеет только в случае, когда оператор A обладает свойством самосопряженности, т. е. $(Au, v) = (u, Av)$. Метод Галеркина применим к более широкому классу задач, в частности, к нестационарным задачам.

Метод конечных элементов (далее МКЭ) является специальным вариантом метода Рунге–Галеркина. Классические методы Рунге и Галеркина обладают двумя существенными *недостатками*:

- 1) на практике построение базисных функций φ_i легко осуществить только для некоторых специальных областей;
- 2) соответствующие матрицы получаемых систем являются полными и очень часто, даже в случае простых задач, плохо обусловлены.

Принципиальное различие МКЭ состоит в построении базисных функций. В МКЭ базисные функции выбираются в виде локальных сплайнов и для областей общего вида могут быть вычислены весьма просто. Главная особенность таких функций в том, что они финитны, т. е. обращаются в нуль всюду, кроме фиксированного числа элементарных подобластей, на которые делится данная область. Отсюда следует, что матрица системы будет сильно разреженной и имеет ленточную структуру. Это дает устойчивость процесса численного решения системы.

Этапы МКЭ:

1. Заданная область Ω разбивается на конечное число элементарных подобластей, называемых *конечными элементами* так, чтобы выполнялись следующие свойства:

- а) $\Omega = \cup_{K \in T_n} K$, где K — конечный элемент;
- б) K не вырождаются (треугольники не переходят в отрезки, отрезки — в точки, четырехугольники — в треугольники и т. п.);
- в) соседние конечные элементы между собой не перекрываются.

2. Строится конечномерное подпространство функций V_n таких, что на каждой области K , выбранного разбиения, эти функции являются многочленами не выше заданной степени. Можно использовать рациональные функции или другие, легко вычисляемые функции.

3. В пространстве V_n должен существовать хотя бы один базис из функций с минимальными носителями. Предполагается, что этот базис может быть легко описан. Тогда приближение по Галеркину ищется по этому базису. Существование такого базиса обеспечивает большое число нулей в матрице системы (6.35), что облегчает нахождение решения такой системы.

Успех в использовании МКЭ в значительной степени зависит от того, насколько удачно осуществлено указанное построение применительно к условиям конкретной задачи.

7. Лабораторные работы

7.1. Численное интегрирование

Дан интеграл I_1 (n — номер Вашего варианта):

$$I_1 = \int_{0.1n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} e^{0.01nx} dx \text{ — для вариантов с четными номерами,}$$

$$I_1 = \int_{0.2n}^{2n} \frac{1}{x + \sin 0.1nx} dx \text{ — для вариантов с нечетными номерами.}$$

1. Определите число узлов для нахождения значения интеграла I_1 с точностью $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ по формулам прямоугольников. Вычислите I_1 с данной точностью.

2. Определите число узлов для нахождения значения интеграла I_1 с точностью $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ по формулам трапеций. Вычислите I_1 с точностью ε_0 .

3. Определите число узлов для нахождения значения интеграла I_1 с точностью $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ по формулам Симпсона. Вычислите I_1 с заданной точностью.

4. Используя формулы интерполяционного типа, вычислите интеграл I_1 . Оцените погрешность.

5. Вычислите I_1 по формуле Гаусса с k узлами ($k \geq 4$ выбираете самостоятельно).

6. Вычислите первый интеграл с помощью сплайнов.

7. С точностью $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ найдите значение интеграла I_1 методом Рунге–Ромберга.

8. Подбирая подходящие методы вычисления определенных и несобственных интегралов, с точностью $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ найдите значение интеграла:

$$I_2 = \int_{-0.1n}^{+\infty} x^{k+2} e^{-x} dx \text{ — для вариантов с нечетными номерами,}$$

$$I_2 = \int_{-0.1n}^{0.1n} \frac{\sin(x - 0.1n)}{\sqrt{(x + 0.1n)(x + 5)}} dx \text{ — для вариантов с четными номерами,}$$

где n — номер Вашего варианта, а k вычисляется: $k = \left[\frac{n}{10} \right]$.

7.2. Численное дифференцирование

Дана функция

$$f(x) = {}^{k+2}\sqrt{e^x} \cos\left(0.1nx + \frac{\pi n}{2}\right) + x^n,$$

где n — номер Вашего варианта, $k = n \pmod{2}$.

1. Создайте таблицу с приближенными значениями производной функции $f'(x)$, используя формулы первого порядка точности.

2. Создайте таблицу с приближенными значениями первой производной функции $f'(x)$, используя формулы второго порядка точности.

3. Создайте таблицу приближенных значений производных функции $f''(x)$, вычисляемых по формулам второго порядка точности.

4. Используя интерполяционный метод, вычислите производные первого и второго порядков.

5. Вычислите производные первого и второго порядков при помощи сплайнов.

6. Сравните полученные результаты. Оцените погрешность вычислений.

7.3. Численное решение задачи Коши

Дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

где функция $f(x, y)$, отрезок $[a, b]$, начальное значение y_0 , а n — номер Вашего варианта.

n	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0	n	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0
1	$\cos\left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$	[0; 2]	0	16	$\frac{x}{3} + 2y$	[0; 1]	0
2	$\frac{2x^4 + 2y}{x}$	[1; 2]	1	17	$xy + e^x$	[0; 1]	1
3	$\frac{1}{\cos x} - y \operatorname{tg} x$	[0; 2]	1	18	$xy + \sin x$	[0; 1]	2
4	$\frac{xy + e^x}{x}$	[1; 2]	1	19	$2 \sin x - \frac{1}{3} \cos y$	[0; 1]	0
5	$\frac{4x + 2y}{2x + 1}$	[0; 1]	1	20	$x^3 + y^3$	[0; 1]	0
6	$-\frac{1 + xy}{x^2}$	[1; 2]	1	21	$x^2 + \frac{2}{y^2}$	[1/2; 2]	1
7	$\frac{y}{x} + x \cos x$	[1; 2]	1	22	$\frac{1}{x + y^2}$	[1; 3]	1

n	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0	n	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0
8	$2x(x^2 + y)$	[0; 1]	1	23	$\sqrt{4x + 2y - 1}$	[0; 2]	1
9	$2\frac{y}{x \ln x} + \frac{1}{x}$	[2; 4]	0	24	$2x^3 + \frac{y}{x}$	[1; 2]	1
10	$\frac{3x^2 e^{-x} - (x+1)y}{x}$	[1; 2]	1	25	$\frac{1}{x + 2y}$	[0; 2]	-1
11	$\frac{x^2 + y}{x}$	[1; 2]	1	26	$\frac{4x + 2y}{2x + 1}$	[0; 2]	0
12	$2e^x - y$	[0; 1]	1	27	$\cos(x - y)$	[0; π]	0
13	$\frac{2y + x - 4 \ln x}{x}$	[1; 3]	1	28	$\frac{y}{3x - y^2}$	[1; 3]	1
14	$\frac{3y - x^2}{x}$	[1; 2]	1	29	$y^2 e^x - 2y$	[0; 2]	1
15	$\frac{(1 - 2xy)(x - 1)}{x}$	[1; 3]	0.5	30	$\frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}$	[2; 3]	1

Решите задачу Коши

- методом последовательных приближений (Пикара);
- методом Эйлера;
- одним из усовершенствованных методов Эйлера;
- по формулам Рунге–Кутты;
- методом Адамса.

6. Сравните с точным решением, полученным методами дифференциальных уравнений, или сравните результаты, построив графики полученных решений. Оцените погрешность.

7. Методом Рунге–Ромберга вычислите значение $y(x)$ в правом конце отрезка с заданной точностью 10^{-5} .

7.4. Численное решение краевых задач

Дана линейная краевая задача

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), & x \in [a, b], \\ \alpha u'(a) + \beta u(a) = A, \\ \delta u'(b) + \gamma u(b) = B, \end{cases}$$

где функция и краевые условия заданы в таблице, а n — номер Вашего варианта.

n	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	a	b	α	β	γ	δ	A	B
1	$2x^3$	x	x^2	0	2	1	-1	2	3	-4	-1
2	\sqrt{x}	$\sqrt[3]{x^2}$	$x-2$	1	2	0.5	-6	1	0	7	1
3	$\cos x$	$\sin x$	2	0	$\pi/2$	0	1	1	1	-1	-2
4	$2-x^2$	$3x+1$	$4x^3$	1	2	1	-3	1	-2	0	-3
5	$\frac{2}{x}$	x	$\frac{1}{x^2}$	1	2	-2	2	-1	1	-3	1
6	$\frac{2}{\sqrt{x}}$	x	$\frac{1}{x}$	1	2	1	-3	2	1	-6	1
7	$\sin x$	$\sin 2x$	$2 \cos x$	0	π	0	2	0	1	-1	-2
8	0	$\operatorname{ch} x$	e^x	0	1	-1	-1	-1	1	-e	-3e
9	$\operatorname{sh} x$	e^{-2x}	e^{2x}	0	1	1	e	2	0	-e	e^2
10	x^2	$-x$	$\frac{6-3x^3}{x^4}$	1	2	0	1	1	3	1	0.5
11	3	$-\frac{2}{(x+1)^2}$	$-\frac{1}{(x+1)^3}$	0	1	0	1	0	1	0	0.5
12	x^3	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{5}{x^2}$	1	2	1	-1	3	1	1.25	0.5
13	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	1	2	1	-1	1	-1	1	$4 \ln 2$
14	$\frac{4x-2}{2x+1}$	$-\frac{8}{2x+1}$	$4(2x+1)^2$	0	1	0	1	1	1	0	0.5
15	$\frac{2-4x}{x}$	$\frac{4(x-1)}{x}$	$\frac{1}{x}$	1	2	0.5	2	1	0	2	1
16	$\frac{2-4x}{1-x}$	$-\frac{4x}{1-x}$	$\frac{6}{1-x}$	2	3	0	-1	1	1	1	1
17	$\frac{2}{x}$	0	$\frac{1}{x^3}$	1	2	1	-4	1	3	2	0.5
18	0	π^2	$3\pi^2 \sin 2\pi x$	0	1	1	-4	-3	0	0.5	0
19	$-\frac{x+4}{2x}$	$\frac{x+4}{2x^2}$	$-\frac{x^2}{2}$	1	2	1	-2	3	-2	1	0.5
20	$\frac{4x-2}{x(x-1)}$	$\frac{2}{x(x-1)}$	$\frac{e^{-x}}{x(x-1)}$	-2	-1	-1	3	1	0	1	1
21	$\frac{x}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$	-1	0	1	-2	1	1	1	0
22	$-\frac{2(x+1)}{x}$	$\frac{2(x+1)}{x^2}$	$2xe^{2x}$	-2	-1	1	-5	5	3	1	3
23	$-\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x-1}$	$(x-1)e^x$	-1	0	1	-4	-5	2	1	-5
24	$\frac{2}{x(x-1)}$	$-\frac{2}{x^2(x-1)}$	$\frac{xe^x}{x-1}$	-2	-1	1	-5	1	0	0	-3
25	$-\frac{x+3}{x}$	$\frac{2x+3}{x^2}$	x^2	1	2	0	-2	2	1	1	-1
26	$\frac{4x+1}{2x}$	$\frac{2x+1}{2x}$	$\frac{e^{-x}}{2x}$	1	2	3	0	1	0	-2	1
27	$\frac{2x}{x-1}$	$-\frac{2x}{(x-1)^2}$	$(x-1)^2$	-1	0	0	-2	1	1	-5	-1
28	x^2	$-x$	-3	-1	0	3	-1	5	-2	-9	0
29	e^x	xe^x	1	4	0	3	-1	4	1	0	1
30	x^3	$-x$	$\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x}$	1	2	0	1	3	1	1	0.5

Решите краевую задачу используя

1. метод стрельбы для линейной краевой задачи;
2. метод коллокации;
3. метод Галеркина;
4. разностный метод.
5. Сравните результаты, построив графики полученных решений.

Оцените погрешность.

6. Используя разностный метод, решите краевую задачу для уравнения эллиптического типа:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), & (x, y) \in G, \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \end{cases}$$

где $G = [0, a] \times [0, a]$, Γ — граница области G , а соответствующие функции и параметры заданы в таблице, n — номер Вашего варианта.

n	$f(x, y)$	a	$\varphi(x, y)$
1	$2x^2 + y^2$	2	$3x - 5y + 2$
2	$x^2 - y$	3	$(x - y)^2 + 2x$
3	e^{x+y}	1	$3e^x + y^2(1 - x)$
4	$\cos(x + \pi y)$	$\pi/2$	$3 - 2(1 - y) + 2x/\pi$
5	$\sin x - 2y$	$\pi/2$	$3 - 2(1 - y) + \cos 2x$
6	$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} y$	1	$3x + (2 - y) \operatorname{sh} x + 1$
7	$\sqrt{x^2 + y^2}$	1	$(1 - y)y + 2x\sqrt{y + x}$
8	$x^3 - 2(x + 1)y^2$	2	$4x(y - 1) - y(x + 1) + 2$
9	$x - \operatorname{sh} y$	2	$x - (2 - y) \operatorname{ch} x$
10	$(x - 1)^3 - (1 - y)^2$	1	$x - (1 - y)(x - 2)$
11	$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{1 + y}$	1	$2x - 2y(x - 1)$
12	$x^2 - y^3$	1	$2(x - 1)^2 y + (3 - y)x$
13	$\operatorname{tg} x - 2 \cos y$	$\pi/4$	$\sin 2x - \sin^2 y$
14	$3(x^2 + y^2)$	1	$x^3 y^3 + 1 - (x^3 - 1)(y^3 - 1)$
15	0	1	$e^x \cos y$
16	0	π	$e^{\frac{x}{\pi}} \sin x$
17	$-y$	$\pi/2$	$\frac{2}{\pi} x \cos y$
18	$-y$	$\pi/2$	$\frac{2}{\pi} y \sin x$
19	$-2y$	$\pi/2$	$\cos x \cos y$
20	$2e^{-x} \cos x \sin y - 3y$	$\pi/2$	$e^{-x} \cos x \cos y$
21	$2e^{-y} \sin x \cos y - 3y$	$\pi/2$	$e^{-y} \cos x \cos y$
22	$-2e^{-(x+y)} \sin(x + y) - 4y$	$\pi/2$	$e^{-(x+y)} \cos x \cos y$
23	$-2 \sin(x - y)$	$\pi/2$	$-\sin(x + y)$
24	$-5 \sin x \sin 2y$	$\pi/2$	$\sin x \sin 2y$
25	$12x$	1	$3x^2 - y$
26	0	1	$xy + 1 + (x - 1)(y - 1)$
27	xe^y	1	xe^y

n	$f(x, y)$	a	$\varphi(x, y)$
28	$e^{xy}(x^2 + y^2)$	1	$e^{(x+y)}$
29	$\sqrt[3]{x+y}$	2	$\sqrt[3]{x(y-2)^3} - \sqrt[3]{(x-2)^2y}$
30	x^2e^{x-y}	1	$2ye^x - x^2e^y$

7. Используя разностный метод, решите краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), & (x, t) \in G, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, l), \\ u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t), & t \in [0, T], \end{cases}$$

где $G = (0, l) \times (0, T)$, соответствующие функции и параметры заданы в таблице, а n — номер Вашего варианта.

n	$g(t, x)$	$f(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	l	T
1	$\ln(tx + 1)$	$x - 1$	$t - 2$	-1	2	2
2	$x^3\sqrt{t}$	x^3	$-t$	$t^2 - 8t + 16$	1	2
3	$\sqrt{tx + 1}$	0	t^2	$1 - t$	1	1
4	xe^t	$-x$	$\text{sh}(t + e)$	1	e	e
5	$2x^2(1-t) - t(1-x^2)$	$1 - x$	$1 - t$	t	1	1
6	$t^2 - e^x$	$x + 1$	$(t-1)^2$	$e^t + 1$	1	2
7	$12 \cos 4t \cos 2x$	$\cos x + \pi - 2x$	$\cos \frac{t}{2} + 5$	π	$\pi/2$	π
8	$\sin x^2 + \cos t$	$\sin(\sin x)$	$\sin(2t - 1)$	$-\cos t$	$\pi/2$	π
9	$t^2 - 2x + 1$	$-x$	$(t-3)t^3$	$-t^2$	2	2
10	$t^3 - 7x$	$-x^2 + 1$	$\frac{1}{t^2 + 1}$	$\frac{1}{t - 5}$	2	3
11	$(xt)^2 - 10t$	$x - 4x^2$	$\sqrt[3]{t(t-1)}$	-2	1	2
12	$-\text{sh}(t-7)$	$-e^{x-1}$	1	$-\text{ch}(1-t)$	2	2
13	$x(xt + 1)$	0	$t^2 - 1$	$t + 1$	1	2
14	e^{t-x+1}	-1	$e^t - 3$	$-e^{-2t}$	2	2
15	$e^t \cos 2x$	$\sin 2x$	-1	$\cos \frac{t}{2}$	π	π
16	$x^2 - 3t$	x	t	$2t - 4$	2	2
17	$2x^2 + t^3$	$x + 1$	$(t-1)^2$	t^4	2	1
18	$\text{sh } x - 2t$	e^x	t^2	$1 - 2t$	2	1
19	$e^{-2x} - 3e^t$	$\text{ch } x$	$\text{sh } t$	e^{-t+2}	1	2

n	$g(t, x)$	$f(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	l	T
20	$\sin x - \cos 2t$	$\cos x$	1	$\sin t$	π	$\pi/2$
21	$\text{ch } x + \text{sh } t$	e^{-x+4}	$\text{sh } t + 1$	e^{-t^2}	e	e
22	$2x^4 + t^3$	$x + 2$	$(t+1)^2$	$\frac{1}{t+1}$	2	1
23	$xt - 3 + t$	$x - 2$	$1 - t$	t^3	2	1
24	$\sin(x - 2t)$	$\cos 2x$	$\cos t$	$\sin t$	π	$\pi/2$
25	$\cos^2 x + 2 \cos t$	$\sin x$	$\sin t$	1	$\pi/2$	$\pi/2$
26	$x - \cos^2 t$	$2x$	1	$\sin t$	1	$\pi/4$
27	$\sqrt{x - 2t^2 + 1}$	x	t	$1 - t$	1	2
28	$x^3 - \sqrt{2 - t}$	$2x + 1$	t	$t - 1$	1	2
29	$x - 2t$	$-x$	$t/2$	$-t$	1	2
30	e^{x+t}	$\text{sh } x$	$3e^t$	$-\text{ch } t$	2	2

8. Используя разностный метод, решите краевую задачу для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), & (x, t) \in G, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, 1], \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = \mu_1(t), & t \in (0, T], \\ u(1, t) = \mu_2(t), & t \in (0, T], \end{cases}$$

где $G = (0, 1) \times (0, T]$, n — номер Вашего варианта, а функции и параметры заданы в таблице.

n	$g(t, x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	T
1	$-3 \cos^2 t \sin 3x$	$6 \cos 3x$	π	$\sin 3t$	$-\cos 6t$	$\pi/2$
2	$5 \cos t \sin^2 x$	$-2 \sin 3x$	π	$\cos 3t$	$\cos t$	$\pi/2$
3	$2 \text{sh}(t) \text{ch}(x)$	$e^x - 1$	$-2x$	e^{2t}	$3e^{-t}$	1
4	$3 \text{ch}(t) - \text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$2 \text{sh}(x)$	$-e^t$	$4e^{-t}$	2
5	$-\sqrt[3]{x+t}$	$2x^3$	$\sqrt[3]{x+1}$	$-7(t+1)$	-5	3
6	$xt + 1$	$2x^2$	$-x$	$1 - t$	$t - 1$	1
7	$x(t-2)$	x	$(1-x)^3$	t^2	$2t + 3$	1
8	$\sqrt{xt} + 2$	$\sqrt{x(x-3)}$	$5 - x$	t^2	$t + 1$	1
9	$\cos(t+x)$	$-\sin 2x$	$\cos(x-1)$	$\sin t$	$-\cos(2t+1)$	$\pi/3$
10	$\sin t^2 + 3 \cos x$	$\sin x$	$\sin 2x$	$\cos t$	$\cos t^2$	$\pi/3$
11	$e^{-t} \sin x$	$2 \sin 2x$	$-\sin x$	$-5e^{-t} \cos t$	$-e^t$	2

n	$g(t, x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	T
12	$4e^{-t}x^2$	$3x^3 - 1$	$2x$	e^{-2t}	$5 - e^{-t}$	2
13	$e^x(t+1)$	e^x	1	$\sqrt{t+1}$	$-2t^2$	1
14	$\operatorname{ch} 2t + x^3$	$1 - x$	x	$e^t + 1$	$-\operatorname{sh}(t)$	2
15	$2\operatorname{sh} x + t - 1$	e^{-x}	$\operatorname{sh}(2x)$	$-t^2(t+2)$	$t^3 + 1$	2
16	$6x^2t^3 + 2$	$-x^2$	x^2	$\frac{1}{t^2 + 4}$	t^3	2
17	$4x^2 - 3t$	$2x + 1$	x^4	$-t$	$t^2 + 1$	3
18	$10e^{-3t} \cos 7x$	$2 \sin 7x$	$-\cos 7x$	$e^{-t} + 3$	e^{-3t}	3
19	$48 \sin 7t \cos 9x$	$-6 \cos 3x$	$8 \sin 3x$	$\sin 7t$	π	π
20	$36 \cos 18t \cos 3x$	$6 \cos 3x$	$-6 \cos x$	$\sin 3t$	$-\cos 6t$	$\pi/2$
21	$x - 3t^2$	x^2	$-x$	$4t + 2$	t^2	3
22	$x^2 - t^2$	$2x$	$1 - x$	$t + 2$	$t^2 - 1$	1
23	$3t^2x - 2x^2t$	$3 - x$	x	t^2	$2t - 1$	2
24	$\operatorname{sh} x + t^2$	$\operatorname{ch} x$	e^{-x}	$t + 1$	$t - 2$	2
25	$3x - \operatorname{sh} t$	2	$1 - x$	$\operatorname{ch} t$	e^t	1
26	$\sin(x + 2t)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin t$	$2 \cos t - 1$	π
27	$\cos x + 2t \sin x$	$\sin x$	$1 - \sin x$	t	$2t - 1$	2
28	$\sqrt{x+t}$	\sqrt{x}	$1 - x$	\sqrt{t}	$t - 1$	1
29	$(x + 2t)t + 2x^4$	$(x + 1)^2$	x	$(t - 1)^4$	2	2
30	$5x^3 + 8t^2$	$-x^2$	$\sqrt{x^3}$	t^2	$1 - t^2$	1

7.5. Примерные темы домашних заданий

Домашнее задание состоит в самостоятельном изучении выбранного метода, написании программы и подготовке отчета (в печатном виде). Отчет должен содержать: постановку задачи, описание используемого метода, код программы, результаты ее работы на тестовых примерах, список литературы.

1. Семейство схем Эйлера второго порядка точности (случаи, отличные от рассмотренных на лекциях и в лабораторных работах).
2. Метод Рунге–Кутты порядка не равного четырем.
3. Метод конечных элементов.
4. Метод граничных элементов.
5. Методы оптимизации:
 - Метод покоординатного спуска;
 - Методы случайного поиска (без обучения и с обучением);

- Градиентные методы;
 - Метод Ньютона;
 - Прямой симплекс-метод;
 - Модифицированный симплекс-метод;
 - Метод искусственного базиса;
 - Метод возможных направлений;
 - Метод Келли (или секущих плоскостей);
 - Метод ветвей и границ;
 - Методы штрафа.
6. Решение краевых задач с помощью сплайнов.
 7. Решение нелинейной краевой задачи методом стрельбы.
 8. Решение задачи Коши с помощью теории сплайнов.
 9. Решение интегральных уравнений.
 10. Задача приближения неявных функций.
 11. Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка методами Эйлера.
 12. Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге–Кутты.
 13. Решение систем дифференциальных уравнений.
 14. Многошаговые разностные методы решения задачи Коши.
 15. Многошаговые разностные методы решения краевой задачи.

Список рекомендуемой литературы

- [1] Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 2000. 190 с.
- [2] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. 636 с.
- [3] Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: ОНИКС 21 век, 2005. 400 с.
- [4] Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
- [5] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
- [6] Каханер Д., Моулдер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001. 575 с.
- [7] Ким И. Г., Латыпова Н. В. Численные методы. Ч. 1. Ижевск: Изд-во «Удм. ун-т», 2012. 46 с.
- [8] Латыпова Н. В. Приложения сплайнов. Ижевск: Изд-во «Удм. ун-т», 2005. 52 с.
- [9] Махмутов М. М. Лекции по численным методам. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 238 с.
- [10] Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику. М.: Наука, 1994. 336 с.
- [11] Самарский А. А. Введение в численные методы. СПб.: Лань, 2005. 288 с.
- [12] Образовательный математический сайт [exponenta.ru](http://www.exponenta.ru)
<http://www.exponenta.ru>
- [13] Каталог образовательных интернет-ресурсов
http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&i_op=viewlink&cid=2851
- [14] Библиотека Численного анализа НИВЦ МГУ:
http://www.srcc.msu.ru/num_anal/lib_na/libnal.htm
- [15] Netlib Repository: <http://netlib.org/>
- [16] Numerical Recipes Online:
http://www.numerical-recipes.com/nronline_switcher.html
- [17] <http://www.exponenta.ru/journal> — Математический интернет-журнал «Exponenta»
- [18] <http://num-anal.srcc.msu.ru>

Приложение

В качестве примера решения задачи рассмотрим задачу Коши: $y'' - y' - 2y = x$ с начальными условиями $y(0) = 0$ и $y'(0) = -1$. Соответствующая ей система имеет вид:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = z + 2y + x, \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 0, z(0) = -1$.

Решение полученной системы разными методами представлено в таблице.

x_i	Метод Эйлера		Модифицированный метод Эйлера	
	$y(t)$	$z(t)$	$y(t)$	$z(t)$
0	0	-1	0	-1
0.1	-0.1	-1.1	-0.1050000000	-1.110000000
0.2	-0.21	-1.22	-0.2221000000	-1.244200000
0.3	-0.332	-1.364	-0.3539620000	-1.407924000
0.4	-0.4684	-1.5368	-0.5038336400	-1.607667280
0.5	-0.62208	-1.74416	-0.6756770408	-1.851354082
0.6	-0.796496	-1.992992	-0.8743259898	-2.148651980
0.7	-0.9957952	-2.2915904	-1.105677708	-2.511355416
0.8	-1.22495424	-2.64990848	-1.376926804	-2.953853608
0.9	-1.489945088	-3.079890176	-1.696850701	-3.493701402
1.0	-1.797934106	-3.595868211	-2.076157855	-4.152315710

x_i	Метод Рунге–Ромберга 4 порядка		Точное решение	
	$y(t)$	$z(t)$	$y(t)$	$z(t)$
0	0	-1	0	-1
0.1	-0.1053500000	-1.110700000	-0.1053506895	-1.110701379
0.2	-0.2229544900	-1.245908980	-0.2229561745	-1.245912349
0.3	-0.3555266141	-1.411053228	-0.3555297000	-1.411059400
0.4	-0.5063802065	-1.612760413	-0.5063852320	-1.612770464
0.5	-0.6795627842	-1.859125568	-0.6795704570	-1.859140914
0.6	-0.8800179845	-2.160035969	-0.8800292308	-2.160058462
0.7	-1.113783966	-2.527567932	-1.113799992	-2.527599984
0.8	-1.388235736	-2.976471472	-1.388258106	-2.976516212
0.9	-1.712381128	-3.524762256	-1.712411866	-3.524823732
1.0	-2.097222310	-4.194444620	-2.097264025	-4.194528050

Учебное издание

**Ким Инна Геральдовна
Латыпова Наталья Владимировна
Моторина Ольга Леонидовна**

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
Учебно–методическое пособие
Часть 2

Компьютерный набор и верстка

Н. В. Латыпова, И. Г. Ким, О. Л. Моторина

Отпечатано в авторской редакции с оригинал–макета заказчика

Подписано в печать 30.04.13. Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. 3,7. Тираж 30 экз.

Печать офсетная Заказ №

Типография ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный
университет»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.