Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. №3(26)

УДК 517.958+517.984.5

© Л. И. Данилов
danilov@otf.fti.udmurtia.su

О СПЕКТРЕ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА И ДИРАКА

Ключевые слова: операторы Шредингера и Дирака, спектр, периодические электрический и магнитный потенциалы, переменная метрика.

Abstract. We prove the absence of eigenvalues in the spectra of two-dimensional periodic Schrödinger and Dirac operators with variable metric and complex-valued electric and magnetic potentials.

Введение

В последнее время возрос интерес к исследованию абсолютной непрерывности спектра периодических эллиптических дифференциальных операторов, и в частности, операторов Шредингера с переменной метрикой (см., например, [1–5] и ссылки в этих работах). В данной статье рассматриваются двумерные периодические операторы Шредингера

$$\sum_{j,l=1}^{2}\Big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j\Big)G_{jl}\Big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_l}-A_l\Big)+V \qquad (0.1)$$

и Дирака

$$\sum_{j=1}^{2}(h_{j1}\widehat{\sigma}_1+h_{j2}\widehat{\sigma}_2)\Big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j\Big)+V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3\,, \qquad (0.2)$$

действующие в $L^2(\mathbf{R}^2)$ и $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ соответственно, где $A = (A_1, A_2)$ и V — векторный (магнитный) и скалярный (электрический) потенциалы, $\widehat{G} = (G_{jl})_{j,l=1,2}$ — вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция (метрика), для которой $\widehat{G}, \widehat{G}^{-1} \in L^\infty$, $\widehat{h} = (h_{jl})_{j,l=1,2}$ — вещественная матричная функция, $\det \widehat{h} > 0$, $\widehat{h}\widehat{h}^T = \widehat{G}$. Функции $A, V, \widehat{G}$ и $\widehat{h}$ предполагаются периодическими с (общей) решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$. Основные результаты статьи, касающиеся оператора Дирака (0.2), приведены в разделе 1. В этом же разделе вводятся обозначения и сформулированы некоторые утверждения, используемые в дальнейшем. В разделе 2 содержатся результаты об операторе Шредингера (0.1). В последующих разделах доказываются теоремы из разделов 1 и 2.

1. О спектре двумерного периодического оператора Дирака

Пусть $\mathcal{M}_2$ — линейное пространство комплексных (2×2)-матриц с нормой

$$\|\widehat{L}\|_{\mathcal{M}_2} = \max_{u \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}} \frac{|\widehat{L}u|}{|u|}, \ \widehat{L} \in \mathcal{M}_2$$

($|.|$ и $(.,.)$ — евклидовы норма и скалярное произведение векторов из $\mathbf{C}^d$ (и $\mathbf{R}^d$), $d = 1, 2$ (скалярное произведение предполагается линейным по второму сомножителю)), $\mathcal{S}_2$ — множество эрмитовых матриц из $\mathcal{M}_2$,

$$\widehat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули, $\widehat{I} = \widehat{I}_2 \in \mathcal{M}_2$ — единичная матрица. Пусть $\{e_j\}_{j=1,2}$ — ортогональный базис в $\mathbf{R}^2$, относительно которого задаются координаты всех векторов: $x_j = (e_j, x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, $j = 1, 2$; $U_r(x)$ — открытый круг радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbf{R}^2$, $U_r = U_r(0)$, $\overline{U}_r(x)$ — замыкание круга $U_r(x)$,

$\partial U_r(x) = \overline{U}_r(x) \backslash U_r(x)$, $S_1 = \partial U_1(0) = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$. Через $H^s(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^d)$, где $s \in \mathbf{N}$, $d = 1, 2$, обозначаются классы Соболева (вектор-)функций $\varphi \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}^d$ (для которых все частные производные до порядка s включительно принадлежат пространству $L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^d)$), $H^s(\mathbf{R}^2) = H^s(\mathbf{R}^2; \mathbf{C})$; $\nabla = \operatorname{grad} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, mes — мера Лебега в $\mathbf{R}^2$.

Обозначим через $\mathbf{G}$ множество непрерывно дифференцируемых невозрастающих функций $g \colon (0, 1] \to (0, +\infty)$ таких, что

$$\int_0^1 \frac{dr}{rg(r)} < +\infty \tag{G1}$$

и

$$\frac{g(\frac{r}{2}) - g(r)}{g(r)} \to +0 \tag{G2}$$

при $r \to +0$. Для любой функции $g \in \mathbf{G}$ имеем

$$\frac{g(r)}{\ln \frac{1}{r}} \to +\infty \tag{G3}$$

при $r \to +0$. Действительно, в противном случае нашлись бы число $b > 0$ и последовательность $r_j \in (0, 1)$, $j \in \mathbf{N}$, такие, что $r_{j+1} \leqslant r_j^2$ и $g(r_j) \leqslant b \ln \frac{1}{r_j}$ для всех $j \in \mathbf{N}$. Но тогда

$$\int_0^1 \frac{dr}{rg(r)} \geqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{g(r_{j+1})} \int_{r_{j+1}}^{r_j} \frac{dr}{r} \geqslant \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln \frac{1}{r_{j+1}}} \ln \frac{r_j}{r_{j+1}} = +\infty\,.$$

Последнее противоречит свойству (G1). Из (G2) следует также, что для любого $\varepsilon > 0$ (и всех функций $g \in \mathbf{G}$)

$$r^\varepsilon g(r) \to 0 \tag{G4}$$

при $r \to +0$. Любая функция $g(r) = \ln^{1+\varepsilon} \frac{2}{r}$, $r \in (0, 1]$, $\varepsilon > 0$, принадлежит множеству $\mathbf{G}$. Пусть $\mathbb{L}_0(\mathbf{R}^2)$ — множество функций $W \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ таких, что для любой функции $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ справедливо включение $W\varphi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ и для любого $\varepsilon > 0$

существует константа $C_{\varepsilon,W} > 0$ такая, что для всех функций $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$

$$\|W\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leqslant \varepsilon \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)} + C_{\varepsilon,W}\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \,. \tag{1.1}$$

Неравенство (1.1) означает, что функция $|W|^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ имеет нулевую грань (в $L^2(\mathbf{R}^2)$) относительно оператора $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ (с областью определения $D(-\Delta) = H^2(\mathbf{R}^2)$) в смысле квадратичных форм.

Если $W \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ и функция W^2 принадлежит классу Като K_2 (см. [6, с. 17]), то $W \in \mathbb{L}_0(\mathbf{R}^2)$.

Для фиксированной решетки (периодов) $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ с базисными векторами E_1 и E_2 определяется элементарная ячейка $K = \{x = \sum\limits_j \xi_j E_j \colon 0 \leqslant \xi_j < 1, j = 1,2\}$;

$$K^c = \{x = \sum_j \xi_j E_j \colon -\frac{1}{2} \leqslant \xi_j < \frac{1}{2}, j = 1,2\} = K - \frac{1}{2}(E_1 + E_2)\,.$$

Пусть $L^\beta_\Lambda(K)$, $\beta \geqslant 1$ (или $\beta = \infty$), — множество периодических (с решеткой периодов Λ) функций из $L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $\mathbb{L}^\Lambda_0(\mathbf{R}^2)$ — множество периодических (с решеткой периодов Λ) функций из $\mathbb{L}_0(\mathbf{R}^2)$. Если $\beta > 2$, то $L^\beta_\Lambda(K) \subset \mathbb{L}^\Lambda_0(\mathbf{R}^2)$. В дальнейшем функции, определенные на элементарной ячейке K, будут также отождествляться с их периодическими продолжениями (с решеткой периодов Λ) на все пространство $\mathbf{R}^2$.

Для функций $g \in \mathbf{G}$ обозначим

$$L^2(g;K) = \{\varphi \in L^2_\Lambda(K) \colon \|\varphi\|^2_{L^2(g;K)} =$$

$$= \sup_{y\in\mathbf{R}^2} \int_{(K^c+y)\cap\overline{U}_1(y)} g(|x-y|)|\varphi(x)|^2 d^2x < +\infty\}\,.$$

Если $W \in L^2(g;K)$, то $W^2 \in K_2$ (см. лемму 3.8), поэтому также $W \in \mathbb{L}^\Lambda_0(\mathbf{R}^2)$.

Пусть $\mathbf{R}^2 \ni x \to h_{jl}(x) \in \mathbf{R}$, $j,l = 1,2$, и $\mathbf{R}^2 \ni x \to \widehat{V}(x) \in \mathcal{M}_2$ — (измеримые) периодические функции с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$,

$$\widehat{V}(x) = V^{(0)}(x)\widehat{I} + \sum_{j=1}^{3} V^{(j)}(x)\widehat{\sigma}_j\,,\ x \in \mathbf{R}^2,$$

$V^{(j)} \in \mathbb{L}^\Lambda_0(\mathbf{R}^2) \subset L^2_\Lambda(K)$, $j = 0,1,2,3$. Обозначим $\widehat{h} = (h_{jl})_{j,l=1,2}$, $\widehat{h}_j = h_{j1}\widehat{\sigma}_1 + h_{j2}\widehat{\sigma}_2$, $h_j = (h_{j1}, h_{j2}) \in \mathbf{R}^2$, $j = 1,2$. Тогда

$$\widehat{h}_j(x)\widehat{h}_l(x) + \widehat{h}_l(x)\widehat{h}_j(x) = 2G_{jl}(x)\widehat{I}\,, \tag{1.2}$$

где $G_{jl}(x) = (h_j(x), h_l(x))$, $j,l = 1,2$. Если векторы $h_1(x)$ и $h_2(x)$ при п.в. $x \in \mathbf{R}^2$ линейно независимы, то $\mathbf{R}^2 \ni x \to \widehat{h}(x)\widehat{h}^T(x) = \widehat{G}(x) = (G_{jl}(x))_{j,l=1,2}$ — вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция. Будем предполагать, что $h_{jl} \in L^\infty_\Lambda(K)$ и существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \leqslant \det \widehat{h}(x) = h_{11}(x)h_{22}(x) - h_{12}(x)h_{21}(x)$ при п.в. $x \in \mathbf{R}^2$. Из последних условий следует, что $\widehat{G}, \widehat{G}^{-1} \in L^\infty(K;\mathcal{S}_2)$.

Рассмотрим оператор

$$\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}(x) = -i\sum_{j=1}^{2} \widehat{h}_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \widehat{V}(x)\,,$$

действующий в $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ и имеющий областью определения $D(\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}) = D(\widehat{\mathcal{D}})$ класс Соболева $H^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$. Обозначим также

$$\widehat{\mathcal{D}}_0 = -i\sum_{j=1}^{2}\widehat{\sigma}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\,.$$

Для любой вектор-функции $\varphi \in D(\widehat{\mathcal{D}}_0) = H^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ имеем

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)} = \sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}\,.$$

Условия $V^{(j)} \in \mathbb{L}_0^{\Lambda}(\mathbf{R}^2) \subset \mathbb{L}_0(\mathbf{R}^2)$, $j = 0,1,2,3$, означают, что матричный потенциал $\widehat{V}$ имеет нулевую грань относительно оператора $\widehat{\mathcal{D}}_0$ (и, следовательно, относительно оператора $\widehat{\mathcal{D}}$ (см. далее (в случае $\Lambda = \mathbf{Z}^2$) равенство (1.5), разложение (1.8) и лемму 3.1)).

Следующая теорема является основной в данном пункте.

Теорема 1.1. *Пусть $h_{jl} \in L^{\infty}_{\Lambda}(K)$, $j,l = 1,2$, и существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \leqslant h_{11}(x)h_{22}(x) - h_{12}(x)h_{21}(x)$ при п.в. $x \in \mathbf{R}^2$. Предположим, что $V^{(0)}, V^{(3)} \in \mathbb{L}_0^{\Lambda}(\mathbf{R}^2)$ и $V^{(1)}, V^{(2)} \in L^2(g;K) \subset \mathbb{L}_0^{\Lambda}(\mathbf{R}^2)$ для некоторой функции $g \in \mathbf{G}$. Тогда оператор*

$$\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V} = \widehat{\mathcal{D}} + V^{(0)}\widehat{I} + \sum_{j=1}^{3} V^{(j)}\widehat{\sigma}_j \tag{1.3}$$

не имеет собственных значений.

Замечание 1.1. В общем случае оператор $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}$ не является самосопряженным. Но если при выборе некоторых матричных функций $\widehat{h}(.)$ и $\widehat{V}(.)$ оператор $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}$ самосопряжен, то в его спектре отсутствует сингулярная составляющая и поэтому спектр абсолютно непрерывен (это, в частности, есть следствие того, что матричный потенциал $\widehat{V}$ имеет нулевую грань относительно оператора $\widehat{\mathcal{D}}$) [7; 1]. Доказательство последнего утверждения для периодического оператора Шредингера приведено в [7], но оно носит общий характер и применимо в равной степени к периодическому оператору Дирака (в последней ситуации доказательство приведено также в [8], для периодического оператора Шредингера см. также [9]).

Приведенное замечание поясняет, почему в формулировке теоремы 1.1 рассматриваются произвольные комплекснозначные функции $V^{(0)}, V^{(3)} \in \mathbb{L}_0^{\Lambda}(\mathbf{R}^2)$ и $V^{(1)}, V^{(2)} \in L^2(g;K) \subset \mathbb{L}_0^{\Lambda}(\mathbf{R}^2)$.

Замечание 1.2. Оператор $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ совпадает с оператором (0.2), если

$$V^{(l)}(x) = -i\sum_{j=1}^{2} h_{jl}(x)A_j(x)\,,\ x \in \mathbf{R}^2,\ l = 1,2\,.$$

При этом $V^{(l)} \in L^2(g;K)$, $l = 1,2$, для некоторой функции $g \in \mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда $A_j \in L^2(g;K)$, $j = 1,2$.

Один из случаев оператора (1.3) (для которого выполнены условия $h_{jl} \in C^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ и $\widehat{V} \in L^{\infty}(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$) рассматривался в [10]. Для постоянных функций h_{jl} и периодических (с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) эрмитовых матричных функций $\widehat{V}(x) = \widehat{V}^*(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, для которых $\widehat{V} \in L^{\beta}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$, $\beta > 2$, абсолютная непрерывность спектра оператора $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ доказана в [11; 12] (в [13] этот результат получен в случае $V^{(0)} \in L^{\beta}_{\Lambda}(K)$, $\beta > 2$, и $V^{(j)} \equiv 0$ при $j = 1,2,3$). В [14] доказан частный случай теоремы 1.1, когда $\widehat{V} \in L^{\beta}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$, $\beta > 2$ (и при тех же условиях на функции h_{jl}, что и в теореме 1.1). Соответствующие результаты для n-мерных операторов Дирака (с плоской метрикой) при $n \geqslant 3$ приведены в [15; 12; 16; 17].

Так как для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ оператор $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V} - \lambda\widehat{I}$ сводится к оператору $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}$ при замене $V^{(0)} - \lambda \to V^{(0)}$, то при доказательстве теоремы 1.1 можно ограничиться только доказательством отсутствия в спектре оператора $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ собственного значения $\lambda = 0$. Можно также считать, что $\Lambda = \mathbf{Z}^2$. Действительно, пусть $E_1 = (E_{11}, E_{21})$ и $E_2 = (E_{12}, E_{22})$ — базисные векторы решетки $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$, для которых $E_{11}E_{22} - E_{12}E_{21} > 0$. Введем новые координаты ξ_1 и ξ_2: $x_1 = E_{11}\xi_1 + E_{12}\xi_2$, $x_2 = E_{21}\xi_1 + E_{22}\xi_2$. Тогда

$$-i\sum_{j=1}^{2} \widehat{h}_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \widehat{V}(x) = -i\sum_{j=1}^{2} \widehat{h}'_j(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j} + \widehat{V}'(\xi)\,,$$

где матричные функции $\widehat{h}'_j(.)$, $j = 1,2$, и $\widehat{V}'(.)$ (для которых

$\widehat{h}_j(x(\xi)) = \sum_{l=1}^{2} E_{jl}\widehat{h}'_l(\xi)$ и $\widehat{V}'(\xi) = \widehat{V}(x(\xi))$) периодичны с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2$ и удовлетворяют условиям, наложенным на матричные функции $\widehat{h}_j(.)$, $j=1,2$, и $\widehat{V}(.)$ (с той же самой функцией $g \in \mathbf{G}$, но, возможно, с другим числом $\varepsilon > 0$). При этом

$$G_{jl}(x(\xi)) = \sum_{s,\tau=1}^{2} E_{js}E_{l\tau}G'_{s\tau}(\xi)\,,\ j,l=1,2\,,\ \xi \in \mathbf{R}^2\,,$$

где положительно определенные матрицы $(G'_{s\tau}(\xi))_{s,\tau=1,2}$ определяются с помощью матриц $\widehat{h}'_j(\xi)$ по формуле (1.2).

Будем в дальнейшем считать, что $\Lambda = \mathbf{Z}^2$, $K=[0,1)^2$ ($E_j = e_j$, $j=1,2$).

Пусть $0 < q \leqslant p < +\infty$, $F \geqslant 0$. Через $\Gamma(p,q,F)$ обозначим множество наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}$ вещественнозначных функций $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H} \in L^\infty(K)$ (вещественнозначных функций из $L^\infty_{\mathbf{Z}^2}(K)$), для которых

$$q \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{x\in K}\mathcal{G}(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in K}\mathcal{G}(x) \leqslant p\,,$$

$$q \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{x\in K}\mathcal{H}(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in K}\mathcal{H}(x) \leqslant p$$

и $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in K}|\mathcal{F}(x)| \leqslant F$. Обозначим $\Gamma = \bigcup_{p,q,F}\Gamma(p,q,F)$.

При доказательстве теоремы 1.1 можно (также) ограничиться матричными функциями $\widehat{h}_j(.)$ более частного вида, а именно, умножая оператор Дирака $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}$ слева на (периодическую с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2$) матричную функцию

$$\widehat{a}(x) = \frac{h_{22}(x)\widehat{I} - ih_{21}(x)\widehat{\sigma}_3}{\sqrt{h_{21}^2(x)+h_{22}^2(x)}}\,,\ x \in \mathbf{R}^2$$

(сохраняющую норму вектор-функций из $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$), получим оператор

$$-i\sum_{j=1}^{2}\widehat{h}'_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \widehat{V}'(x)\,,$$

для которого матричная функция $\widehat{V}'(.)$ удовлетворяет тем же условиям (с той же функцией $g \in \mathbf{G}$), что и матричная функция $\widehat{V}(.)$, и $\widehat{h}'_1(x) = \mathcal{G}(x)\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{F}(x)\widehat{\sigma}_2$, $\widehat{h}'_2(x) = \mathcal{H}(x)\widehat{\sigma}_2$, где

$$\mathcal{G}(x) = \frac{h_{11}(x)h_{22}(x) - h_{12}(x)h_{21}(x)}{\sqrt{h_{21}^2(x)+h_{22}^2(x)}}\,,$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{h_{11}(x)h_{21}(x) + h_{12}(x)h_{22}(x)}{\sqrt{h_{21}^2(x)+h_{22}^2(x)}}\,,$$

$$\mathcal{H}(x) = \sqrt{h_{21}^2(x)+h_{22}^2(x)}\,,\ x \in \mathbf{R}^2\,,$$

при этом $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$. Поэтому теорема 1.1 является непосредственным следствием теоремы 1.2.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$. *Предположим, что*

$$\widehat{V}(.) = \widehat{V}^{(0)}(.)\widehat{I} + \sum_{j=1}^{3} V^{(j)}(.)\widehat{\sigma}_j\,,$$

где $V^{(0)}, V^{(3)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$ *и* $V^{(1)}, V^{(2)} \in L^2(g;K) \subset \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$ *для некоторой функции* $g \in \mathbf{G}$. *Тогда оператор Дирака*

$$\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}(x) = (\mathcal{G}(x)\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{F}(x)\widehat{\sigma}_2)(-i\frac{\partial}{\partial x_1}) + \mathcal{H}(x)\widehat{\sigma}_2(-i\frac{\partial}{\partial x_2}) + \widehat{V}(x)\,,$$

действующий в $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ *и имеющий областью определения* $D(\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V})$ *класс Соболева* $H^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$, *обратим (т.е. у него нет собственного значения* $\lambda = 0$).

В дальнейшем в пространствах $L^2(K) = L^2(K;\mathbf{C})$ и $L^2(K;\mathbf{C}^2)$ норма $\|.\|$ и скалярное произведение $(.,.)$ вводятся обычным образом и в их обозначениях, как правило, само пространство указываться не будет (скалярное произведение линейно по второму сомножителю). Через $\widetilde{H}^1(K)$ и $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ обозначаются множества функций $\varphi : K \to \mathbf{C}$ и вектор-функций

$\varphi : K \to \mathbb{C}^2$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов $\mathbb{Z}^2$) на все пространство $\mathbb{R}^2$ принадлежат (локальным) классам Соболева $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ соответственно; $\widetilde{C}^{\,l}(K)$ — линейное пространство функций $\varphi\colon K\to\mathbb{C}$, которые периодически продолжаются на пространство $\mathbb{R}^2$ до функций, имеющих непрерывные частные производные до порядка l включительно, $l\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$; $\widetilde{C}(K)=\widetilde{C}^{\,0}(K)$, $\widetilde{C}^{\,\infty}(K)=\bigcap\limits_l \widetilde{C}^{\,l}(K)$. Пусть $\widetilde{W}^l_\beta(K)$, $l\in\mathbb{N}$, $\beta\geqslant 1$, — пространство функций $f : K\to\mathbb{C}$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов $\mathbb{Z}^2$) принадлежат пространству $W^l_{\beta,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ ($W^l_\beta(\mathbb{R}^2)$ — пространство функций $f\in L^\beta(\mathbb{R}^2)$, все частные производные которых до порядка l включительно также принадлежат пространству $L^\beta(\mathbb{R}^2)$; $W^l_2(\mathbb{R}^2)=H^l(\mathbb{R}^2)$). В силу теоремы Соболева [18, гл. 5, теорема 2] $\widetilde{W}^1_\beta(K)\subset\widetilde{C}(K)$ при $\beta>2$.

Коэффициенты Фурье (вектор-)функций $\varphi\in L^1(K;\mathbb{C}^d)$, $d=1,2$, будем обозначать через

$$\varphi_N=\int_K \varphi(x)e^{-2\pi i\,(N,x)}d^2x\,,\ N\in\mathbb{Z}^2\,.$$

Положим $\widetilde{H}^1_0(K)=\{\varphi\in\widetilde{H}^1(K) : \varphi_0=0\}$, $\widetilde{C}^{\,l}_0(K)=\{\varphi\in\widetilde{C}^{\,l}(K) : \varphi_0=0\}$, $l\in\mathbb{Z}_+$ или $l=\infty$, $\widetilde{C}_0(K)=\widetilde{C}^{\,0}_0(K)$. (Через $C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ обозначается пространство функций из $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем.)

Используя функции $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$, можно дать другое определение (эквивалентное введенному) множеству $\mathbb{L}_0^{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ периодических функций (с решеткой периодов $\mathbb{Z}^2$) из $\mathbb{L}_0(\mathbb{R}^2)$: периодическая функция $W\in L^2_{\mathbb{Z}^2}(K)$ принадлежит множеству $\mathbb{L}_0^{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$, если для любой функции $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ справедливо включение $W\varphi\in L^2(K)$ и для любого $\varepsilon>0$ существует константа $C'_{\varepsilon,W}>0$ такая, что для всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ выполняется оценка

$$\|W\varphi\|_{L^2(K)}\leqslant\varepsilon\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}+C'_{\varepsilon,W}\|\varphi\|_{L^2(K)} \tag{1.4}$$

(аналогичное утверждение, конечно, справедливо для периодических функций из $\mathbb{L}_0(\mathbb{R}^2)$ с любой решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$).

Пусть $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$ и $k,\varkappa\in\mathbb{R}^2$, $k_j=(e_j,k)$, $\varkappa_j=(e_j,\varkappa)$, $j=1,2$. Обозначим

$$\widehat{\mathcal{D}}_0(k+i\varkappa)=\sum_{j=1}^{2}\widehat{\sigma}_j\big(k_j+i\varkappa_j-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big)\,,$$

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)=(\mathcal{G}\widehat{\sigma}_1+\mathcal{F}\widehat{\sigma}_2)\big(k_1+i\varkappa_1-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\big)+\mathcal{H}\widehat{\sigma}_2\big(k_2+i\varkappa_2-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}\big)\,.$$

Операторы $\widehat{\mathcal{D}}_0(k+i\varkappa)$ и $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)$ действуют в $L^2(K;\mathbb{C}^2)$, $D(\widehat{\mathcal{D}}_0(k+i\varkappa))=D(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa))=\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^2)$. При этом

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\|^2=\sum_{j=1}^{2}\big\|\big(k_j-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big)\varphi\big\|^2$$

для всех вектор-функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^2)$. Определим операторы

$$\widehat{d}_\pm(k+i\varkappa)=(\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})\big(k_1+i\varkappa_1-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\big)\pm i\mathcal{H}\big(k_2+i\varkappa_2-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}\big)\,,$$

$D(\widehat{d}_\pm(k+i\varkappa))=\widetilde{H}^1(K)\subset L^2(K)$; $\widehat{d}_\pm=\widehat{d}_\pm(0)$. Имеем

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)=\begin{pmatrix}0 & \widehat{d}_-(k+i\varkappa)\\ \widehat{d}_+(k+i\varkappa) & 0\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Существуют числа $c_1=c_1(p,q,F)>0$ и $c_2=c_2(p,q,F)\geqslant c_1$ (см. (1.5) и лемму 3.1) такие, что для всех векторов $k\in\mathbb{R}^2$ и всех вектор-функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^2)$

$$c_1\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\|^2\leqslant\|\widehat{\mathcal{D}}(k)\varphi\|^2\leqslant c_2\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\|^2 \tag{1.6}$$

(отсюда, в частности, следует замкнутость операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$). Из равенства (1.5) и леммы 3.2 вытекает, что область значений

$R(\widehat{\mathcal{D}}(k))$ операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$ при $k \notin 2\pi\mathbf{Z}^2$ совпадает со всем пространством $L^2(K;\mathbf{C}^2) = R(\widehat{\mathcal{D}}_0(k))$). Если $k_1 = \pi$, то

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\| \geqslant \pi\|\varphi\| . \tag{1.7}$$

Матричный потенциал $\widehat{V}$ можно также рассматривать как оператор в $L^2(K;\mathbf{C}^2)$. Так как $V^{(j)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $j = 0,1,2,3$, то из (1.4) следует, что он имеет нулевую грань относительно операторов $\widehat{\mathcal{D}}_0(k)$, $k \in \mathbf{R}^2$, и, значит (см. (1.6)), относительно операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$, $k \in \mathbf{R}^2$.

Оператор Дирака $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ унитарно эквивалентен (см., например, [19; 12]) прямому интегралу

$$\int_{2\pi K} \oplus\, (\widehat{\mathcal{D}}(k) + \widehat{V})\, \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,, \tag{1.8}$$

действующему в

$$\int_{2\pi K} \oplus\, L^2(K;\mathbf{C}^2)\, \frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

(вектор $k = (k_1,k_2) \in 2\pi K \subset \mathbf{R}^2$ называется квазиимпульсом). Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [20]. Так как операторы $\widehat{\mathcal{D}}(k)$ (например, при $k_1 = k_2 = \pi$ (см. (1.5), (1.6) и лемму 3.2) и, следовательно, при всех $k \in \mathbf{R}^2$) имеют компактную резольвенту (которая аналитически зависит от компонент квазиимпульса k) и матричный потенциал $\widehat{V}$ имеет относительно операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$ нулевую грань, то из представления оператора Дирака $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ в виде прямого интеграла (1.8) и из аналитической теоремы Фредгольма вытекает [21, § XIII.16; 7], что если $\lambda = 0$ — собственное значение оператора $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}$, то $\lambda = 0$ — собственное значение операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)+\widehat{V}$ для всех $k+i\varkappa \in \mathbf{C}^2$. Следовательно, для доказательства теоремы 1.2 достаточно найти комплексный квазиимпульс $k+i\varkappa \in \mathbf{C}^2$ такой, что оператор $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)+\widehat{V}$ обратим (имеет нулевое ядро). Поэтому теорема 1.2 является следствием теорем 1.3 и 1.4.

Т е о р е м а 1.3. *Пусть $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$, $g \in \mathbf{G}$ и*

$$\widehat{V}(.) = V^{(0)}(.)\widehat{I} + \sum_{j=1}^{3} V^{(j)}(.)\widehat{\sigma}_j\,,$$

где $V^{(0)}, V^{(3)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$ и $V^{(1)}, V^{(2)} \in L^2(g;K) \subset \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$. Тогда найдутся такие векторы $k', \varkappa' \in \mathbf{R}^2$ и (комплекснозначные) функции $\Phi', \Psi' \in \widetilde{H}^1_0(K) \cap \widetilde{C}(K)$, что умножение на функции $e^{\pm i\Phi'}$ и матричные функции $e^{\pm\widehat{\sigma}_3\Psi'}$ не выводит за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$,

$$\max\{\|\Phi'\|_{L^\infty(K)}, \|\Psi'\|_{L^\infty(K)}\} \leqslant c_0 \sum_{j=1}^{2} \|V^{(j)}\|_{L^2(g;K)}\,,$$

где $c_0 = c_0(p,q,F;g) > 0$, и для всех векторов $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$ справедливо равенство

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa) + \widehat{V} =$$
$$= e^{\widehat{\sigma}_3\Psi'} e^{-i\Phi'} (\widehat{\mathcal{D}}(k+k'+i(\varkappa+\varkappa')) + e^{-2\widehat{\sigma}_3\Psi'}(V^{(0)}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3)) e^{i\Phi'} e^{\widehat{\sigma}_3\Psi'}.$$

Теорема 1.3 непосредственно вытекает из теоремы 4.1, которая доказывается в разделе 4. В условиях теоремы 1.3 имеем

$$e^{-2\widehat{\sigma}_3\Psi'}(V^{(0)} + V^{(3)}\widehat{\sigma}_3) = \widetilde{V}^{(0)}\widehat{I} + \widetilde{V}^{(3)}\widehat{\sigma}_3\,,$$

где

$$\widetilde{V}^{(0)} = V^{(0)}\operatorname{ch} 2\Psi' - V^{(3)}\operatorname{sh} 2\Psi'\,,\ \widetilde{V}^{(3)} = -V^{(0)}\operatorname{sh} 2\Psi' + V^{(3)}\operatorname{ch} 2\Psi'\,;$$

$\widetilde{V}^{(0)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$ и $\widetilde{V}^{(3)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$.

Теорема 1.3 сводит задачу нахождения комплексных квазиимпульсов $k + i\varkappa \in \mathbf{C}^2$, для которых обратим оператор $\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa) + \widehat{V}$, к такой же задаче, но для более узкого класса матричных потенциалов $\widehat{V}$, имеющих вид $\widehat{V} = V^{(0)}\widehat{I} + V^{(3)}\widehat{\sigma}_3$ ($V^{(0)}, V^{(3)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$). Матричные потенциалы этого вида рассматриваются в теореме 1.4.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$ *и* $V^{(0)}$, $V^{(3)}\in\mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$. *Тогда найдутся вектор* $e\in S_1\subset\mathbf{R}^2$ *и сколь угодно большие числа* $\mu>0$ *такие, что для всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2:\ k_1=\pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ *справедливо неравенство*

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\mu e)+V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3)\varphi\|\geqslant c'e^{-c\mu}\,\|\varphi\|\,,$$

где $c=c(p,q,F;V^{(0)},V^{(3)})>0$ *и* $c'=c'(p,q,F)>0$.

Теорема 1.4 является следствием теоремы 6.5 и доказывается в разделах 5 и 6.

2. О спектре двумерного периодического оператора Шредингера

Пусть $\mathbf{R}^2\ni x\to\widehat{G}(x)=(G_{jl})_{j,l=1,2}$ — вещественная положительно определенная матричная функция, $G_{12}=G_{21}$, $\widehat{G},\widehat{G}^{-1}\in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$, $\mathbf{R}^2\ni x\to A(x)=(A_1(x),A_2(x))\in\mathbf{C}^2$ — векторнозначная функция, $A_j\in\mathbb{L}_0(\mathbf{R}^2)$, $j=1,2$. Функции $\widehat{G}$ и A — периодические с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbf{R}^2$. Будем рассматривать полуторалинейную форму в $L^2(\mathbf{R}^2)$

$$\mathcal{W}(A;\psi,\varphi)=\sum_{j,l=1}^2\left(\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}-\overline{A}_j\right)\psi,G_{jl}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_l}-A_l\right)\varphi\right)$$

с областью определения $Q(\mathcal{W})=H^1(\mathbf{R}^2)\ni\psi,\varphi$.

Для $a>0$ и $b\geqslant0$ через $\mathbb{V}_{a,b}(\Lambda)$ обозначим множество полуторалинейных форм $\mathcal{V}(\psi,\varphi)$ в $L^2(\mathbf{R}^2)$ (линейных по второму аргументу), $\psi,\varphi\in Q(\mathcal{V})=H^1(\mathbf{R}^2)$, для которых

(V1) $\mathcal{V}(\psi(.-\gamma),\varphi(.-\gamma))=\mathcal{V}(\psi,\varphi)$ для всех $\psi,\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$ и всех $\gamma\in\Lambda$ (т.е. форма $\mathcal{V}$ предполагается периодической с решеткой периодов Λ),

(V2) $\mathcal{V}(e^{i(k,x)}\psi,\varphi)=\mathcal{V}(\psi,e^{-i(k,x)}\varphi)$ для всех $k\in\mathbf{R}^2$ (и всех $\psi,\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$),

(V3; a,b) для всех $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$

$$|\mathcal{V}(\varphi,\varphi)|\leqslant a\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}+b\,\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}\,.$$

Если $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_{a,b}(\Lambda)$, $a>0$, $b\geqslant0$, то для функций $\psi,\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$ выполняются также следующие условия (см. лемму 7.1 и оценку (7.2)):

(V2)′ $\mathcal{V}(f\psi,\varphi)=\mathcal{V}(\psi,\overline{f}\varphi)$ для всех функций $f\in C^1(\mathbf{R}^2)$, для которых $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^2}|f(x)|<+\infty$ и $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^2}|\nabla f(x)|_{\mathbf{C}^2}<+\infty$,

(V4) $\mathcal{V}(\psi,\varphi)=0$, если $\operatorname{supp}\psi\cap\operatorname{supp}\varphi=\emptyset$;

и справедлива оценка

$$\begin{aligned}|\mathcal{V}(\psi,\varphi)|&\leqslant\\ &\leqslant2\left(a\,\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}+b\,\|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}\right)^{1/2}\times\\ &\times\left(a\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}+b\,\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Пусть $\mathbb{V}_0(\Lambda)$ — множество полуторалинейных форм $\mathcal{V}$ таких, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $C_\varepsilon=C_\varepsilon(\mathcal{V})>0$ такое, что $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_{\varepsilon,C_\varepsilon}(\Lambda)$.

З а м е ч а н и е 2.1. Формы $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_0(\Lambda)$ могут иметь вид

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^2}\overline{\psi}\varphi\,d\mu$$

(для функций $\psi,\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$), где μ — комплексная периодическая с решеткой периодов Λ борелевская мера (с локально конечной полной вариацией), но множество $\mathbb{V}_0(\Lambda)$ не исчерпывается только формами такого вида. Соответствующий пример приведен в разделе 7.

Пусть $\mathbb{V}^+_{a,b}(\Lambda)$, $a>0$, $b\geqslant0$, — множество неотрицательных форм $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_{a,b}(\Lambda)$ ($\mathcal{V}(\varphi,\varphi)\geqslant0$ для всех $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$). Через $\mathbb{V}_0^+(\Lambda)$ и $\mathbb{V}_0^{(+)}(\Lambda)$ обозначим соответственно множество неотрицательных форм из $\mathbb{V}_0(\Lambda)$ и множество форм $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_0(\Lambda)$, для которых существует форма $\mathcal{V}^+ = \mathcal{V}^+(\mathcal{V}) \in \mathbb{V}_0^+(\Lambda)$ такая, что $|\mathcal{V}(\varphi,\varphi)| \leqslant \mathcal{V}^+(\varphi,\varphi)$ при всех $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$.

Если

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi) = \int_{\mathbf{R}^2} V\overline{\psi}\varphi\, d^2x\,,\ \psi,\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2),$$

где V — периодическая (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) функция из класса Като K_2, то (см. лемму 3.8) $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_0^{(+)}(\Lambda)$ [6; 22].

Пусть $\lambda_-(x)$ — минимальное (из двух) собственное значение матрицы $\widehat{G}(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, $a_-(\widehat{G}) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbf{R}^2} \lambda_-(x) > 0$. При сделанных предположениях относительно периодических функций $\widehat{G}$ и A и в случае $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_{a,b}(\Lambda)$, где $a \in (0, a_-(\widehat{G}))$, $b \geqslant 0$, квадратичная форма $\mathcal{W}(A;\varphi,\varphi) + \mathcal{V}(\varphi,\varphi)$, $\varphi \in Q(\mathcal{W}+\mathcal{V}) = H^1(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2)$, является замкнутой и секториальной. Поэтому она порождает m-секториальный оператор $\widehat{H}(A,\mathcal{V})$ с некоторой областью определения $D(\widehat{H}(A,\mathcal{V})) \subset H^1(\mathbf{R}^2)$ [23; 24, § VIII.6 и с. 336].

Следующая теорема является основной теоремой данной работы, относящейся к периодическому оператору Шредингера.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $\widehat{G} = (G_{jl})_{j,l=1,2}$ — *вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция, периодическая с решеткой периодов* $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$, $\widehat{G}, \widehat{G}^{-1} \in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$. *Предположим, что* $\det \widehat{G} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \det \widehat{G} \in \mathbb{L}_0^\Lambda(\mathbf{R}^2)\,,\ j = 1,2\,,$$

$\mathcal{V} \in \mathbb{V}_0^{(+)}(\Lambda)$ *и для некоторой функции* $g \in \mathbf{G}$

$$A_j \in L^2(g;K) \subset \mathbb{L}_0^\Lambda(\mathbf{R}^2)\,,\ j = 1,2\,.$$

Тогда оператор $\widehat{H}(A,\mathcal{V})$ *не имеет собственных значений.*

Если в условиях теоремы 2.1 A_j — вещественнозначные функции, а форма $\mathcal{V}$ эрмитова (т.е. $\mathcal{V}(\psi,\varphi) = \overline{\mathcal{V}(\varphi,\psi)}$ для всех

$\psi,\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$), то оператор $\widehat{H}(A,\mathcal{V})$ самосопряжен и его спектр абсолютно непрерывен (см. замечание 1.1 после теоремы 1.1, а также [7; 1]).

Пусть $L^p_w(K)$, $p \geqslant 1$, — множество измеримых функций $W: K \to \mathbf{C}$ (где K — элементарная ячейка решетки $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$), для которых

$$\sup_{t>0}\, t\,(\mathrm{mes}\,\{x \in K\colon |W(x)| > t\})^{1/p} < +\infty\,,$$

$$L^p_{w,0}(K) = \\ = \{W \in L^p_w(K)\colon \varlimsup_{t\to+\infty} t\,(\mathrm{mes}\,\{x \in K\colon |W(x)| > t\})^{1/p} = 0\}.$$

Предположим, что V и A_j, $j = 1,2$, — вещественнозначные (периодические с решеткой периодов Λ) функции. Первый результат об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шредингера был получен Л. Томасом [25] для оператора

$$-\Delta + V(x)\,, \tag{2.2}$$

действующего в $L^2(\mathbf{R}^3)$, где $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$. Метод доказательства, предложенный Л. Томасом, использовался во всех последующих работах. В [21] результаты работы [25] обобщены на n-мерные операторы Шредингера (2.2) с периодическим потенциалом V, для которого $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ при $n = 2,3$ и

$$\sum_{N\in\Lambda^*} |V_N|^p < +\infty\,,\ 1 \leqslant p < \frac{n-1}{n-2}\,,$$

при $n \geqslant 4$ (V_N — коэффициенты Фурье потенциала V, Λ^* — обратная решетка). Периодический магнитный оператор Шредингера

$$\sum_{j=1}^n \Bigl(-i\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\Bigr)^2 + V\,,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{2.3}$$

рассматривался в [26] в случае $V \equiv 0$, $A \in C^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$, $n \geqslant 2$, и при ограничении $\|A\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)} \leqslant c_*$ (где $c_* = c_*(n,\Lambda) > 0$). Абсолютная непрерывность спектра оператора (2.3) при $n = 2$ доказана М. Бирманом и Т. Суслиной вначале при $A \in C(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$, $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ [27], а затем в более общем случае $A \in L^{2q}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$, $V \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $q > 1$ [28]. При $n \geqslant 3$ абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера (2.3) была установлена А. Соболевым [29] для периодических потенциалов $V \in L^q_\Lambda(K)$, $q > n-1$, и $A \in C^{2n+3}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$. Это утверждение в дальнейшем было усилено: в [2] предполагается, что $V \in L^{n/2}_{w,0}(K)$ при $n = 3,4$ и $V \in L^{n-\frac{2}{}}_{w,0}(K)$ при $n \geqslant 5$, а в [30; 1] было ослаблено условие на векторный потенциал до условия $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$, $2q > 3n-2$ (в [1] предложен общий подход к исследованию периодических эллиптических дифференциальных операторов, обобщающий построения А. Соболева [29], а также доказывается отсутствие собственных значений в спектре периодического оператора Шредингера с комплексными потенциалами V и A). Условие $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$, $2q > 3n-2$, было независимо получено также и А. Соболевым (см. замечание в конце обзорной статьи [2]). В [3] при всех $n \geqslant 3$ доказана абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера (2.2) с периодическим потенциалом $V \in L^{n/2}_{w,0}(K)$. Скалярные потенциалы более общего вида (при $A \equiv 0$) рассматривались в [22; 31]. В [22], в частности, при $n = 2$ получен результат об абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера (2.2) с периодическим потенциалом V из класса Като K_2. В [17; 32] абсолютная непрерывность спектра оператора (2.3) доказана в случае $V \in L^{n/2}_{w,0}(K)$ при $3 \leqslant n \leqslant 6$ и $V \in L^{n-3}_{w,0}(K)$ при $n \geqslant 7$, при этом $A \in C^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ и предполагается, что либо $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$, $2q > n-2$, либо ряд Фурье (периодического) векторного потенциала A абсолютно сходится. При $n = 2$ периодический оператор Шредингера (0.1) с переменной метрикой $\widehat{G}$ впервые рассматривался А. Морамом [10] при $\widehat{G} \in C^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$, $\det \widehat{G} \equiv 1$, $A_j \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $j = 1,2$, и $V \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$. В дальнейшем П. Кучментом и С. Левендорским

[1] было показано, что в случае $\widehat{G} \in C^{m+\alpha}(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$, где $m \in \mathbf{Z}_+ = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1)$, существуют периодические изотермические координаты $y(x) \in C^{m+1+\alpha}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$, приводящие матричную функцию (метрику) $\widehat{G}$ к конформному (скалярному) виду $\widehat{G} = \omega^2(x)\widehat{G}_0$ (где $\widehat{G}_0$ — постоянная матрица и ω — скалярная функция), при этом матричная функция $\widehat{G}$ остается в классе $C^{m+\alpha}(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$. Использование периодических изотермических координат позволило ослабить ограничения на функции V, A и $\widehat{G}$. На этом пути в [33] была доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) при $G_{jl} \in W^2_{2q,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $q > 1$, $j,l = 1,2$, $A \in L^{2q}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$, $V = V_1 + \sigma\delta_\Sigma$, где $V_1 \in L^q(K)$, Σ — периодическая (с решеткой периодов Λ) система кусочно-гладких кривых, δ_Σ — дельта-функция, сосредоточенная на Σ, $\sigma \in L^q(\Sigma \cap K)$ (если матричная функция $\widehat{G}$ имеет конформный вид, то на нее накладывались более слабые условия гладкости, но в любом случае $G_{jl} \in W^2_{q,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $j,l = 1,2$, для некоторого $q > 1$). Наиболее общее условие на матричную функцию $\widehat{G}$ было затем приведено Р. Штеренбергом в [34] (см. также несколько более слабое утверждение в [35]): $\det \widehat{G} \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $q > 2$. В [34] предполагается, что $A \equiv 0$ и электрический потенциал задается как обобщенная функция, формально записываемая в виде $V = \frac{d\nu}{d^2x}$, где ν — периодическая борелевская знакопеременная мера (заряд), удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям (разным для положительной ν_+ и отрицательной ν_- вариаций меры ν). В данной работе по сравнению с [34] ослаблено условие на матричную функцию $\widehat{G}$ и предполагается, что $A_j \in L^2(g;K)$, $j = 1,2$, для некоторой функции $g \in \mathbf{G}$, а электрический потенциал задается как квадратичная форма $\mathcal{V} \in \mathbb{V}^{(+)}_0(\Lambda)$. Предложен новый подход к исследованию двумерного периодического оператора Шредингера (0.1), не использующий замену координат, приводящую матричную функцию $\widehat{G}(x)$ к конформному виду, и опирающийся на результаты о периодическом операторе Дирака (0.2). При $n \geqslant 3$ абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера с

переменной метрикой

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j\Big)G_{jl}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_l}-A_l\Big)+V \tag{2.4}$$

в общем случае пока не доказана (даже для бесконечно дифференцируемых функций V, A и $\widehat{G}$). В [5] приведено доказательство этого утверждения (при $V\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $A\in C^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ и $G_{jl}\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $j,l=1,\dots,n$, где $\widehat{G}=(G_{jl})_{j,l=1,\dots,n}$ — вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция, для которой также $(\widehat{G}^{-1})_{jl}\in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $j,l=1,\dots,n$), если оператор (2.4) инвариантен относительно симметрии $x_1\to -x_1$. В [4] (при $n\geqslant 3$) рассматривается конформная (скалярная) метрика и для электрического потенциала допускается слагаемое, пропорциональное дельта-функции, сосредоточенной на периодической системе кусочно-гладких гиперповерхностей (остальная часть электрического потенциала и магнитный потенциал удовлетворяют условиям из работы [28]).

При доказательстве теоремы 2.1 (как и при доказательстве теоремы 1.1), делая линейную замену переменных, можно считать, что $\Lambda=\mathbf{Z}^2$, $K=[0,1)^2$ (при этом условия, наложенные на форму $\mathcal{V}$ и функции A и $\widehat{G}$, не изменяются (функцию $g\in\mathbf{G}$ можно выбирать той же самой)). Делая замену формы

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi)-\lambda\int_{\mathbf{R}^2}\overline{\psi}\varphi\,d^2x\to\mathcal{V}(\psi,\varphi)\,,\ \psi,\,\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)\,,$$

где $\lambda\in\mathbf{C}$, также можно ограничиться только доказательством обратимости оператора $\widehat{H}(A,\mathcal{V})$ (отсутствия у него собственного значения $\lambda=0$). Поэтому теорема 2.1 следует из теоремы 2.2.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $\widehat{G}=(G_{jl})_{j,l=1,2}$ — вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция, периодическая с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2\subset\mathbf{R}^2$, $\widehat{G},\widehat{G}^{-1}\in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$. Предположим, что $\det\widehat{G}\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$,*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\det\widehat{G}\in\mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)\,,\ j=1,2\,,$$

и для некоторой функции $g\in\mathbf{G}$

$$A_j\in L^2(g;K)\subset\mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)\,,\ j=1,2\,.$$

Тогда для любых чисел $a\in(0,a_-(\widehat{G}))$, $b\geqslant 0$ найдется число $a'=a'(a,b;\widehat{G},A)\in(0,a]$ такое, что для всех чисел $b'\geqslant 0$ и всех полуторалинейных форм $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_{a,b}(\mathbf{Z}^2)\cap\mathbb{V}_{a',b'}(\mathbf{Z}^2)$, для которых найдется полуторалинейная форма $\mathcal{V}^+\in\mathbb{V}^+_{a,b}(\mathbf{Z}^2)\cap\mathbb{V}^+_{a',b'}(\mathbf{Z}^2)$ такая, что $|\mathcal{V}(\varphi,\varphi)|\leqslant\mathcal{V}^+(\varphi,\varphi)$ для всех $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$, оператор $\widehat{H}(A,\mathcal{V})$ обратим (т.е. у него нет собственного значения $\lambda=0$).

Будем далее предполагать, что $\Lambda=\mathbf{Z}^2$ и $K=[0,1)^2$. Разложим пространство $L^2(\mathbf{R}^2)$ в прямой интеграл

$$\int_{2\pi K}\oplus L^2(K)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

с помощью преобразования Гельфанда $\widehat{U}$ [20], которое вначале определяется на функциях из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$:

$$(\widehat{U}\varphi)(k,x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}e^{-i(k,x+n)}\varphi(x+n)\,,\ k,\,x\in\mathbf{R}^2\,,$$

и взаимно однозначно отображает $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ на множество бесконечно дифференцируемых функций $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\ni(k,x)\to\widetilde{\varphi}(k,x)\in\mathbf{C}$ таких, что для всех $m,\,n\in\mathbf{Z}^2$ (и $k,\,x\in\mathbf{R}^2$)

$$\widetilde{\varphi}(k+2\pi m,x+n)=e^{-2\pi i(m,x)}\widetilde{\varphi}(k,x) \tag{2.5}$$

(точнее, рассматриваются ограничения таких функций на множество $2\pi K\times K$, которые однозначно определяют (в силу (2.5)) их значения на всем пространстве $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$). Для обратного отображения имеем

$$(\widehat{U}^{-1}\widetilde{\varphi})(x)=\int_{2\pi K}\widetilde{\varphi}(k,x)\,e^{i(k,x)}\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,,\ x\in K\,.$$

Преобразование Гельфанда $\widehat{U}$ затем по непрерывности продолжается до унитарного отображения пространства $L^2(\mathbf{R}^2)$ на

$$\int_{2\pi K} \oplus L^2(K) \frac{d^2k}{(2\pi)^2} .$$

Множество $\widehat{U}H^1(\mathbf{R}^2)$ состоит из функций [3]

$$\widetilde{\varphi} \in \int_{2\pi K} \oplus L^2(K) \frac{d^2k}{(2\pi)^2} ,$$

для которых $\widetilde{\varphi}(k,.) \in \widetilde{H}^1(K)$ при п.в. $k \in 2\pi K$ и

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{2\pi K} \left(\int_K \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}(k,x)}{\partial x_j} \right|^2 d^2x \right) \frac{d^2k}{(2\pi)^2} < +\infty .$$

Для всех $k \in 2\pi K$ и $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ имеем

$$\left(k_j - i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (\widehat{U}\varphi) = \widehat{U} \left(-i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right), \ j = 1, 2 .$$

Пусть $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$,

$$\widetilde{\mathcal{W}}(A; k + i\varkappa; \psi, \varphi) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{2} \left(\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - \overline{A}_j + k_j - i\varkappa_j \right) \psi, G_{jl} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_l} - A_l + k_l + i\varkappa_l \right) \psi \right)$$

— полуторалинейная форма в $L^2(K)$, $\psi, \varphi \in Q(\widetilde{\mathcal{W}}) = \widetilde{H}^1(K)$ (см. оценку (1.4), которая выполняется для функций $A_j \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$). Тогда [3; 2]

$$\mathcal{W}[A; \psi, \varphi) = \int_{2\pi K} \widetilde{\mathcal{W}}(A; k; (\widehat{U}\psi)(k,.), (\widehat{U}\varphi)(k,.)) \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \qquad (2.6)$$

для всех $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$. Выберем любую полуторалинейную форму $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_{a,b}(\mathbf{Z}^2)$, где $a \in (0, a_-(\widehat{G}))$ и $b \geqslant 0$.

Пусть $\Omega', \Omega'' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\sum\limits_{n \in \mathbf{Z}^2} \Omega'(x - n) = 1$ для всех $x \in \mathbf{R}^2$, $\Omega''(x) = 1$ в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp} \Omega'$. Выберем функцию $\theta \in C^\infty(\mathbf{R})$, для которой $\theta(\xi) = 1$ при $\xi \leqslant 0$ и $\theta(\xi) = 0$ при $\xi \geqslant 1$. Положим $\theta_N(x) = \theta(|x_1| - N)\theta(|x_2| - N)$, $N \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}^2$. Пусть $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ (и функции ψ, φ периодически продолжены на все пространство $\mathbf{R}^2$). При достаточно больших $N \in \mathbf{N}$ (чтобы определяемые далее множества $\mathcal{N}_-(N)$ не были пустыми) обозначим

$$\widetilde{\mathcal{V}}_N(\psi, \varphi) = \frac{1}{(2N)^2} \mathcal{V}(\theta_N \psi, \theta_N \varphi) ,$$

$\mathcal{N}_-(N) = \{ n \in \mathbf{Z}^2 : \theta_N(x) = 1$ для всех $x \in \operatorname{supp} \Omega'(. - n) \}$, $\mathcal{N}_+(N) = \{ m \in \mathbf{Z}^2 : \operatorname{supp} \Omega'(. - m) \cap \operatorname{supp} \Omega'(. - n) \neq \emptyset$ для некоторого $n \in \mathcal{N}_-(N) \}$,

$$\widetilde{\mathcal{V}}'_N(\psi, \varphi) = \frac{1}{(2N)^2} \sum_{m \in \mathcal{N}_+(N),\, n \in \mathcal{N}_-(N)} \mathcal{V}(\Omega'(. - m)\psi, \Omega'(. - n)\varphi) .$$

Тогда $|\widetilde{\mathcal{V}}_N(\psi, \varphi) - \widetilde{\mathcal{V}}'_N(\psi, \varphi)| \to 0$ при $N \to +\infty$. С другой стороны (см. (**V1**) и (**V4**)),

$$\widetilde{\mathcal{V}}'_N(\psi, \varphi) \to \mathcal{V}(\Omega''\psi, \Omega'\varphi)$$

при $N \to +\infty$. Поэтому существует предел

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\psi, \varphi) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(2N)^2} \mathcal{V}(\theta_N \psi, \theta_N \varphi) = \mathcal{V}(\Omega''\psi, \Omega'\varphi) , \qquad (2.7)$$

который не зависит от выбора функций Ω', Ω'' и θ, удовлетворяющих приведенным выше условиям. Из (2.7) следует, что для всех $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ и $k \in \mathbf{R}^2$

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\varphi, \varphi)| \leqslant a \, \|(k - i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} + b \, \|\varphi\|^2_{L^2(K)}$$

(в (**V3**;a,b) (в силу (**V2**)) можно сделать замену $\nabla \to k - i\nabla$, $k \in \mathbf{R}^2$), поэтому (см. вывод оценки (7.2) из (7.1) в разделе 7)

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi, \varphi)| \leqslant \qquad (2.8)$$

$$\leqslant 2\left(a\,\|(k-i\nabla)\psi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}+b\,\|\psi\|^2_{L^2(K)}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(a\,\|(k-i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}+b\,\|\varphi\|^2_{L^2(K)}\right)^{1/2}$$

для всех $\psi,\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ и $k\in\mathbb{R}^2$. Из (2.7) и (**V**2) для всех $n\in\mathbb{Z}^2$ (и всех $\psi,\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$) вытекает равенство

$$\widetilde{\mathcal{V}}(e^{2\pi i\,(n,x)}\psi,\varphi)=\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,e^{-2\pi i\,(n,x)}\varphi)\,,$$

поэтому также

$$\widetilde{\mathcal{V}}(f\psi,\varphi)=\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\overline{f}\varphi) \tag{2.9}$$

для всех функций $f\in\widetilde{C}^1(K)$.

Если $\mathcal{V}^+\in\mathbb{V}^+_{a,b}(\mathbb{Z}^2)$, $a>0$, $b\geqslant 0$, то из (2.7) следует, что $\widetilde{\mathcal{V}}^+(\varphi,\varphi)\geqslant 0$ для всех $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$. Если, кроме того, $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_{a,b}(\mathbb{Z}^2)$ и $|\mathcal{V}(\varphi',\varphi')|\leqslant\mathcal{V}^+(\varphi',\varphi')$ для всех функций $\varphi'\in H^1(\mathbb{R}^2)$, то также $|\widetilde{\mathcal{V}}(\varphi,\varphi)|\leqslant\widetilde{\mathcal{V}}^+(\varphi,\varphi)$ для всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ (см. (2.7)).

Обозначим через $\mathbb{V}^*_{a,b}(\mathbb{Z}^2)$, $a>0$, $b\geqslant 0$, множество полуторалинейных форм $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_{a,b}(\mathbb{Z}^2)$ таких, что для всех векторов $k\in\mathbb{R}^2:\ k_1=\pi$ и всех функций $\psi,\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ справедлива оценка

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)|\leqslant a\,\|(k-i\nabla)\psi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}\,\|(k-i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}+$$

$$+b\,\|\psi\|^2_{L^2(K)}\,\|\varphi\|^2_{L^2(K)}\,.$$

З а м е ч а н и е 2.2. Для формы $\mathcal{V}$ из примера 7.1 (при $\Lambda=\mathbb{Z}^2$, см. раздел 7) можно показать, что для любого $a>0$ существует такое число $b>0$, что $\mathcal{V}\in\mathbb{V}^*_{a,b}(\mathbb{Z}^2)$.

Л е м м а 2.1. *Предположим, что для формы* $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_{a_1,b_1}(\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{V}_{a_2,b_2}(\mathbb{Z}^2)$, $a_j>0$, $b_j\geqslant 0$, $j=1,2$, *можно найти такую форму* $\mathcal{V}^+\in\mathbb{V}^+_{a_1,b_1}(\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{V}^+_{a_2,b_2}(\mathbb{Z}^2)$, *что* $|\widetilde{\mathcal{V}}(\varphi,\varphi)|\leqslant$

$\widetilde{\mathcal{V}}^+(\varphi,\varphi)$ *для всех* $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$. *Тогда для всех векторов* $k\in\mathbb{R}^2:$ $k_1=\pi$ *и всех функций* $\psi,\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ *выполняется неравенство*

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)|\leqslant \tag{2.10}$$

$$\leqslant 8\sqrt{a_2(a_1+b_1)}\,\|(k-i\nabla)\psi\|_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}\,\|(k-i\nabla)\varphi\|_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}+$$

$$+8\,b_2\,\|\psi\|_{L^2(K)}\,\|\varphi\|_{L^2(K)}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из поляризационного тождества (см. доказательство неравенства (7.2)) следует оценка

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)|\leqslant 2\,(\widetilde{\mathcal{V}}^+(\psi,\psi)\widetilde{\mathcal{V}}^+(\varphi,\varphi))^{1/2},\ \psi,\varphi\in\widetilde{H}^1(K)\,.$$

Обозначим $X_1=\|(k-i\nabla)\psi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}$, $X_2=\|(k-i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^2)}$, $Y_1=\|\psi\|$, $Y_2=\|\varphi\|$, $X_1\geqslant\pi Y_1\geqslant Y_1$, $X_2\geqslant\pi Y_2\geqslant Y_2$. Так как $\mathcal{V}^+\in\mathbb{V}^+_{a_1,b_1}(\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{V}^+_{a_2,b_2}(\mathbb{Z}^2)$, то

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)|\leqslant 2\,(a_jX_1^2+b_jY_1^2)^{1/2}(a_lX_2^2+b_lY_2^2)^{1/2}\leqslant \tag{2.11}$$

$$\leqslant 2\,(\sqrt{a_j}\,X_1+\sqrt{b_j}\,Y_1)(\sqrt{a_l}\,X_2+\sqrt{b_l}\,Y_2)\,,\ j,\,l=1,2$$

(два из этих четырех неравенств являются также следствием (2.8)), поэтому в случае $\sqrt{a_2}\,X_j\leqslant\sqrt{b_2}\,Y_j$, $j=1,2$, получаем

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)|\leqslant 8\,b_2Y_1Y_2\,. \tag{2.12}$$

Предположим теперь, что либо $\sqrt{a_2}\,X_1>\sqrt{b_2}\,Y_1$, либо $\sqrt{a_2}\,X_2>\sqrt{b_2}\,Y_2$. Для определенности можно считать, что $\sqrt{a_2}\,X_1>\sqrt{b_2}\,Y_1$. Тогда из (2.11) следует оценка

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)|\leqslant 2\,(\sqrt{a_2}\,X_1+\sqrt{b_2}\,Y_1)(\sqrt{a_1}\,X_2+\sqrt{b_1}\,Y_2)< \tag{2.13}$$

$$<4\sqrt{a_2}X_1(\sqrt{a_1}\,X_2+\sqrt{b_1}\,Y_1)\leqslant 8\sqrt{a_2(a_1+b_1)}\,X_1X_2\,.$$

Из (2.12) и (2.13) вытекает неравенство (2.10).

Если $\psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ (и $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_{a,b}(\mathbf{Z}^2)$, $a \in (0, a_-(\widehat{G}))$, $b \geqslant 0$), то

$$\int_{2\pi K} \widetilde{\mathcal{V}}(\widehat{U}\psi, \widehat{U}\varphi)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2} =$$

$$= \int_{2\pi K} \widetilde{\mathcal{V}}\Bigl(\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{-i(k,\,x+n)}\psi(x+n),\ \sum_{m\in\mathbf{Z}^2} e^{-i(k,\,x+m)}\varphi(x+m)\Bigr)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

$$= \int_{2\pi K} \mathcal{V}\Bigl(\Omega''\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{-i(k,\,x+n)}\psi(x+n),\ \Omega'\times$$

$$\times \sum_{m\in\mathbf{Z}^2} e^{-i(k,\,x+m)}\varphi(x+m)\Bigr)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2} =$$

$$= \sum_{n,\,m\in\mathbf{Z}^2} \int_{2\pi K} e^{i(k,\,n-m)}\,\mathcal{V}\left(\Omega''\psi(x+n), \Omega'\varphi(x+m)\right)\frac{d^2k}{(2\pi)^2} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} \mathcal{V}(\Omega''\psi(x+n), \Omega'\varphi(x+n)) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} \mathcal{V}(\psi(x+n), \Omega'\varphi(x+n)) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} \mathcal{V}(\psi, \Omega'(.-n)\varphi) = \mathcal{V}\left(\psi, \Bigl(\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}\Omega'(.-n)\Bigr)\varphi\right) = \mathcal{V}(\psi,\varphi)$$

(нетрудно видеть, что сделанные перестановки суммирования корректны (см. свойство ($\mathbf{V}4$))). Так как множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ плотно в $H^1(\mathbf{R}^2)$ (и справедливы оценки (2.1) и (2.8)), то

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi) = \int_{2\pi K} \widetilde{\mathcal{V}}(\widehat{U}\psi, \widehat{U}\varphi)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2},\ \psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2). \qquad (2.14)$$

Из условий, наложенных на функции A, $\widehat{G}$ и форму $\mathcal{V}$, следует, что квадратичная форма

$$\widetilde{\mathcal{W}}(A; k+i\varkappa; \varphi, \varphi) + \widetilde{\mathcal{V}}(\varphi, \varphi),$$

$\varphi \in Q(\widetilde{\mathcal{W}}+\widetilde{\mathcal{V}}) = \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$, для всех $k+i\varkappa \in \mathbf{C}^2$ замкнута и секториальна. Пусть $\widehat{H}(A,\mathcal{V}; k+i\varkappa)$ — m-секториальный оператор, порождаемый этой формой [23; 24, § VIII.6]. Справедливо разложение (см. (2.6), (2.14)) [21; 3; 2]

$$\widehat{U}\widehat{H}(A,\mathcal{V})\widehat{U}^{-1} = \int_{2\pi K} \oplus\ \widehat{H}(A,\mathcal{V};k)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2}.$$

Так как операторы $\widehat{H}(A,\mathcal{V};k+i\varkappa)$ имеют компактную резольвенту, то для доказательства отсутствия в спектре оператора $\widehat{H}(A,\mathcal{V})$ собственного значения $\lambda = 0$ достаточно доказать, что найдутся векторы $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$ такие, что оператор $\widehat{H}(A,\mathcal{V};k+i\varkappa)$ обратим [21; 7; 1; 2] (этот метод доказательства восходит к работе Л. Томаса [25]). Поэтому теорема 2.2 является следствием леммы 2.1 и следующей теоремы.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть функции $\widehat{G}$ и A удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Тогда найдется число $a = a(\widehat{G}, A) \in (0, a_-(\widehat{G}))$ такое, что для любого числа $b \geqslant 0$ существуют векторы k, $\varkappa \in \mathbf{R}^2$ такие, что для любой ненулевой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ можно выбрать такие функции ψ_1, $\psi_2 \in \widetilde{H}^1(K)$, что для всех полуторалинейных форм $\mathcal{V} \in \mathbb{V}^*_{a,b}(\mathbf{Z}^2)$ справедливо неравенство*

$$\Bigl|\sum_{s=1}^{2} (\widetilde{\mathcal{W}}(A; k+i\varkappa; \psi_s, \varphi) + \widetilde{\mathcal{V}}(\psi_s, \varphi))\Bigr| > 0.$$

Теорема 2.3 непосредственно вытекает из теоремы 8.1, доказательство которой приведено в разделе 8.

3. Свойства операторов $\widehat{d}_\pm(k)$

Будем в дальнейшем (не всегда это оговаривая) предполагать, что $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$ для некоторых чисел $0 < q \leqslant p < +\infty$, $F \geqslant 0$. Пусть $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$, $\mathcal{K}(x) = (\mathcal{G}(x)\mathcal{H}(x))^{-1/2}$, $x \in K$;

$\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$. Так как

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{K}\mathcal{G}(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1})\varphi, i\mathcal{K}\mathcal{F}(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1})\varphi) = 0\,,$$

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{K}\mathcal{G}(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1})\varphi, i\mathcal{K}\mathcal{H}(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2})\varphi) = 0\,,$$

то

$$\|\mathcal{K}\widehat{d}_\pm(k)\varphi\|^2 = \tag{3.1}$$

$$= \|\mathcal{K}\mathcal{G}(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1})\varphi\|^2 + \|\mathcal{K}(\mathcal{F}(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}) + \mathcal{H}(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}))\varphi\|^2.$$

Для всех чисел $\alpha,\, \beta \in [p, q]$, $\gamma \in [-F, F]$ и $a,\, b \in \mathbf{C}$ выполняются неравенства

$$|\alpha a|^2 + |\gamma a + \beta b|^2 \geqslant \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + F^2}\,(|a|^2 + |b|^2) \geqslant \tag{3.2}$$

$$\geqslant \frac{q^4}{2q^2 + F^2}\,(|a|^2 + |b|^2)\,.$$

Поэтому справедлива (см. (3.1) и (3.2)) следующая лемма.

Л е м м а 3.1. *Пусть $0 < q \leqslant p < +\infty$ и $F \geqslant 0$. Тогда для всех наборов $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ выполняются неравенства*

$$c_1\,(\sum_{j=1}^{2}\|(k_j - i\frac{\partial}{\partial x_j})\varphi\|^2) \leqslant \|\widehat{d}_\pm(k)\varphi\|^2 \leqslant c_2\,(\sum_{j=1}^{2}\|(k_j - i\frac{\partial}{\partial x_j})\varphi\|^2)\,,$$

где $c_1 = q^6p^{-2}(2q^2 + F^2)^{-1}$, $c_2 = 2\,(p^2 + F^2)$.

С л е д с т в и е 3.1. *Операторы $\widehat{d}_\pm(k)$ замкнуты, $\ker\widehat{d}_\pm(k) = \{0\}$, если $k \notin 2\pi\mathbf{Z}^2$, $\ker\widehat{d}_+ = \ker\widehat{d}_-$ — одномерное подпространство в $L^2(K)$, состоящее из постоянных функций.*

С л е д с т в и е 3.2. *Множества значений $R(\widehat{d}_\pm(k))$ операторов $\widehat{d}_\pm(k)$ замкнуты.*

Для наборов $\{\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'\} \in \Gamma$ условимся обозначать

$$\widehat{d}'_\pm(k) = (\mathcal{G}' \pm i\mathcal{F}')(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}) \pm i\mathcal{H}'(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2})\,.$$

На множестве Γ введем метрику

$$\rho_\infty(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\}, \{\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'\}) =$$

$$= \max\{\|\mathcal{F} - \mathcal{F}'\|_{L^\infty(K)}, \|\mathcal{G} - \mathcal{G}'\|_{L^\infty(K)}, \|\mathcal{H} - \mathcal{H}'\|_{L^\infty(K)}\}\,.$$

Л е м м а 3.2. *Для всех $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$ имеем $\dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm = 1$ и $R(\widehat{d}_\pm(k)) = L^2(K)$, если $k \notin 2\pi\mathbf{Z}^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать операторы $\widehat{d}_\pm(k)$ для наборов $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$ (при фиксированных числах $0 < q \leqslant p < +\infty$ и $F \geqslant 0$). Предположим, что $h \in \operatorname{coker}\widehat{d}_\pm(k)\backslash\{0\}$. Пусть $\{\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'\} \in \Gamma(p, q, F)$ и

$$\rho_\infty(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\}, \{\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'\}) \leqslant \left(\frac{c_1}{8}\right)^{1/2}$$

(где число $c_1 = c_1(p, q, F) > 0$ определяется в лемме 3.1). Тогда для любой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\|h - \widehat{d}'_\pm(k)\varphi\|^2 \geqslant (\|h - \widehat{d}_\pm(k)\varphi\| - \|(\widehat{d}_\pm(k) - \widehat{d}'_\pm(k))\varphi\|)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\,\|h - \widehat{d}_\pm(k)\varphi\|^2 - \|(\widehat{d}_\pm(k) - \widehat{d}'_\pm(k))\varphi\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\|h\|^2 + \frac{1}{2}\,\|\widehat{d}_\pm(k)\varphi\|^2 - \|(\widehat{d}_\pm(k) - \widehat{d}'_\pm(k))\varphi\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\,\|h\|^2 + \frac{c_1}{2}\sum_{j=1}^{2}\|(k_j - i\frac{\partial}{\partial x_j})\varphi\|^2 -$$

$$-4\rho_\infty^2(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\}, \{\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'\})\sum_{j=1}^{2}\|(k_j - i\frac{\partial}{\partial x_j})\varphi\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|h\|^2 > 0\,.$$

Поэтому $h \notin R(\widehat{d}_\pm'(k))$ и, следовательно, $\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm(k) \cap R(\widehat{d}_\pm'(k)) = \{0\}$. Отсюда получаем, что $\dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm'(k) \geqslant \dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm(k)$. Так как операторы $\widehat{d}_\pm(k)$ и $\widehat{d}_\pm'(k)$ (в данном доказательстве) равноправны, то $\dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm'(k) = \dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm(k)$ для всех наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$ и $\{\mathcal{F}',\mathcal{G}',\mathcal{H}'\} \in \Gamma(p,q,F)$, для которых

$$\rho_\infty(\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\},\{\mathcal{F}',\mathcal{G}',\mathcal{H}'\}) \leqslant \left(\frac{c_1}{8}\right)^{1/2}.$$

Но число $c_1 > 0$ зависит только от p, q и F, поэтому $\dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm(k)$ — постоянные функции для всех наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$ и, следовательно, для всех $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$. С другой стороны, для операторов

$$\widehat{d}_\pm(k) = (k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}) \pm i(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2})$$

имеем $\dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm = 1$ и $R(\widehat{d}_\pm(k)) = L^2(K)$, если $k \notin 2\pi\mathbf{Z}^2$.

Для всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедливо равенство

$$\overline{\widehat{d}_+\varphi} = -\widehat{d}_-\overline{\varphi} \tag{3.3}$$

(где черта означает комплексное сопряжение).

Л е м м а 3.3. *Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbf{R}^2$, $M' \subset \mathcal{O}$ — измеримое множество, $\operatorname{mes} M' > 0$, $\varphi \in H^1(\mathcal{O})$ и $\varphi(x) = 0$ при п.в. $x \in M'$. Тогда также $\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} = 0$, $l = 1,2$, при п.в. $x \in M'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что $M' + he \in \mathcal{O}$ для всех $e \in S_1$ и $h \in (0,\varepsilon]$, где ε — любое (сколь угодно малое) положительное число. Обозначим

$$\varphi_e^h(x) = \frac{1}{h}\left(\varphi(x+he) - \varphi(x)\right),$$

$h \in (0,\varepsilon]$, $x \in M'$. Тогда

$$\|\varphi_{e_l}^h\|_{L^2(M')} \leqslant \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

и

$$\|\varphi_{e_l}^h - \frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\|_{L^2(M')} \to 0$$

при $h \to +0$, $l = 1,2$ (см. [36, с.119]). Найдется последовательность $h_j \in (0,\varepsilon]$, $j \in \mathbf{N}$, такая, что $h_j \to 0$ при $j \to +\infty$ и при п.в. $x \in M'$, $l = 1,2$, имеем

$$\varphi_{e_l}^{h_j}(x) \to \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_l} \tag{3.4}$$

при $j \to +\infty$. Положим

$$M_h' = M \cap (M - he_1) \cap (M - he_2).$$

Для любого $j \in \mathbf{N}$ существует число $\nu(j) \in \mathbf{N}$ такое, что $\operatorname{mes} M'_{h_{\nu(j)}} \geqslant -2^{j+1} + \operatorname{mes} M'$. Пусть $M'(J) = \bigcap\limits_{i \geqslant J} M'_{h_{\nu(i)}}$, $J \in \mathbf{N}$. Тогда $\varphi_{e_l}^{h_{\nu(j)}}(x) = 0$ при п.в. $x \in M'(J)$, $J \in \mathbf{N}$, и при всех $j \geqslant J$, $l = 1,2$. При этом $\operatorname{mes} M'(J) \geqslant -2^J + \operatorname{mes} M'$. Отсюда получаем, что $\varphi_{e_l}^{h_{\nu(j)}}(x) \to 0$ при $j \to +\infty$ при п.в. $x \in M'$, $l = 1,2$. Вместе с (3.4) это доказывает лемму 3.3.

Пусть $M \subset K$ — измеримое множество, $\operatorname{mes} M > 0$. Обозначим $L^2_M(K) = \{\varphi \in L^2(K) : \varphi(x) = 0 \text{ при п.в. } x \in K\backslash M\} \subset L^2(K)$, $L^2_K(K) = L^2(K)$. Если $\varphi \in \widetilde{H}^1(K) \cap L^2_M(K)$, то из леммы 3.3 следует, что $\widehat{d}_\pm(k)\varphi \in L^2_M(K)$. Определим операторы $\widehat{d}_\pm^M : L^2_M(K) \to L^2_M(K)$, для которых $\widehat{d}_\pm^M\varphi = \widehat{d}_\pm\varphi$, $\varphi \in D(\widehat{d}_\pm^M) = \widetilde{H}^1(K) \cap L^2_M(K)$ (возможно, $\widetilde{H}^1(K) \cap L^2_M(K) = \{0\}$). Если $\operatorname{mes} K\backslash M > 0$, то $\ker\widehat{d}_\pm^M = \{0\}$.

Л е м м а 3.4. *Пусть $M \subset K$ — измеримое множество, $\operatorname{mes} M > 0$. Тогда $R(\widehat{d}_\pm^M)$ — замкнутые множества (подпространства) в $L^2_M(K)$ и $\dim\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm^M \geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\operatorname{mes} K\backslash M = 0$, то лемма 3.4 непосредственно вытекает из следствия 3.2 леммы 3.1

и из леммы 3.2. Поэтому можно считать, что $\operatorname{mes} K\backslash M > 0$. Из (3.3) также следует, что можно ограничиться только рассмотрением оператора $\widehat{d}_+^M$. Докажем замкнутость множества $R(\widehat{d}_+^M)$. Пусть $\psi_\nu = \widehat{d}_+^M \varphi_\nu \to \psi \in L^2_M(K)$ при $\nu \to +\infty$, где $\varphi_\nu \in D(\widehat{d}_+^M) \subset L^2_M(K)$, $\nu \in \mathrm{N}$. Положим

$$a_\nu = (\psi_\nu)_0 = \int_K \psi_\nu \, d^2x\,.$$

Тогда $\varphi'_\nu = \varphi_\nu - a_\nu \in \widetilde{H}^1_0(K)$, $\nu \in \mathrm{N}$, и $\psi_\nu = \widehat{d}_+ \varphi'_\nu$. Из следствия 3.2 леммы 3.1 получаем, что $\psi = \widehat{d}_+\varphi$ для некоторой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1_0(K)$. Тогда (см. лемму 3.1)

$$\sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial(\varphi - \varphi'_\nu)}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(K)} \to 0$$

при $\nu \to +\infty$ и, следовательно,

$$\|\varphi - \varphi'_\nu\|_{L^2(K)} \to 0\,,\ \nu \to +\infty\,. \tag{3.5}$$

Пусть $K' \subset K\backslash M$ — измеримое множество, $\operatorname{mes} K' > 0$ и $\operatorname{mes} K\backslash(M \cup K') > 0$. Определим функцию $\theta^M_{K'}(x) = \operatorname{mes} K\backslash(M \cup K')$, если $x \in K'$, $\theta^M_{K'}(x) = -\operatorname{mes} K'$, если $x \in K\backslash(M \cup K')$, и $\theta^M_{K'}(x) = 0$, если $x \in M$. Имеем $(\theta^M_{K'}, \varphi'_\nu) = 0$ для всех $\nu \in \mathrm{N}$, поэтому (см. (3.5)) $(\theta^M_{K'}, \varphi) = 0$. Из произвольности выбора множества K' вытекает, что $\varphi(x) = a\,(= \mathrm{const})$ при п.в. $x \in K\backslash M$. Но тогда $\varphi - a \in D(\widehat{d}_+^M) = \widetilde{H}^1(K) \cap L^2_M(K)$ и $\widehat{d}_+^M(\varphi - a) = \psi$, что доказывает замкнутость множества $R(\widehat{d}_+^M)$. Теперь аналогично доказательству леммы 3.2 (с помощью леммы 3.1) получаем, что $\dim \operatorname{coker} \widehat{d}_+^M$ — постоянная функция на пространстве (Γ, ρ_∞) (возможно, принимающая значение $+\infty$). Однако характеристическая функция χ_M множества M принадлежит пространству $L^2_M(K)$ и при $\mathcal{G} = \mathcal{H} \equiv 1$, $\mathcal{F} \equiv 0$ имеем $(\chi_M, \widehat{d}_+^M \varphi) = \int_K \widehat{d}_+^M \varphi \, d^2x = 0$ для всех $\varphi \in D(\widehat{d}_+^M) = \widetilde{H}^1(K) \cap L^2_M(K)$, поэтому $\dim \operatorname{coker} \widehat{d}_+^M \geqslant 1$ при $\mathcal{G} = \mathcal{H} \equiv 1$, $\mathcal{F} \equiv 0$ и, следовательно, для всех наборов $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$.

Будем обозначать через $\widehat{P}(\mathcal{L})$ ортогональный проектор в $L^2(K)$ на (замкнутое) подпространство $\mathcal{L}$. На множестве ортогональных проекторов рассматривается (равномерная) операторная топология (порождаемая операторной нормой).

Л е м м а 3.5. *Функции* $(\Gamma(p,q,F), \rho_\infty) \ni \{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \to \widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}_\pm)$ *равномерно непрерывны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (3.3) следует, что достаточно рассмотреть только случай оператора $\widehat{d}_+$. Пусть $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \sqrt{c_1}$, $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$ и $\{\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'\} \in \Gamma(p,q,F)$, при этом

$$\rho_\infty(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\}, \{\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'\}) \leqslant \varepsilon\,;$$

$\psi \in L^2(K)$. Без ограничения общности можно считать, что $\|\widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}_+)\psi\| \leqslant \|\widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}'_+)\psi\|$. Обозначим $\psi' = \psi - \widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}'_+)\psi$. Найдется функция $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ такая, что $\psi - \widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}_+)\psi = \widehat{d}_+\varphi$. Из леммы 3.1 следует оценка

$$\|(\widehat{d}_+ - \widehat{d}'_+)\varphi\|^2 \leqslant 4\varepsilon^2 \left(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\varepsilon^2}{c_1} \min\{\|\widehat{d}_+\varphi\|^2, \|\widehat{d}'_+\varphi\|^2\}\,.$$

Имеем

$$\|\widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}'_+)\psi\| \leqslant \|\psi - \widehat{d}'_+\varphi\| \leqslant \|\widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}_+)\psi\| +$$

$$+ \|(\widehat{d}_+ - \widehat{d}'_+)\varphi\| \leqslant \|\widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}'_+)\psi\| + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{c_1}} \|\widehat{d}_+\varphi\|\,.$$

Поэтому

$$\|\psi' - \widehat{d}'_+\varphi\| = \left(\|\psi - \widehat{d}'_+\varphi\|^2 - \|\widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}'_+)\psi\|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{c_1}}\right)^{1/2} \|\widehat{d}_+\varphi\|^{1/2} \left(\|\widehat{P}(\operatorname{coker} \widehat{d}'_+)\psi\| + \|\widehat{d}_+\varphi\|\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{c_1}}\right)^{1/2}\|\psi\|\,,$$

$$\|\widehat{P}(\operatorname{coker}\widehat{d}_+)\psi - \widehat{P}(\operatorname{coker}\widehat{d}_+{}')\psi\| \leqslant \|\psi' - \widehat{d}_+{}'\varphi\| + \|(\widehat{d}_+ - \widehat{d}_+{}')\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{c_1}}\right)^{1/2}\left(2+\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{c_1}}\right)^{1/2}\right)\|\psi\| \leqslant 6\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{c_1}}\right)^{1/2}\|\psi\|\,.$$

Следовательно,

$$\|\widehat{P}(\operatorname{coker}\widehat{d}_+) - \widehat{P}(\operatorname{coker}\widehat{d}_+{}')\| \leqslant 6\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{c_1}}\right)^{1/2}.$$

Последняя оценка означает, что функция $(\Gamma(p,q,F),\rho_\infty) \ni \{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \to \widehat{P}(\operatorname{coker}\widehat{d}_+)$ равномерно непрерывна.

Из равномерной непрерывности функций $(\Gamma(p,q,F),\rho_\infty) \ni \{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \to \widehat{P}(\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm)$ (и выпуклости множества $\Gamma(p,q,F)$) следует, что существуют непрерывные функции $(\Gamma(p,q,F),\rho_\infty) \ni \{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \to \chi_\pm \in \{\chi \in L^2(K) : \|\chi\| = 1\} \cap \operatorname{coker}\widehat{d}_\pm$, которые продолжаются до непрерывных функций на все пространство (Γ,ρ_∞). При этом можно считать (см. равенство (3.3)), что для всех наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$ имеем $\chi_- = \overline{\chi_+}$.

Так как операторы $\widehat{d}_\pm$ замкнуты и $D(\widehat{d}_\pm) = \widetilde{H}^1(K)$ — плотное линейное многообразие в $L^2(K)$, то операторы $\widehat{d}^*_\pm$ также замкнуты и плотно определены; $\ker\widehat{d}^*_\pm = \operatorname{coker}\widehat{d}_\pm$, $\operatorname{coker}\widehat{d}^*_\pm = \ker\widehat{d}_\pm$. Области определения $D(\widehat{d}^*_\pm)$ операторов $\widehat{d}^*_\pm$ состоят из тех и только тех функций $\varphi \in L^2(K)$, для которых в смысле (периодических) обобщенных функций

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(-\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})\varphi \pm i\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{H}\varphi \in L^2(K)\,,$$

при этом

$$\widehat{d}^*_\pm\varphi = -i\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{G} \mp i\mathcal{F})\varphi - i\frac{\partial}{\partial x_2}(\mp i\mathcal{H})\varphi\,. \tag{3.6}$$

Если функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ принадлежат пространству $\widetilde{C}^1(K)$, то $D(\widehat{d}^*_\pm) = \widetilde{H}^1(K)$ и для всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедливо равенство (3.6).

Обозначим $K^c = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2$. Функции $\Phi \in \widetilde{H}^1(K)$ будем далее считать периодически продолженными на все пространство $\mathbf{R}^2$ (тогда $\widetilde{H}^1(K) = \widetilde{H}^1(K^c)$), $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x|$.

Л е м м а 3.6. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$, $g(.)$ — *положительная невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция на полуинтервале* $(0,1]$ *такая, что*

$$\frac{g(\frac{r}{2}) - g(r)}{g(r)} \to 0$$

при $r \to +0$, *и* $\Phi \in \widetilde{H}^1(K)$. *Предположим, что*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};g;\Phi) = \int_{K^c} g(r)\,|\widehat{d}_+\Phi|^2 d^2x < +\infty\,.$$

Тогда

$$\int_{K^c} g(r)\,|\operatorname{grad}\Phi|^2 d^2x \leqslant c_3\mathcal{C} < +\infty\,, \tag{3.7}$$

где $c_3 = c_3(p,q,F;g) > 0$.

З а м е ч а н и е 3.1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{r\to+0} g(r)$, то лемма 3.6 тривиально следует из леммы 3.1. Поэтому утверждение леммы 3.6 является содержательным только в случае, когда $g(r) \to +\infty$ при $r \to +0$.

Доказательство леммы 3.6. Пусть $\varphi \in \widetilde{C}^2(K)$ (и функция φ периодически продолжена на все пространство $\mathbf{R}^2$). Для любого $r > 0$

$$2\operatorname{Re}\int_{U_r}\left(\mathcal{K}\mathcal{G}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, i\mathcal{K}\left(\mathcal{F}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mathcal{H}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\right)_{\mathbf{C}} d^2x =$$

$$= i\int_{U_r}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) d^2x = -i\oint_{\partial U_r}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\ell}\,\varphi\,d\ell\,,$$

где $d\ell$ — элемент длины на окружности ∂U_r, $\mathcal{K}(x) = (\mathcal{G}(x)\mathcal{H}(x))^{-1/2}$, $x \in \mathbf{R}^2$. Поэтому (см. (3.2))

$$\int_{U_r} |\widehat{d}_+\varphi|^2 d^2x \geqslant q^2 \int_{U_r} \mathcal{K}^2 |\widehat{d}_+\varphi|^2 d^2x = \tag{3.8}$$

$$= q^2 \left\{ \int_{U_r} \mathcal{K}^2 \mathcal{G}^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 d^2x + \int_{U_r} \mathcal{K}^2 \left| \mathcal{F} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mathcal{H} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|^2 d^2x - \right.$$

$$\left. - i \oint_{\partial U_r} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \ell} \varphi \, d\ell \right\} \geqslant c_1 \int_{U_r} |\operatorname{grad} \varphi|^2 d^2x - iq^2 \oint_{\partial U_r} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \ell} \varphi \, d\ell ,$$

где c_1 — константа из леммы 3.1. Пусть $\partial U_r^{\pm} = \{x \in \partial U_r : \operatorname{sign} x_2 = \pm 1\}$, $x_{(r)} = (r, 0) \in \partial U_r$. Имеем

$$\left| \oint_{\partial U_r} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \ell} \varphi \, d\ell \right| = \left| \oint_{\partial U_r} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \ell} (\varphi - \varphi(x_{(r)})) \, d\ell \right| \leqslant \tag{3.9}$$

$$\leqslant \sum_{\pm} \left(\int_{\partial U_r^{\pm}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right| d\ell \right)^2 \leqslant \pi r \sum_{\pm} \int_{\partial U_r^{\pm}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right|^2 d\ell = \pi r \oint_{\partial U_r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right|^2 d\ell .$$

Теперь для любого $R > 0$ выберем число $r \in [R, 2R]$ (зависящее от функции $\varphi \in \widetilde{C}^2(K)$) так, что

$$\oint_{\partial U_r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right|^2 d\ell = \frac{1}{R} \int_{U_{2R} \setminus U_R} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right|^2 d\ell \, dr . \tag{3.10}$$

Тогда из (3.8), (3.9) и (3.10) получаем

$$\int_{U_{2R}} |\widehat{d}_+\varphi|^2 d^2x \geqslant \int_{U_r} |\widehat{d}_+\varphi|^2 d^2x \geqslant$$

$$\geqslant c_1 \int_{U_r} |\operatorname{grad} \varphi|^2 d^2x - iq^2 \oint_{\partial U_r} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \ell} \varphi \, d\ell \geqslant$$

$$\geqslant c_1 \int_{U_R} |\operatorname{grad} \varphi|^2 d^2x - \pi q^2 \frac{r}{R} \int_{U_{2R} \setminus U_R} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right|^2 d\ell \, dr \geqslant$$

$$\geqslant c_1 \int_{U_R} |\operatorname{grad} \varphi|^2 d^2x - 2\pi q^2 \int_{U_{2R} \setminus U_R} |\operatorname{grad} \varphi|^2 d^2x .$$

Так как функцию $\Phi \in \widetilde{H}^1(K)$ можно аппроксимировать (в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$) функциями $\varphi \in \widetilde{C}^2(K)$, то из последних оценок следует, что для всех $R > 0$

$$c_1 \int_{U_R} |\operatorname{grad} \Phi|^2 d^2x \leqslant \int_{U_{2R}} |\widehat{d}_+\Phi|^2 d^2x + 2\pi q^2 \int_{U_{2R} \setminus U_R} |\operatorname{grad} \Phi|^2 d^2x . \tag{3.11}$$

Обозначим

$$a(r) = \oint_{\partial U_r} |\operatorname{grad} \Phi|^2 d\ell , \; b(r) = \oint_{\partial U_r} |\widehat{d}_+\Phi|^2 d\ell .$$

Пусть $0 < 2R_1 \leqslant R_2 \leqslant 1$. Из (3.11) вытекает оценка

$$-c_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dg(r)}{dR} \int_0^R a(r) \, dr \, dR \leqslant - \int_{R_1}^{R_2} \frac{dg(r)}{dR} \int_0^{2R} b(r) \, dr \, dR -$$

$$-2\pi q^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dg(r)}{dR} \int_R^{2R} a(r) \, dr \, dR ,$$

откуда (меняя порядок интегрирования)

$$c_1 \int_0^{R_1} (g(R_1) - g(R_2)) \, a(r) \, dr + c_1 \int_{R_1}^{R_2} (g(r) - g(R_2)) \, a(r) \, dr \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2R_1} (g(R_1) - g(R_2)) \, b(r) \, dr + \int_{2R_1}^{2R_2} \left(g\left(\frac{r}{2}\right) - g(R_2)\right) b(r) \, dr +$$

$$+2\pi q^2 \left\{ \int_{R_1}^{2R_1} (g(R_1) - g(r)) \, a(r) \, dr + \int_{2R_1}^{R_2} \left(g\left(\frac{r}{2}\right) - g(r)\right) a(r) \, dr + \right.$$

$$\left. + \int_{R_2}^{2R_2} \left(g\left(\frac{r}{2}\right) - g(R_2)\right) a(r) \, dr \right\}$$

и, следовательно,

$$c_1 \int_{R_1}^{R_2} (g(r) - g(R_2)) \, a(r) \, dr \leqslant \int_0^{2R_2} g\left(\frac{r}{2}\right) b(r) \, dr + \tag{3.12}$$

$$+2\pi q^2\left\{\int_{R_1}^{R_2}\left(g\left(\frac{r}{2}\right)-g(r)\right)a(r)\,dr+g\left(\frac{R_2}{2}\right)\int_{R_2}^{2R_2}a(r)\,dr\right\}.$$

Выберем число $R_2 = R_2(g) \in (0, \frac{1}{4}]$ так, что

$$g\left(\frac{r}{2}\right)-g(r)\leqslant\frac{c_1}{4\pi q^2}\,g(r)$$

при всех $r\in(0,2R_2]$. Тогда из (3.12) (при $0<2R_1\leqslant R_2$) следует неравенство

$$\frac{c_1}{2}\int_{R_1}^{R_2}g(r)\,a(r)\,dr\leqslant\left(1+\frac{c_1}{4\pi q^2}\right)\int_0^{2R_2}g(r)\,b(r)\,dr+$$

$$+\,c_1\,g(R_2)\int_{R_1}^{R_2}a(r)\,dr+2\pi q^2 g\left(\frac{R_2}{2}\right)\int_{R_2}^{2R_2}a(r)\,dr\,,$$

из которого при $R_1\to+0$, используя оценку (см. лемму 3.1)

$$\int_0^{1/2}a(r)\,dr\leqslant\int K^c|\mathrm{grad}\,\Phi|^2d^2x\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{c_1}\int_{K^c}|\widehat{d}_+\Phi|^2d^2x\leqslant\frac{\mathcal{C}}{c_1 g(1/\sqrt{2})}\,,$$

получаем

$$\int_0^{R_2}g(r)\,a(r)\,dr\leqslant\frac{(c_1+4\pi q^2)^2}{2\pi q^2c_1^2}\,\frac{g(R_2/2)}{g(1/\sqrt{2})}\,\mathcal{C}\,. \tag{3.13}$$

С другой стороны,

$$\int_{R_2}^{1/\sqrt{2}}g(r)\,a(r)\,dr\leqslant g(R_2)\int_0^{1/\sqrt{2}}a(r)\,dr\leqslant\frac{5}{c_1}\,\frac{g(R_2)}{g(1/\sqrt{2})}\,\mathcal{C}\,. \tag{3.14}$$

Неравенство (3.7) теперь непосредственно вытекает из (3.13) и (3.14), при этом можно положить

$$c_3=\frac{1}{c_1}\,\frac{g(R_2/2)}{g(1/\sqrt{2})}\left\{5+\frac{(c_1+4\pi q^2)^2}{2\pi q^2c_1}\right\},\ R_2=R_2(g)\in(0,\frac{1}{4}]\,.$$

Лемма 3.6 доказана.

Пусть $g\in\mathbf{G}$. Обозначим через $\widetilde{H}_0^1(g;K)$ линейное пространство функций $\Phi\in\widetilde{H}_0^1(K)$, для которых

$$\|\Phi\|^{(g)}=\sup_{y\in\mathbf{R}^2}\left(\int_{K^c+y}g(|x-y|)\,|\mathrm{grad}\,\Phi(x)|^2d^2x\right)^{1/2}<+\infty\,.$$

Функция $\Phi\to\|\Phi\|^{(g)}$ является нормой на линейном пространстве $\widetilde{H}_0^1(g;K)$, при этом пространство $(\widetilde{H}_0^1(g;K),\|.\|^{(g)})$ банахово. Из (G4) следует, что $\widetilde{C}_0^1(K)\subset\widetilde{H}_0^1(g;K)$ (вложение непрерывно).

Пусть $\Phi\in\widetilde{C}_0^1(K)=\widetilde{C}_0^1(K^c)$; $r=R(\omega)$, $\omega\in[0,2\pi)$, — уравнение (в полярных координатах) границы ячейки K^c. Имеем

$$\Phi(0)=-\frac{1}{2}\int_0^{R(\omega)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,(R^2(\omega)-r^2)\,dr\,d\omega\,.$$

Поэтому

$$|\Phi(0)|\leqslant\frac{1}{4}\int_0^{R(\omega)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|dr\,d\omega\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left(\int_0^{R(\omega)}\int_0^{2\pi}\frac{dr\,d\omega}{rg(r)}\right)^{1/2}\left(\int_0^{R(\omega)}\int_0^{2\pi}g(r)\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|^2r\,dr\,d\omega\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c_4\left(\int_{K^c}g(r)\,|\mathrm{grad}\,\Phi|^2d^2x\right)^{1/2},$$

где

$$c_4=c_4(g)=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left(\int_0^1\frac{dr}{r\,g(r)}\right)^{1/2}, \tag{3.15}$$

и, следовательно,

$$\|\Phi\|_{L^\infty(K)}\leqslant c_4\,\|\Phi\|^{(g)}\,. \tag{3.16}$$

Л е м м а 3.7. *Пусть $g\in\mathbf{G}$, $\Phi\in\widetilde{H}_0^1(g;K)$. Тогда $\Phi\in\widetilde{C}_0(K)$ и*

$$\|\Phi\|_{L^\infty(K)}\leqslant c_4\,\|\Phi\|^{(g)}\,,$$

где константа $c_4=c_4(g)>0$ определена в (3.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω_1 любую функцию из $C^\infty(\mathbf{R}^2)$, для которой $\Omega_1(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^2$, $\operatorname{supp}\Omega_1 \subset U_1$ и $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \Omega_1(x)\, d^2x = 1$; $\Omega_\delta(x) = \delta^{-2}\Omega_1(\delta^{-1}x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, $\delta > 0$. Для функции $\Phi \in \widetilde{H}^1_0(g;K)$ функция

$$(\Phi * \Omega_\delta)(x) = \int_{\mathbf{R}^2} \Phi(x-y)\,\Omega_\delta(y)\, d^2y\,,\ x \in \mathbf{R}^2\,,$$

принадлежит $\widetilde{C}^\infty_0(K) \subset \widetilde{H}^1_0(g;K)$ и $\|\Phi * \Omega_\delta\|^{(g)} \leqslant \|\Phi\|^{(g)}$. Можно подобрать функцию $g_1 \in \mathbf{G}$ так, что $g_1(r) \leqslant g(r)$ для всех $r \in (0,1]$ и $\frac{g_1(r)}{g(r)} \to 0$ при $r \to +0$. Для любой такой функции g_1 имеем $\Phi \in \widetilde{H}^1_0(g_1;K)$ и $\|\Phi - \Phi * \Omega_\delta\|^{(g_1)} \to 0$ при $\delta \to +0$. Из (3.16) получаем

$$\|\Phi * \Omega_\delta\|_{L^\infty(K)} \leqslant c_4\,\|\Phi * \Omega_\delta\|^{(g)} \leqslant c_4\,\|\Phi\|^{(g)}\,,\ \delta > 0\,.$$

Пусть $\delta_j \to +0$ при $j \to +\infty$, $j \in \mathbf{N}$. Тогда (переходя, если нужно, к подпоследовательности) можно считать, что $(\Phi * \Omega_{\delta_j})(x) \to \Phi(x)$ при п.в. $x \in \mathbf{R}^2$ (при $j \to +\infty$). С другой стороны,

$$\|\Phi * \Omega_{\delta_j} - \Phi * \Omega_{\delta_l}\|_{L^\infty(K)} \leqslant c_4\,(g_1)\,\|\Phi * \Omega_{\delta_j} - \Phi * \Omega_{\delta_l}\|^{(g_1)} \leqslant$$

$$\leqslant c_4\,(g_1)\,(\|\Phi - \Phi * \Omega_{\delta_j}\|^{(g_1)} + \|\Phi - \Phi * \Omega_{\delta_l}\|^{(g_1)})\,,\ j,l \in \mathbf{N}\,.$$

Поэтому $\Phi * \Omega_{\delta_j}$, $j \in \mathbf{N}$, — фундаментальная последовательность в $L^\infty(K)$ и, следовательно, $\Phi \in \widetilde{C}_0(K)$ (функция Φ совпадает п.в. с некоторой функцией из $\widetilde{C}_0(K)$) и

$$\|\Phi\|_{L^\infty(K)} \leqslant c_4\,\|\Phi\|^{(g)}\,.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$, $g \in \mathbf{G}$. *Тогда найдтся такое число* $c_5 = c_5\,(p,q,F;g) > 0$, *что для всех функций* $\Phi \in \widetilde{H}^1_0(K)$, *для которых* $\widehat{d}_+\Phi \in L^2(g;K)$, *имеем* $\Phi \in \widetilde{C}_0(K)$ *и*

$$\|\Phi\|_{L^\infty(K)} \leqslant c_5\,\|\widehat{d}_+\Phi\|_{L^2(g;K)}\,. \tag{3.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 3.6 следует, что любая функция $\Phi \in \widetilde{H}^1_0(K)$, для которой $\widehat{d}_+\Phi \in L^2(g;K)$, принадлежит пространтсву $\widetilde{H}^1_0(g;K)$ и

$$\|\Phi\|^{(g)} \leqslant \sqrt{c_3}\,\|\widehat{d}_+\Phi\|_{L^2(g;K)}\,.$$

Но тогда из леммы 3.7 получаем, что $\Phi \in \widetilde{C}_0(K)$ и выполняется неравенство (3.17), где $c_5 = \sqrt{c_3}c_4$.

Л е м м а 3.8. *Пусть* $g \in \mathbf{G}$, $V \in L^2(g;K)$ *(и функция* V *периодически продолжена на все пространство* $\mathbf{R}^2$ *). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $C_\varepsilon = C_\varepsilon(V) > 0$, *что для всех функций* $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ *имеем* $V\varphi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ *и*

$$\|V\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leqslant \varepsilon\,\|\operatorname{grad}\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)} + C_\varepsilon\,\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}\,.$$

Для доказательства леммы 3.8 достаточно заметить, что из (**G**3) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\ \sup_{x\in\mathbf{R}^2} \int_{U_\varepsilon(x)} \left\{\ln\frac{1}{|x-y|}\right\} |V(y)|^2 d^2y = 0\,,$$

означающее, что функция V^2 принадлежит классу Като K_2 (см. [6, с.17]). Из леммы 3.8 вытекает лемма 3.9 (см., например, [22]), являющаяся периодическим вариантом леммы 3.8.

Л е м м а 3.9. *Пусть* $g \in \mathbf{G}$, $V \in L^2(g;K)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $C'_\varepsilon = C'_\varepsilon(V) > 0$, *что для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2$ *и всех функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ *имеем* $V\varphi \in L^2(K)$ *и*

$$\|V\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant \varepsilon\,\|(k - i\nabla)\varphi\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} + C'_\varepsilon\,\|\varphi\|_{L^2(K)}\,.$$

Т е о р е м а 3.2. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$, $g \in \mathbf{G}$. *Тогда для любой функции* $\Phi \in \widetilde{H}^1_0(K)$, *для которой* $\widehat{d}_+\Phi \in L^2(g;K)$ *(тогда* $\Phi \in \widetilde{C}_0(K)$ *), и любой функции* $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ *имеем* $e^{i\Phi}\psi \in \widetilde{H}^1(K)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi \in L^2(K)$, $j=1,2$, *и справедливы равенства*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,e^{i\Phi}\psi = e^{i\Phi}\left(i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\,\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right),\ j=1,2\,. \tag{3.18}$$

Доказательство. В силу теоремы 3.1 $\Phi \in \widetilde{C}_0(K)$. Из леммы 3.6 вытекает, что $\Phi \in \widetilde{H}_0^1(g;K)$ и, следовательно, $\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \in L^2(g;K)$, $j=1,2$. Поэтому включение $\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi \in L^2(K)$ является следствием леммы 3.9. Для доказательства неравенств (3.18) предположим вначале, что $\psi \in \widetilde{C}^1(K)$. Существуют функции $\Phi_\nu = \Phi * \Omega_{\delta_\nu} \in \widetilde{C}_0^\infty(K)$ ($\delta_\nu > 0$, $\delta_\nu \to +0$ при $\nu \to +\infty$), $\nu \in \mathbf{N}$ (см. доказательство леммы 3.7), сходящиеся при $\nu \to +\infty$ к функции Φ как в пространстве $L^\infty(K)$, так и в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$ (т.е. $\|\Phi - \Phi_\nu\|_{L^2(K)} \to 0$ и $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_j}\right\|_{L^2(K)} \to 0$ при $\nu \to +\infty$, $j=1,2$). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{i\Phi_\nu}\psi = e^{i\Phi_\nu}\left(i\,\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_j}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right),\ j=1,2.$$

При этом $e^{i\Phi_\nu} \to e^{i\Phi}$ в $L^\infty(K)$, $\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_j} \to \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}$ в $L^2(K)$ при $\nu \to +\infty$;

$$\left\|e^{i\Phi_\nu}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_j} - e^{i\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\|_{L^2(K)} \leqslant$$

$$\leqslant \|e^{i\Phi_\nu}\|_{L^\infty(K)}\left\|\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_j} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\|_{L^2(K)} +$$

$$+\|e^{i\Phi_\nu} - e^{i\Phi}\|_{L^\infty(K)}\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\|_{L^2(K)} \to 0$$

при $\nu \to +\infty$. Следовательно, $e^{i\Phi_\nu}\psi \to e^{i\Phi}\psi$ и

$$e^{i\Phi_\nu}\left(i\,\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_j}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \to e^{i\Phi}\left(i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)$$

при $\nu \to +\infty$ в пространстве $L^2(K)$. Так как операторы $\frac{\partial}{\partial x_1} \pm i\frac{\partial}{\partial x_2}$ (с областью определения $D(\frac{\partial}{\partial x_1} \pm i\frac{\partial}{\partial x_2}) = \widetilde{H}^1(K)$) замкнуты, то $e^{i\Phi}\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ и выполняются равенства (3.18). Пусть теперь $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$, $\psi_\nu \in \widetilde{C}^1(K)$, $\nu \in \mathbf{N}$, и $\psi_\nu \to \psi$ при $\nu \to +\infty$ в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{i\Phi}\psi_\nu = e^{i\Phi}\left(i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi_\nu + \frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}\right),\ \nu \in \mathbf{N},\ j=1,2,$$

и при этом (в силу леммы 3.9) $\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi \in L^2(K)$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi_\nu \to \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi$ при $\nu \to +\infty$ в пространстве $L^2(K)$, то также $e^{i\Phi}\psi_\nu \to e^{i\Phi}\psi$ и

$$e^{i\Phi}\left(i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi_\nu + \frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}\right) \to e^{i\Phi}\left(i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)$$

при $\nu \to +\infty$ в пространстве $L^2(K)$. Опять же в силу замкнутости операторов $\frac{\partial}{\partial x_1} \pm i\frac{\partial}{\partial x_2}$ получаем, что $e^{i\Phi}\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ и справедливы равенства (3.18).

Замечание 3.2. Теоремы 3.1 и 3.2 (с той же константой c_5 в формулировке теоремы 3.1) справедливы также для оператора $\widehat{d}_-$ (см. равенство (3.3)).

4. Теорема 4.1 и ее доказательство

Если $\Phi, \Psi \in \widetilde{C}_0^1(K)$ и $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$, то

$$e^{\widehat{\sigma}_3\Psi}e^{-i\Phi}\,\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)\,e^{i\Phi}e^{\widehat{\sigma}_3\Psi} = \widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa) + \mathcal{C}_1\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{C}_2\widehat{\sigma}_2\,, \tag{4.1}$$

где

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{G}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \mathcal{F}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \mathcal{H}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{C}_2 = -\mathcal{G}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \mathcal{F}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \mathcal{H}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}. \tag{4.2}$$

Обозначим $\Phi_\pm = \Phi \mp i\Psi$, $\mathcal{C}_\pm = \mathcal{C}_1 \pm i\mathcal{C}_2$. В силу (1.5) равенство (4.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Phi_-}\,\widehat{d}_-(k+i\varkappa)\,e^{i\Phi_-} \\ e^{-i\Phi_+}\,\widehat{d}_+(k+i\varkappa)\,e^{i\Phi_+} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \widehat{d}_-(k+i\varkappa) + \mathcal{C}_- \\ \widehat{d}_+(k+i\varkappa) + \mathcal{C}_+ & 0 \end{pmatrix},$$

при этом $i\widehat{d}_\pm\Phi_\pm = \mathcal{C}_\pm$. Последние равенства эквивалентны равенствам (4.2) и (4.3).

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$, $g\in\mathbf{G}$. *Тогда для любых функций* $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\in L^2(g;K)$ *можно (однозначно) найти такие векторы* $k,\varkappa\in\mathbf{R}^2$ *и функции* $\Phi,\Psi\in\widetilde{H}^1_0(g;K)\subset\widetilde{H}^1_0(K)\cap\widetilde{C}(K)$, *что умножение на функции* $e^{i\mu\Phi}$ *и* $e^{\mu\Psi}$ *для всех* $\mu\in\mathbf{C}$ *не выводит за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K)$ *(тогда операторы умножения на функции* $e^{i\mu\Phi}$ *и матричные функции* $e^{\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}$ *не выводят за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ *),*

$$e^{\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}e^{-i\mu\Phi}\,\widehat{\mathcal{D}}(\mu(k+i\varkappa))\,e^{i\mu\Phi}e^{\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}=\widehat{\mathcal{D}}(0)+\mu(\mathcal{C}_1\widehat{\sigma}_1+\mathcal{C}_2\widehat{\sigma}_2) \tag{4.4}$$

и при этом

$$\max\{\|\Phi\|_{L^\infty(K)},\|\Psi\|_{L^\infty(K)}\}\leqslant c_1''\,(\|\mathcal{C}_1\|_{L^2(g;K)}+\|\mathcal{C}_2\|_{L^2(g;K)})\,, \tag{4.5}$$

$$|k|^2+|\varkappa|^2\leqslant c_2''\,(\|\mathcal{C}_1\|^2_{L^2(K)}+\|\mathcal{C}_2\|^2_{L^2(K)})\,, \tag{4.6}$$

где $c_1''=c_1''(p,q,F;g)>0$, $c_2''=c_2''(p,q,F)>0$. *Если* $\mathcal{C}_\pm=\mathcal{C}_1\pm i\,\mathcal{C}_2\in R(\widehat{d}_\pm)$, *то* $k=\varkappa=0$. *Если* $\mathcal{C}_1$ *и* $\mathcal{C}_2$ *— вещественнозначные функции, то* $\varkappa=0$ *и функции* Φ *и* Ψ *также являются вещественнозначными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если векторы $k,\varkappa\in\mathbf{R}^2$ и функции $\Phi,\Psi\in\widetilde{H}^1_0(g;K)\subset\widetilde{H}^1_0(K)\cap\widetilde{C}(K)$ (для них умножение на функции $e^{\pm i\Phi}$ и $e^{\pm\Psi}$ не выводит за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K)$) удовлетворяют при $\mu=1$ равенству (4.4), то (см. теорему 3.2)

$$i\widehat{d}_\pm\Phi_\pm=\mathcal{C}'_\pm=\mathcal{C}_\pm-((\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})k_1\pm i\mathcal{H}k_2)-i((\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})\varkappa_1\pm i\mathcal{H}\varkappa_2)\,, \tag{4.7}$$

где $\Phi_\pm=\Phi\mp i\Psi$, $\mathcal{C}_\pm=\mathcal{C}_1\pm i\mathcal{C}_2\in L^2(g;K)\subset L^2(K)$. Поэтому будем искать векторы $k,\varkappa\in\mathbf{R}^2$ и функции $\Phi_\pm\in\widetilde{H}^1_0(K)$, для которых выполняются равенства (4.7). Обозначим $(\chi_\pm,\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})=\mu^{(1)}_\pm$, $(\chi_\pm,\pm i\mathcal{H})=\mu^{(2)}_\pm$, где $\chi_\pm\in\operatorname{coker}\widehat{d}_\pm$, $\|\chi_\pm\|=1$ (скалярное произведение предполагается линейным по второму сомножителю). Так как функции $\chi_\pm$ выбираются так, что $\chi_-=\overline{\chi_+}$, то

$\mu^{(1)}_-=\overline{\mu^{(1)}_+}$ и $\mu^{(2)}_-=\overline{\mu^{(2)}_+}$, при этом $|\mu^{(1)}_\pm|\leqslant p+F$ и $|\mu^{(2)}_\pm|\leqslant p$. Из (4.7) следуют равенства

$$(\chi_\pm,\mathcal{C}_\pm)=\mu^{(1)}_\pm\,(k_1+i\varkappa_1)+\mu^{(2)}_\pm\,(k_2+i\varkappa_2)\,. \tag{4.8}$$

Пусть $\mathcal{K}(x)=(\mathcal{G}(x)\mathcal{H}(x))^{-1/2}$, $x\in K$. Для любого вектора $\tau=(\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}^2$ и любых функций $\Phi'_\pm\in\widetilde{H}^1(K)$ имеем

$$\|\mathcal{K}(i\widehat{d}_\pm\Phi'_\pm+(\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})\tau_1\pm i\mathcal{H}\tau_2)\|^2=$$

$$=\left\|\mathcal{K}\big((\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})(\tau_1+\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_1})\pm i\mathcal{H}(\tau_2+\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_2})\big)\right\|^2=$$

$$=\left\|\mathcal{K}\mathcal{G}(\tau_1+\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_1})\right\|^2+\left\|\mathcal{K}\big(\mathcal{F}(\tau_1+\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_1})+\mathcal{H}(\tau_2+\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_2})\big)\right\|^2.$$

Откуда

$$\|i\widehat{d}_\pm\Phi'_\pm+(\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})\tau_1\pm i\mathcal{H}\tau_2\|^2\geqslant \tag{4.9}$$

$$\geqslant c_1\left(\left\|\tau_1+\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_1}\right\|^2+\left\|\tau_2+\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_2}\right\|^2\right)=$$

$$=c_1\left(|\tau|^2+\left\|\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\Phi'_\pm}{\partial x_2}\right\|^2\right),$$

где постоянная $c_1=c_1(p,q,F)>0$ может быть взята такой же, как и в лемме 3.1 (см. (3.2)). В неравенствах (4.9) функции $\Phi'_\pm\in\widetilde{H}^1(K)$ выбираются произвольно, поэтому

$$c_1\,|\tau|^2\leqslant\min_{\Phi'_\pm\in\widetilde{H}^1(K)}\|i\widehat{d}_\pm\Phi'_\pm+(\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})\,\tau_1\pm i\mathcal{H}\,\tau_2\|^2=$$

$$=|(\chi_\pm,\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})\,\tau_1+(\chi_\pm,\pm i\mathcal{H})\,\tau_2|^2=|\mu^{(1)}_\pm\tau_1+\mu^{(2)}_\pm\tau_2|^2$$

(отсюда, в частности, получаем, что $|\mu^{(1)}_\pm|\geqslant\sqrt{c_1}$ и $|\mu^{(2)}_\pm|\geqslant\sqrt{c_1}$). Следовательно,

$$c_1\leqslant\sqrt{c_1}\,|\mu^{(2)}_+|\leqslant\min_{t\in\mathbf{R}}|(\mu^{(1)}_++\mu^{(2)}_+t)\overline{\mu^{(2)}_+}|=|\operatorname{Im}\mu^{(1)}_+\overline{\mu^{(2)}_+}\,|\,.$$

С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} \mu_+^{(1)} & \mu_+^{(2)} \\ \mu_-^{(1)} & \mu_-^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_+^{(1)} & \mu_+^{(2)} \\ \overline{\mu_+^{(1)}} & \overline{\mu_+^{(2)}} \end{vmatrix} = 2i\,\mathrm{Im}\,\mu_+^{(1)}\overline{\mu_+^{(2)}}\,,$$

поэтому существуют (и единственны) векторы $k,\ \varkappa \in \mathbf{R}^2$, для которых выполняются равенства (4.8). Так как

$$k_1 + i\varkappa_1 = \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,\mu_+^{(1)}\overline{\mu_+^{(2)}}}\left(\mu_-^{(2)}(\chi_+,\mathcal{C}_+) - \mu_+^{(2)}(\chi_-,\mathcal{C}_-)\right), \qquad (4.10)$$

$$k_2 + i\varkappa_2 = \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,\mu_+^{(1)}\overline{\mu_+^{(2)}}}\left(-\mu_-^{(1)}(\chi_+,\mathcal{C}_+) + \mu_+^{(1)}(\chi_-,\mathcal{C}_-)\right), \qquad (4.11)$$

то

$$|k|^2 + |\varkappa|^2 \leqslant c_1^{-1}(p+F)^2\left(\|\mathcal{C}_+\|^2_{L^2(K)} + \|\mathcal{C}_-\|^2_{L^2(K)}\right) =$$

$$= 2c_1^{-1}(p+F)^2\left(\|\mathcal{C}_1\|^2_{L^2(K)} + \|\mathcal{C}_2\|^2_{L^2(K)}\right)$$

(справедлива оценка (4.6) при $c_2'' = 2c_1^{-1}(p+F)^2$). Если $\mathcal{C}_\pm \in R(\widehat{d}_\pm)$, то $(\chi_\pm,\mathcal{C}_\pm) = 0$, поэтому $k = \varkappa = 0$. Если $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — вещественнозначные функции, то $\mathcal{C}_1 = \overline{\mathcal{C}_+}$, $(\chi_-,\mathcal{C}_-) = \overline{(\chi_+,\mathcal{C}_+)}$ и из равенств (4.10) и (4.11) следует, что $\varkappa = 0$.

При выбранных векторах $k,\ \varkappa \in \mathbf{R}^2$ имеем $\mathcal{C}'_\pm \in R(\widehat{d}_\pm)$ и $\mathcal{C}'_\pm \in L^2(g;K)$, при этом

$$\|\mathcal{C}'_\pm\|_{L^2(g;K)} \leqslant \|\mathcal{C}_\pm\|_{L^2(g;K)} +$$

$$+\left(\int_{K^c} g(|x|)\,d^2x\right)^{1/2} \|(\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})(k_1+i\varkappa_1) \pm i\mathcal{H}(k_2+i\varkappa_2)\|_{L^\infty(K)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathcal{C}_\pm\|_{L^2(g;K)} + \sqrt{2}\,(p+F)\left(\int_{K^c} g(|x|)\,d^2x\right)^{1/2}\sqrt{|k|^2+|\varkappa|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{c}_1''\left(\|\mathcal{C}_1\|_{L^2(g;K)} + \|\mathcal{C}_2\|_{L^2(g;K)}\right),$$

где

$$\widetilde{c}_1'' = 1 + \frac{2}{\sqrt{c_1}}\,\frac{(p+F)^2}{g(1/\sqrt{2})}\left(\int_{K^c} g(|x|)\,d^2x\right)^{1/2}$$

(в силу (G4) $\int_{K^c} g(|x|)\,d^2x < +\infty$). Из равенств (4.7) функции $\Phi_\pm \in \widetilde{H}_0^1(K)$ определяются однозначно. При этом из лемм 3.6 и 3.7 (и теоремы 3.1) следует, что $\Phi_\pm \in \widetilde{H}_0^1(g;K) \subset \widetilde{C}_0(K)$, $\|\Phi_\pm\|_{L^\infty(K)} \leqslant c_5\,\|\mathcal{C}'_\pm\|_{L^2(g;K)}$ (где константа $c_5 = c_5\,(p,q,F;g) > 0$ определена в теореме 3.1). Из теоремы 3.2 получаем, что умножение на функции $e^{i\mu\Phi_\pm}$, $\mu \in \mathbf{C}$, не выводит за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K)$ и

$$e^{-i\mu\Phi_\pm}\,\widehat{d}_\pm(\mu(k+i\varkappa))\,e^{i\mu\Phi_\pm} = \widehat{d}_\pm + \mu\,\mathcal{C}_\pm\,.$$

Следовательно, $\Phi,\ \Psi \in \widetilde{H}_0^1(g;K) \subset \widetilde{C}_0(K)$, справедлива оценка (4.5) с константой $c_1'' = c_5\,\widetilde{c}_1''$, умножение на функции $e^{i\mu\Phi}$ и $e^{\mu\Psi}$, $\mu \in \mathbf{C}$, не выводит за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K)$ (тогда умножение на функции $e^{i\mu\Phi}$ и матричные функции $e^{\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}$ не выводит за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$) и выполняется равенство (4.4).

Если $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — вещественнозначные функции, то (как показано выше) $\varkappa = 0$, поэтому (см. (4.7)) $i\widehat{d}_\pm\Phi_\pm = \mathcal{C}_\pm - ((\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})k_1 \pm i\mathcal{H}k_2)$. С помощью комплексного сопряжения и равенства (3.3) получаем $i\widehat{d}_\pm\overline{\Phi_\mp} = \mathcal{C}_\pm - ((\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})k_1 \pm i\mathcal{H}k_2) = i\widehat{d}_\pm\Phi_\pm$, откуда $\widehat{d}_+(\mathrm{Im}\,\Phi - i\,\mathrm{Im}\,\Psi) = 0$ и, следовательно (см. лемму 3.1), Φ и Ψ — вещественнозначные функции.

Т е о р е м а 4.2. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$. *Тогда существуют (единственные) вектор* $\widetilde{\varkappa} \in \mathbf{R}^2$ *и вещественнозначные функции* $\Phi,\ \Psi \in \widetilde{H}_0^1(K) \cap \widetilde{C}(K)$ ($\Phi,\ \Psi \in \widetilde{H}_0^1(g;K)$ *для любой функции* $g \in \mathbf{G}$) *такие, что*

1) для всех $\mu \in \mathbf{R}$ *умножение на функции* $e^{\mu\Phi}$ *и матричные функции* $e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}$ *не выводит за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$,

2) для всех $k,\ \varkappa \in \mathbf{R}^2$ *и* $\mu \in \mathbf{R}$ *имеем*

$$e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}e^{\mu\Phi}\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa+i\mu\widetilde{\varkappa})e^{-\mu\Phi}e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi} = \widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa) + i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1\,, \quad (4.12)$$

3) $\max\{\|\Phi\|_{L^\infty(K)}\,,\,\|\Psi\|_{L^\infty(K)}\} \leqslant c_1^*$, $|\widetilde{\varkappa}| \leqslant c_2^*$, *где* $c_1^* = c_1^*\,(p,q,F) > 0$ *и* $c_2^* = c_2^*\,(p,q,F) > 0$.

Теорема 4.2 непосредственно вытекает из теоремы 4.1. Для всех наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$ будем через $\mathbb{T}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$ и $\widetilde{\varkappa}=\widetilde{\varkappa}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$ обозначать наборы (пары) $\{\Phi,\,\Psi\}$ функций $\Phi,\,\Psi\in\widetilde{H}^1_0(K)\cap\widetilde{C}(K)$ и векторы $\widetilde{\varkappa}\in\mathbf{R}^2$, определяемые в теореме 4.2. (Рассматриваемые функции Φ и Ψ принадлежат пространству

$$\widetilde{H}^1_0(\varepsilon;K)=\{\varphi\in\widetilde{H}^1(K)\colon\ \sup_{y\in\mathbf{R}^2}\|\,|x-y|^{-\varepsilon}\,|\mathrm{grad}\,\varphi|\,\|_{L^2(K^c+y)}<+\infty\}$$

для некоторого $\varepsilon=\varepsilon(p,q,F)\in(0,1)$ [14].)

Так как условие (4.12) эквивалентно уравнениям

$$\widehat{d}_\pm(\Phi\mp i\Psi)=-i\mathcal{H}+i((\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})\widetilde{\varkappa}_1\pm i\mathcal{H}\widetilde{\varkappa}_2)\,,$$

которые получаются друг из друга (для знаков $+$ и $-$) с помощью комплексного сопряжения, то функции Φ,Ψ и вектор $\widetilde{\varkappa}=(\widetilde{\varkappa}_1,\widetilde{\varkappa}_2)\in\mathbf{R}^2$ определяются из (одного) условия

$$i\widehat{d}_+\Phi_+=-(\mathcal{G}+i\mathcal{F})\widetilde{\varkappa}_1-i\mathcal{H}(\widetilde{\varkappa}_2+i)\,, \tag{4.13}$$

$\Phi_+=\Phi-i\Psi$.

Л е м м а 4.1. *$\widetilde{\varkappa}_1=\widetilde{\varkappa}_1(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})>0$ для всех наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\chi_+\in\operatorname{coker}\widehat{d}_+$, $\|\chi_+\|=1$, $\mu^{(1)}=\mu^{(1)}_+=(\chi_+,\mathcal{G}+i\mathcal{F})$, $\mu^{(2)}=\mu^{(2)}_+=(\chi_+,i\mathcal{H})$. Числа $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ линейно независимы над $\mathbf{R}$ (см. доказательство теоремы 4.1, где было показано, что $\operatorname{Im}\mu^{(1)}\overline{\mu^{(2)}}\neq 0$). Тогда из (4.13) получаем, что числа $\widetilde{\varkappa}_1,\widetilde{\varkappa}_2\in\mathbf{R}$ однозначно определяются из условия

$$\mu^{(1)}\widetilde{\varkappa}_1+\mu^{(2)}(\widetilde{\varkappa}_2+i)=0$$

и, следовательно, $\widetilde{\varkappa}_1\neq 0$. Векторы $\chi_+\in\operatorname{coker}\widehat{d}_+\subset L^2(K)$ (для разных наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma$) можно выбрать так, чтобы функция $(\Gamma,\rho_\infty)\ni\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\to\chi_+$ была непрерывной (см. лемму 3.5). Тогда функция $(\Gamma,\rho_\infty)\ni\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\to\mu^{(1)}/\mu^{(2)}\in\mathbf{C}$ также непрерывна и не принимает вещественных значений. Но $\operatorname{Im}\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=-\widetilde{\varkappa}_1^{-1}$ и в случае $\mathcal{G}=\mathcal{H}\equiv 1$ и $\mathcal{F}\equiv 0$ имеем $\operatorname{Im}\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=-1$, поэтому $\widetilde{\varkappa}_1>0$ для всех $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma$.

Пусть $\{\Phi,\,\Psi\}\in\mathbb{T}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$. Обозначим $\Omega=\Psi-x_2$. При $\mu\in 2\pi\mathbf{Z}$ оператор умножения на матричную функцию $e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}$ действует в $L^2(K;\mathbf{C}^2)$ (и линейное многообразие $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ инвариантно относительно действия этого оператора). При $\mu\in 2\pi\mathbf{Z}$, $k,\,\varkappa\in\mathbf{R}^2$ и $\widetilde{\varkappa}=\widetilde{\varkappa}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})\in\mathbf{R}^2$ имеем

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa+i\mu\widetilde{\varkappa})=e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}e^{-\mu\Phi}\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)e^{\mu\Phi}e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\,. \tag{4.14}$$

Справедливо равенство

$$\widehat{d}_+\Psi-\mathcal{H}=(\mathcal{G}+i\mathcal{F})\Big(-i\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\Big)+i\mathcal{H}\Big(-i\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\Big)\,. \tag{4.15}$$

Л е м м а 4.2. *$\chi_+=c_6\,(\mathcal{G}\mathcal{H})^{-1}(\widehat{d}_+\Psi-\mathcal{H})$, где функция $\Psi\in\widetilde{H}^1_0(K)\cap\widetilde{C}(K)$ определяется в теореме 4.2 и $c_6=c_6\,(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.13) следуют равенства

$$\mathcal{G}\Big(\widetilde{\varkappa}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\Big)=-\mathcal{F}\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}-\mathcal{H}\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\,,$$

$$\mathcal{G}\mathcal{H}\Big(\widetilde{\varkappa}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\Big)=(\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2)\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}+\mathcal{F}\mathcal{H}\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}$$

($\{\Phi,\,\Psi\}\in\mathbb{T}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$, $\Omega=\Psi-x_2$). Поэтому для любой функции $\varphi\in\widetilde{C}^{\,2}(K)$, используя (также) тождество

$$\Big(i\mathcal{H}\Big(-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big),\,\frac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\mathcal{G}\Big(-i\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\Big)\Big)+$$

$$+\Big(\mathcal{G}\Big(-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big),\,\frac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,i\mathcal{H}\Big(-i\,\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\Big)\Big)=0\,,$$

получаем

$$0=-\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,,\,\widetilde{\varkappa}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\Big)+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,,\,\widetilde{\varkappa}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\Big)=$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{1}{\mathcal{G}}\left(\mathcal{F}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \mathcal{H}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\left((\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \mathcal{F}\mathcal{H}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)\right) =$$

$$= \left((\mathcal{G} + i\mathcal{F})\left(-i\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) + i\mathcal{H}\left(-i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right), \frac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\left((\mathcal{G} + i\mathcal{F})\left(-i\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + i\mathcal{H}\left(-i\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)\right)\right) = (\widehat{d}_+\varphi, \frac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}(\widehat{d}_+\Psi - \mathcal{H}))\,.$$

Так как $\widehat{d}_+\Psi - \mathcal{H} \in L^2(K)\backslash\{0\}$ (действительно, $(\chi_+, \widehat{d}_+\Psi - \mathcal{H}) = i(\chi_+, i\mathcal{H}) = i\mu^{(2)} \neq 0$), то осталось воспользоваться плотностью множества $\widetilde{C}^2(K)$ в $\widetilde{H}^1(K)$ и леммой 3.2.

Л е м м а 4.3. $\chi_+(x) \neq 0$ *при п.в.* $x \in K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Пусть $M \subset K$ — измеримое множество такое, что $\operatorname{mes} M > 0$, $\chi_+(x) = 0$ при всех $x \in K$ и $\chi_+(x) \neq 0$ при п.в. $x \in K\backslash M$ (тогда также $\operatorname{mes} K\backslash M > 0$). Так как подпространство $R(\widehat{d}_+)$ замкнуто, то для любой функции $f \in L^2_M(K) \cap L^\infty(K)$ (для нее $(\chi_+, f) = 0$) найдется функция $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ такая, что $\widehat{d}_+\psi = f$. Так как $f \in L^\infty(K)$ и, следовательно, $f \in L^2(g; K)$ для любой функции $g \in \mathbf{G}$, то (в силу теоремы 3.1) $\psi \in \widetilde{C}(K)$. Для функций $\varphi \in \widetilde{C}^1(K)$

$$(\overline{\psi}\chi_+, \widehat{d}_+\varphi) = (\chi_+, \widehat{d}_+(\varphi\psi)) - (\chi_+, \varphi f) = 0\,,$$

поэтому (так как множество $\widetilde{C}^1(K)$ плотно в $\widetilde{H}^1(K)$) $\overline{\psi}\chi_+ = \overline{c}\chi_+$ для некоторой постоянной $c \in \mathbf{C}$ и, значит, $\psi(x) = c\,(=\text{const})$ при п.в. $x \in K\backslash M$. Заменяя функцию ψ на функцию $\psi - c$, получаем, что для любой функции $f \in L^2_M(K) \cap L^\infty(K)$ существует функция $\psi \in \widetilde{H}^1(K) \cap L^2_M(K)$ такая, что $\widehat{d}^M_+\psi = \widehat{d}_+\psi = f$. Так как множество $L^2_M(K) \cap L^\infty(K)$ плотно в $L^2_M(K)$ и $R(\widehat{d}^M_+)$ — (замкнутое) подпространство в $L^2_M(K)$, то $R(\widehat{d}^M_+) = L^2_M(K)$. Но последнее противоречит неравенству $\dim\operatorname{coker}\widehat{d}^M_+ \geqslant 1$ из леммы 3.4.

Следствием лемм 4.2 и 4.3 (а также равенства (4.15)) является лемма 4.4.

Л е м м а 4.4. *Пусть* $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$, $\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ *и* $\Omega = \Psi - x_2$. *Тогда*

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)^2 > 0$$

при п.в. $x \in K$.

Л е м м а 4.5. *Пусть* $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$, $\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ *и* $\Omega = \Psi - x_2$. *Тогда для всех* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{mes}\{x \in K : \Omega(x) = \lambda\} = 0\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Предположим, что существуют число $\lambda \in \mathbf{R}$ и измеримое множество $M \subset K$, для которых $\operatorname{mes} M > 0$ и $\Omega(x) = \lambda$ при всех $x \in M$. Так как $\Psi \in \widetilde{H}^1(K)$ и $\Omega = \Psi - x_2$, то из леммы 3.3 следует, что

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial x_2} = 0$$

при п.в. $x \in M$, что противоречит лемме 4.4.

В [14] приведено доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 4.3. *Пусть* $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$. *Предположим, что функция* $\varphi \in H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2) \cap C(\mathbf{R}^2)$ *удовлетворяет уравнению*

$$(\mathcal{G} + i\mathcal{F})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\mathcal{H}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0\,, \tag{4.16}$$

при этом $\varphi(x) - \varkappa_1 x_1 - (\varkappa_2 + i)x_2 = O(1)$ *при* $|x| \to \infty$, *где* $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbf{R}$ *и* $\varkappa_1 > 0$. *Тогда множество* $\{x \in \mathbf{R}^2 : \varphi(x) = 0\}$ *состоит из одной точки.*

З а м е ч а н и е 4.1. В условиях теоремы 4.3 можно не предполагать непрерывность функции φ, так как она следует из условия (4.16).

Положим $\varphi(x) = \Phi(x) - i\Psi(x) + \widetilde{\varkappa}_1 x_1 + (\widetilde{\varkappa}_2 + i)x_2 - \lambda$, $x \in \mathbf{R}^2$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, $\widetilde{\varkappa}_j = \widetilde{\varkappa}_j(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2$. Из (4.13) следует, что функция φ (для любого $\lambda \in \mathbf{C}$) удовлетворяет условиям теоремы 4.3 (при $\varkappa_1 = \widetilde{\varkappa}_1$ и $\varkappa_2 = \widetilde{\varkappa}_2$, причем $\varkappa_1 = \widetilde{\varkappa}_1 > 0$ в силу леммы 4.1). Поэтому из теоремы 4.3 непосредственно вытекает теорема 4.4.

Теорема 4.4. *Пусть* $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$, $\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, $\Omega = \Psi - x_2$, $\widetilde{\varkappa}_j = \widetilde{\varkappa}_j(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2$. *Тогда* $\mathbf{R}^2 \ni x \to \mathcal{Z}(x) = \Phi(x) + \widetilde{\varkappa}_1 x_1 + \widetilde{\varkappa}_2 x_2 - i\Omega(x) \in \mathbf{C}$ — *непрерывное биективное отображение (имеющее непрерывное обратное).*

Замечание 4.2. В условиях теоремы 4.4 для любого $n = (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$ ячейка $K + n$ решетки $\mathbf{Z}^2$ гомеоморфно отображается на множество $\mathcal{Z}(K) + \widetilde{\varkappa}_1 n_1 + (\widetilde{\varkappa}_2 + i)n_2$.

В дальнейшем при доказательстве отсутствия собственных значений в спектре периодического оператора Дирака будет использоваться лемма 4.5. В [14] для этой цели применялось следующее (более слабое) утверждение, вытекающее из теоремы 4.4: для любого числа $\theta > 0$ найдется вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{Z}^2 \backslash \{0\}$, НОД $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) = |\gamma|^{-1}\gamma \in S_1$, такой, что

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{R}} \operatorname{mes}\{x \in K : \Psi^{(\xi)}(x) - (\xi, x) = \lambda\} < \theta\, |\gamma|^{-1}$$

(не более счетного числа слагаемых в рассматриваемой сумме по λ отлично от нуля), где $\Psi^{(\xi)} = -\operatorname{Im}(\mu^* \xi_1 + \xi_2)(\Phi - i\Psi)$, $\mu^* = \overline{\mu^{(1)}}/\overline{\mu^{(2)}} = -\widetilde{\varkappa}_1^{-1}(\widetilde{\varkappa}_2 - i)$, $\widetilde{\varkappa} = \widetilde{\varkappa}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) \in \mathbf{R}^2$, $\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$. В этом утверждении в случае $\gamma = e_2 = (0, 1)$ имеем $\Psi^{(e_2)} = \Psi$. Для других векторов $\gamma \in \mathbf{Z}^2 \backslash \{0\}$ функция $\Psi^{(\xi)}(x) - (\xi, x)$, $x \in K$, заменяет функцию $\Omega = \Psi - x_2$.

5. Вспомогательные утверждения. I

Пусть $k \in \mathbf{R}^2$ и $\mu \in \mathbf{R}$. Для всех $N \in \mathbf{Z}^2$ обозначим

$$\widetilde{G}_N^{\pm}(k; \mu) = \left((k_1 + 2\pi N_1)^2 + (k_2 + 2\pi N_2 \pm \mu)^2\right)^{1/2};$$

$$G_N(k; \mu) = \min_{\pm} \widetilde{G}_N^{\pm}(k; \mu), \quad G_N^{+}(k; \mu) = \max_{\pm} \widetilde{G}_N^{\pm}(k; \mu).$$

Если $k_1 = \pi$, то $G_N(k; \mu) \geqslant \pi$. Для функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ положим

$$\|\varphi\|_* = \left(\sum_{N \in \mathbf{Z}^2} G_N^2(k; \mu)\, |\varphi_N|^2\right)^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_{*,\pm} = \left(\sum_{N \in \mathbf{Z}^2} (\widetilde{G}_N^{\pm}(k; \mu))^2\, |\varphi_N|^2\right)^{1/2}.$$

При $\mu \geqslant 4\pi$ и $2\pi \leqslant a \leqslant \mu/2$ определим (непустые конечные) множества

$$T^{\pm}(a) = \{N \in \mathbf{Z}^2 : \widetilde{G}_N^{\pm}(k; \mu) \leqslant a\}.$$

В приведенных обозначениях явно не отмечается зависимость от вектора k и числа μ, которые будут предварительно задаваться.

Для всех $k \in \mathbf{R}^2$, $\mu \in \mathbf{R}$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ (при $\mathcal{K}(x) = (\mathcal{G}(x)\mathcal{H}(x))^{-1/2}$, $x \in K$) имеем

$$\|\mathcal{K}(\widehat{d}_{\pm}(k) + i\mu\mathcal{H})\varphi\|^2 = \left\|\mathcal{K}\mathcal{G}\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi\right\|^2 +$$

$$+ \left\|\mathcal{K}\left(\pm\mathcal{F}\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \mathcal{H}\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\right)\varphi\right\|^2.$$

Поэтому справедлива следующая лемма (см. также (3.2)), обобщающая лемму 3.1.

Лемма 5.1. *Пусть* $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$. *Тогда для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2$, *всех чисел* $\mu \in \mathbf{R}$ *и всех функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ *выполняются оценки*

$$c_1 \|\varphi\|_{*,\pm}^2 = c_1 \left(\left\|\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi\right\|^2 + \left\|\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\varphi\right\|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|(\widehat{d}_{\pm}(k) + i\mu\mathcal{H})\varphi\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\left\|\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi\right\|^2 + \left\|\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\varphi\right\|^2\right) = c_2\,\|\varphi\|^2_{*,\pm}\,,$$

где постоянные $c_1 = c_1(p,q,F) > 0$ *и* $c_2 = c_2(p,q,F) \geqslant c_1$ *— те же, что и в лемме 3.1.*

Для множества $\mathcal{O} \subset \mathbf{Z}^2$ обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{O}) = \{\psi \in L^2(K) : \psi_N = 0$ при $N \in \mathbf{Z}^2\backslash\mathcal{O}\}$, $\mathcal{L}(\mathbf{Z}^2) = L^2(K)$, $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$; $\widehat{P}^{\mathcal{O}} = \widehat{P}(\mathcal{L}(\mathcal{O}))$ — ортогональный проектор в $L^2(K)$, ставящий в соответствие функциям $\varphi \in L^2(K)$ функции

$$\widehat{P}^{\mathcal{O}}\varphi = \varphi^{\mathcal{O}} = \sum_{N\in\mathcal{O}} \varphi_N e^{2\pi i\,(N,x)}$$

($\varphi^{\emptyset} = 0$); $\#\{\mathcal{O}\}$ — число векторов конечного множества $\mathcal{O} \subset \mathbf{Z}^2$. Справедлива оценка $\#\{T^{\pm}(a)\} < 6\pi a^2$.

Л е м м а 5.2. *Пусть* $W \in L^2(K)$. *Тогда для любого конечного множества* $\mathcal{O} \subset \mathbf{Z}^2$ *оператор* $W\widehat{P}^{\mathcal{O}}$ *ограничен в* $L^2(K)$ *и выполняется неравенство*

$$\|W\widehat{P}^{\mathcal{O}}\| \leqslant f_W(\#\{\mathcal{O}\})\,,$$

где функция $f_W : \mathbf{N} \to [0,+\infty)$ *не убывает и* $f_W(N) = o(\sqrt{N})$ *при* $N \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b > 0$. Определим функцию $W_b(x) = W(x)$ при $|W(x)| > b$ и $W_b(x) = 0$ в противном случае; $W_b'(x) = W(x) - W_b(x)$, $x \in K$. Для любого конечного множества $\mathcal{O} \subset \mathbf{Z}^2$ и любой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ имеем

$$\|W_b\widehat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant \left(\sum_{N\in\mathbf{Z}^2}\left|\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}(W_b)_n\varphi^{\mathcal{O}}_{N-n}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{N\in\mathbf{Z}^2}\left(\sum_{n:\,N-n\in\mathcal{O}}|(W_b)_n|^2\right)\left(\sum_{n:\,N-n\in\mathcal{O}}|\varphi_{N-n}|^2\right)\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}\left(\sum_{N:\,N-n\in\mathcal{O}} 1\right)|(W_b)_n|^2\right)^{1/2}\|\varphi\| = (\#\{\mathcal{O}\})^{1/2}\,\|W_b\|_{L^2(\mathbf{K})}\|\varphi\|$$

и

$$\|W_b'\widehat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant b\,\|\varphi^{\mathcal{O}}\| \leqslant b\,\|\varphi\|\,,$$

поэтому

$$\|W\widehat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant \|W_b'\widehat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| + \|W_b\widehat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant (b + (\#\{\mathcal{O}\})^{1/2}\,\|W_b\|_{L^2(K)})\|\varphi\|\,.$$

Положим

$$f_W(N) = \inf_{b>0}\,(b + \sqrt{N}\,\|W_b\|_{L^2(K)})\,,\ N \in \mathbf{N}\,.$$

Тогда $\|W\widehat{P}^{\mathcal{O}}\| \leqslant f_W(\#\{\mathcal{O}\})$, функция f_W не убывает и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $b(\varepsilon) > 0$, что $\|W_{b(\varepsilon)}\|_{L^2(K)} < \varepsilon$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\ \frac{f_W(N)}{\sqrt{N}} \leqslant \|W_{b(\varepsilon)}\|_{L^2(K)} < \varepsilon\,.$$

Из произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$\frac{f_W(N)}{\sqrt{N}} \to 0$$

при $N \to +\infty$.

Л е м м а 5.3. *Пусть* $W \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $C''_{\varepsilon,W} > 0$ *такое, что для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2$ *и всех функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ *выполняется неравенство*

$$\|W\varphi\| \leqslant \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\left(k_j - i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi\right\|^2\right)^{1/2} + C''_{\varepsilon,W}\|\varphi\|\,. \qquad (5.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма 5.3 непосредственно вытекает из оценок (1.4). Действительно, для любого вектора $k \in \mathbf{R}^2$ выберем вектор $N \in \mathbf{Z}^2$ так, что $2\pi N_j \leqslant k_j < 2\pi(N_j+1)$, $j = 1, 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ (и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$) с помощью (1.4) получаем

$$\|W\varphi\| = \|W e^{2\pi i\,(N,x)}\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \left(2\pi N_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi \right\|^2 \right)^{1/2} + C'_{\varepsilon,W}\|\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \left(k_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi \right\|^2 \right)^{1/2} + C''_{\varepsilon,W}\|\varphi\|,$$

где $C''_{\varepsilon,W} = 2\sqrt{2}\,\pi\varepsilon + C'_{\varepsilon,W}$.

Л е м м а 5.4. *Пусть $W \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $\mu \geqslant 4\pi$. Тогда для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$: $k_1 = \pi$ и всех функций $\varphi \in \mathcal{L}(T^{\pm}(\mu/2))$ справедлива оценка*

$$\|W\varphi\| \leqslant c_7\,\|\varphi\|_*, \tag{5.2}$$

где $c_7 = c_7(W) > 0$. Если $2\pi \leqslant a \leqslant \mu/2$, то для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$ и всех функций $\varphi \in \mathcal{L}(T^{\pm}(\mu/2)\backslash T^{\pm}(a))$

$$\|W\varphi\| \leqslant h_W(a)\|\varphi\|_*,$$

где $h_W : [2\pi, +\infty) \to [0, +\infty)$ — невозрастающая функция такая, что $h_W(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 5.3 (при $\varepsilon = 1$) следует, что для всех $\mu \in \mathbf{R}$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ выполняется неравенство

$$\|W\varphi\| \leqslant \left(\left\| \left(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \varphi \right\|^2 + \left\| \left(k_2 \pm \mu - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \varphi \right\|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ C''_{1,W}\|\varphi\| = \|\varphi\|_{*,\pm} + C''_{1,W}\|\varphi\|. \tag{5.3}$$

С другой стороны, для функций $\varphi \in \mathcal{L}(T^{\pm}(\mu/2))$, $\mu \geqslant 4\pi$, имеем $\|\varphi\|_{*,\pm} = \|\varphi\|_*$ и, кроме того, $\|\varphi\|_* \geqslant \pi\,\|\varphi\|$ в случае $k_1 = \pi$. Поэтому из (5.3) вытекает оценка (5.2), где $c_7 = c_7(W) = 1 + \pi^{-1} C''_{1,W}$. Предположим теперь, что $2\pi \leqslant a \leqslant \mu/2$ и $\varphi \in \mathcal{L}(T^{\pm}(\mu/2)\backslash T^{\pm}(a))$. Аналогично (5.3) для любого $\varepsilon > 0$ (из леммы 5.3) получаем

$$\|W\varphi\| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi\|_{*,\pm} + C''_{\varepsilon,W}\|\varphi\|.$$

Но (в рассматриваемом случае) $\|\varphi\|_{*,\pm} \geqslant a\,\|\varphi\|$ (для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$), поэтому

$$\|W\varphi\| \leqslant (\varepsilon + a^{-1}\,C''_{\varepsilon,W})\|\varphi\|_*.$$

Функция

$$h_W(t) = \inf_{\varepsilon>0}\,(\varepsilon + t^{-1}\,C''_{\varepsilon,W}),\ t \in [2\pi, +\infty),$$

не возрастает и

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ h_W(t) \leqslant \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $h_W(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Л е м м а 5.5. *Пусть $W \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $\mu \geqslant 4\pi$. Тогда для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$ и всех функций*

$$\varphi \in \widetilde{H}^1(K) \cap \mathcal{L}(\mathbf{Z}^2 \setminus \bigcup_{\pm} T^{\pm}(\mu/2))$$

выполняется неравенство

$$\|W\varphi\| \leqslant 3h_W(\mu)\,\|\varphi\|_*,$$

где функция h_W определена в лемме 5.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 5.3 при любом $\varepsilon > 0$ для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедлива оценка (5.1). Так как $\varphi \in \widetilde{H}^1(K) \cap \mathcal{L}(\mathbf{Z}^2 \setminus \bigcup_{\pm} T^{\pm}(\mu/2))$, то

$\|\varphi\| \leqslant 2\mu^{-1}\,\|\varphi\|_*$ и

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{2}\Bigl\|\Bigl(k_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigr)\varphi\Bigr\|^2\Bigr)^{1/2} \leqslant 3\,\|\varphi\|_*.$$

Поэтому из (5.1) получаем

$$\|W\varphi\| \leqslant (3\varepsilon + 2\mu^{-1}\,C''_{\varepsilon,\,W})\|\varphi\|_*$$

и, следовательно,

$$\|W\varphi\| \leqslant \inf_{\varepsilon>0}\,(3\varepsilon + 2\mu^{-1}\,C''_{\varepsilon,\,W})\|\varphi\|_* \leqslant 3h_W(\mu)\,\|\varphi\|_*.$$

Л е м м а 5.6. *Пусть $\mathcal{W} \in L^2(K)$, $\mu > 4\pi$ и $2\pi \leqslant a < a' \leqslant \mu/2$. Тогда для всех функций $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}^2\backslash T^{\pm}(a'))$ и $\psi \in \mathcal{L}(T^{\pm}(a))$ (выбираются согласованные комбинации знаков + и −) выполняется оценка*

$$|(\varphi,\mathcal{W}\psi)| \leqslant \sqrt{6\pi}\,a\Bigl(\sum_{N:\;2\pi|N|>a'-a}|\mathcal{W}_N|^2\Bigr)^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(K)}\,\|\psi\|_{L^2(K)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$|(\varphi,\mathcal{W}\psi)| \leqslant \sum_{M}|\varphi_M|\sum_{N}|\mathcal{W}_N\psi_{M-N}| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{L^2(K)}\Bigl(\sum_{M\in\mathbf{Z}^2\backslash T^{\pm}(a')}\Bigl(\sum_{N}|\mathcal{W}_N\psi_{M-N}|\Bigr)^2\Bigr)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{L^2(K)}\Bigl(\sum_{M\in\mathbf{Z}^2\backslash T^{\pm}(a')}\Bigl(\sum_{N:\;M-N\in T^{\pm}(a)}|\mathcal{W}_N|^2\Bigr)\times$$

$$\times\Bigl(\sum_{N'}|\psi_{N'}|^2\Bigr)\Bigr)^{1/2} =$$

$$= \Bigl(\sum_{N}\Bigl(\sum_{M:\;M\notin T^{\pm}(a'),\,M-N\in T^{\pm}(a)}1\Bigr)|\mathcal{W}_N|^2\Bigr)^{1/2}\times$$

$$\times\|\varphi\|_{L^2(K)}\,\|\psi\|_{L^2(K)} \leqslant$$

$$\leqslant (\#\{T^{\pm}(a)\})^{1/2}\Bigl(\sum_{N:\;2\pi|N|>a'-a}|\mathcal{W}_N|^2\Bigr)^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(K)}\,\|\psi\|_{L^2(K)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{6\pi}\,a\Bigl(\sum_{N:\;2\pi|N|>a'-a}|\mathcal{W}_N|^2\Bigr)^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(K)}\,\|\psi\|_{L^2(K)}.$$

6. Доказательство теоремы 1.4

Для произвольного множества $\mathbf{M}' \subset \mathbf{N}$ обозначим

$$\mathcal{Q}\,(\mathbf{M}') = \overline{\lim_{N\to+\infty}}\;\frac{\#\{\nu \in \mathbf{M}'\colon \nu \leqslant N\}}{N}.$$

Т е о р е м а 6.1. *Пусть $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$; $V^{(0)}, V^{(3)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$ и Ψ — вещественнозначная функция из $\widetilde{C}(K)$, для которой*

$$\operatorname{mes}\{x \in K\colon \Psi(x) - x_2 = \lambda\} = 0$$

при всех $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда существует множество $\mathbf{M} = \mathbf{M}\,(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}; V^{(0)}, V^{(3)}; \Psi) \subset \mathbf{N}$ такое, что $\mathcal{Q}\,(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M}) = 0$ и для всех $\mu \in \pi\mathbf{M}$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2\colon k_1 = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ справедлива оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k) + i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1 + e^{\,2i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}(V^{(0)}\widehat{I} + V^{(3)}\widehat{\sigma}_3))\varphi\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant c_8\sum_{N\in\mathbf{Z}^2}G_N^2(k;\mu)|\varphi_N|^2 \geqslant \pi^2 c_8\,\|\varphi\|^2,$$

где $c_8 = c_8\,(p,q,F;V^{(0)},V^{(3)}) > 0$.

В условиях теоремы 6.1 обозначим $V^{(\pm)} = V^{(0)} \pm V^{(3)}$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2),$$

$\varphi_\pm \in \widetilde{H}^1(K)$. Так как $\|\varphi_\pm\|_* \leqslant \|\varphi_\pm\|_{*,\pm}$ и

$$\widehat{\mathcal{D}}(k) + i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1 + e^{2i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}(V^{(0)}\widehat{I} + V^{(3)}\widehat{\sigma}_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2i\mu\Psi}V^{(+)} & \widehat{d}_-(k) + i\mu\mathcal{H} \\ \widehat{d}_+(k) + i\mu\mathcal{H} & e^{-2i\mu\Psi}V^{(-)} \end{pmatrix},$$

то теорема 6.1 является следствием теоремы 6.2.

Т е о р е м а 6.2. *Пусть* $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$, $V^{(\pm)} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$ *и* Ψ *— вещественнозначная функция из* $\widetilde{C}(K)$, *для которой*

$$\operatorname{mes}\{x \in K : \Psi(x) - x_2 = \lambda\} = 0$$

при любом $\lambda \in \mathbf{R}$. *Тогда существует множество* $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}; V^+, V^-; \Psi) \subset \mathbf{N}$ *такое, что* $\mathcal{Q}(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M}) = 0$ *и для всех* $\mu \in \pi\mathbf{M}$, *всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2$: $k_1 = \pi$ *и всех функций* $\varphi_\pm \in \widetilde{H}^1(K)$ *справедлива оценка*

$$\sum_\pm \|(\widehat{d}_\pm(k) + i\mu\mathcal{H})\varphi_\pm + e^{\mp 2i\mu\Psi}V^{(\mp)}\varphi_\mp\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c_1^2}{6(c_1 + 4(c_7')^2)} \sum_\pm \|\varphi_\pm\|_{*,\pm}^2,$$

где $c_1 = c_1(p, q, F) > 0$ *и* $c_7' = \max\limits_\pm c_7(V^{(\pm)}) > 0$ *(постоянные* $c_7(V^{(\pm)}) > 0$ *определяются в лемме 5.4).*

Следующая лемма (теорема Винера, см. [37, теорема XI.114] и замечание на с. 354 в [37] после нее) понадобится при доказательстве теоремы 6.2.

Л е м м а 6.1. *Пусть* $W \in L^1(K)$ *и* Ψ *— вещественнозначная функция из* $\widetilde{C}(K)$ *такая, что для всех* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{mes}\{x \in K : \Psi(x) - x_2 = \lambda\} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \left| \int_K e^{\pm 2\pi i\nu(\Psi(x) - x_2)} W\, d^2x \right|^2 = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\zeta^\pm(\nu) = \zeta^\pm(W, \Psi; \nu) = \int_K e^{\pm 2\pi i\nu(\Psi(x) - x_2)} W\, d^2x, \ \nu \in \mathbf{N}.$$

Так как $\Psi \in \widetilde{C}(K)$, то найдется число $T > 0$ такое, что $\Psi(x) - x_2 \in [-T, T]$ для всех $x \in K$. Для каждого борелевского множества $X \subset [-T, T]$ обозначим $K_X(\Psi) = \{x \in K : \Psi(x) - x_2 \in X\}$. Множество $K_X(\Psi)$ – также борелевское. Определим борелевскую комплексную (конечную) меру $m(.)$, для которой

$$m(X) = \int_{K_X(\Psi)} W\, d^2x$$

для всех борелевских множеств $X \subset [-T, T]$. Из условий леммы следует, что мера $m(.)$ не имеет атомов. Положим $E(\varepsilon) = \{(t, t') \in [-T, T]^2 : |t - t' - n| < \varepsilon$ для некоторого $n \in \mathbf{Z}\}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Для любого $N \in \mathbf{N}$ имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^N |\zeta^\pm(\nu)|^2 = \frac{1}{N}\int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(\sum_{\nu=1}^N e^{\pm 2\pi i\nu(t - t')}\right) m(dt)\, \overline{m(dt')} =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\iint_{E(\varepsilon)} + \iint_{[-T,T]^2\backslash E(\varepsilon)}\right)\left(\sum_{\nu=1}^N e^{\pm 2\pi i\nu(t - t')}\right) m(dt)\, \overline{m(dt')}.$$

При этом (так как мера $m(.)$ не имеет атомов)

$$\frac{1}{N}\iint_{E(\varepsilon)}\left(\sum_{\nu=1}^{N} e^{\pm 2\pi i\nu\,(t-t')}\right) m(dt)\,\overline{m(dt')} \to 0$$

при $\varepsilon \to +0$ равномерно по $N \in \mathbf{N}$,

$$\left|\frac{1}{N}\iint_{[-T,T]^2\setminus E(\varepsilon)}\left(\sum_{\nu=1}^{N} e^{\pm 2\pi i\nu\,(t-t')}\right) m(dt)\,\overline{m(dt')}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|\mathcal{W}\|^2_{L^1(K)}}{N\sin(\pi\varepsilon)} \to 0$$

при $N \to +\infty$ для любого (фиксированного) $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |\zeta^{\pm}(\nu)|^2 \to 0$$

при $N \to +\infty$.

С л е д с т в и е 6.1. *В условиях леммы 6.1 обозначим*

$$\mathrm{M}_{\pm}(W,\Psi;\theta) = \left\{\nu \in \mathrm{N}\colon \left|\int_K e^{\pm 2\pi i\nu\,(\Psi(x)-x_2)}\,W\,d^2x\right| \geqslant \theta\right\},\ \theta > 0\,.$$

Тогда $\mathcal{Q}\,(\mathrm{M}_{\pm}(W,\Psi;\theta)) = 0$ *(для всех* $\theta > 0$*)*.

Доказательство теоремы 6.2. Воспользуемся методом, предложенным в [14, теорема 9]. Если $V^{(+)} = V^{(-)} \equiv 0$, то теорема 6.2 является следствием леммы 5.1. Поэтому можно предполагать, что $c_7' > 0$. Пусть $f_{V(\pm)}$, $h_{V(\pm)}$ и $c_7\,(V^{(\pm)})$ — функции и числа, определенные в леммах 5.2 и 5.4. Будем считать, что $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. Число μ_0 (зависящее от $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $V^{(+)}$, $V^{(-)}$ и Ψ) будет в дальнейшем выбрано достаточно большим. Вначале предположим, что $\mu_0 \geqslant 4\pi$. Пусть $\varphi_{\pm} \in \widetilde{H}^1(K)$, $\omega_{\pm} = (\widehat{d}_{\pm}(k) + i\mu\mathcal{H})\varphi_{\pm}$, $\psi_{\mp} = \omega_{\pm} + e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}$. Для $a \in [2\pi, \mu/2]$ обозначим

$$\varphi_{\pm}^{(a)} = \widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\,,\ \widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)} = \widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\,;$$

$$\omega_{\pm}^{(a)} = (\widehat{d}_{\pm}(k) + i\mu\mathcal{H})\varphi_{\pm}^{(a)}\,,\ \widetilde{\omega}_{\pm}^{(a)} = (\widehat{d}_{\pm}(k) + i\mu\mathcal{H})\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}\,.$$

Из леммы 5.1 следуют оценки

$$c_1\,\|\varphi_{\pm}^{(a)}\|^2_{*,\pm} \leqslant \|\omega_{\pm}^{(a)}\|^2 \leqslant c_2\,\|\varphi_{\pm}^{(a)}\|^2_{*,\pm}\,,$$

$$c_1\,\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}\|^2_{*,\pm} \leqslant \|\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a)}\|^2 \leqslant c_2\,\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}\|^2_{*,\pm}$$

(постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geqslant c_1$ зависят только от p, q и F).

Выберем число $a_1 \geqslant 2\pi$, для которого

$$h^2_{V(\pm)}(a_1) \leqslant \frac{1}{36}\,\frac{c_1^2}{c_1 + 4(c_7')^2}\,. \tag{6.1}$$

Положим

$$\delta = \min\left\{\frac{c_1}{32}\,,\,\frac{1}{4}\,\frac{c_1^2}{c_1 + 4(c_7')^2}\right\}.$$

Пусть J — наименьшее натуральное число, для которого $c_2^2 \leqslant J\delta^2$. Числа $a_2,\ldots,a_{J+1}$ выберем так, что $a_{j+1} > a_j$ $(j = 1,\ldots,J)$ и для всех (четырех) функций $\mathcal{P} = \mathcal{G}^2 + \mathcal{F}^2$, $\mathcal{P} = (\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})\mathcal{H}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{H}^2$ справедливы неравенства

$$a_j\left(\sum_{N\colon 2\pi|N| > a_{j+1}-a_j} |\mathcal{P}_N|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{\delta}{4\sqrt{6\pi}} \tag{6.2}$$

(числа a_1, δ, J зависят от p, q, F, $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$, а числа $a_2,\ldots,a_{J+1}$ — от функций $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$). Будем предполагать, что $\mu_0 \geqslant 2a_{J+1}$,

$$h^2_{V(\pm)}(\mu_0) \leqslant \frac{1}{324}\,\frac{c_1^2}{c_1 + 4(c_7')^2} \tag{6.3}$$

и для всех $\mu \geqslant \mu_0$

$$\mu^{-2}\,f^2_{V(\mp)}(\#\{T^{\pm}(\mu/2)\}) \leqslant \frac{1}{144}\,\frac{c_1^2}{c_1 + 4(c_7')^2} \tag{6.4}$$

(выполнения условия (6.4) можно добиться при выборе достаточно большого числа μ_0 в силу леммы 5.2 и оценки $\#\{T^{\pm}(\mu/2)\} \leqslant \frac{9}{16\pi}\mu^2$ (которая справедлива при $\mu \geqslant 4\pi$)). В зависимости от функций $\varphi_{\pm} \in \widetilde{H}^1(K)$ выбираются номера $j_{\pm} \in \{1, \ldots, J\}$, для которых

$$\|\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})} - \varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\|_{*,\pm}^2 \leqslant \frac{1}{J}\,\|\varphi_{\pm}\|_*^2 .$$

Имеем

$$|(\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j_\pm})}, \omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})})| \leqslant |(\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}, \omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})})| + \tag{6.5}$$

$$+|((\widehat{d}_{\pm}(k) + i\mu\mathcal{H})(\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})} - \varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}), \omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})})| \leqslant$$

$$\leqslant |(\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}, \omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})})| + \left(\frac{c_2}{J}\right)^{1/2} \|\varphi_{\pm}\|_* \, \|\omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\| .$$

Так как

$$\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})} = \left((\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + i\mathcal{H}\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\right)\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})},$$

$$\omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})} = \left((\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + i\mathcal{H}\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\right)\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})},$$

то (см. лемму 5.6 и неравенства (6.2))

$$|(\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}, \omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})})| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{6\pi}\, a_{j_\pm} \left(\sum_{N:\, 2\pi|N| > a_{j_\pm+1} - a_{j_\pm}} |(\mathcal{G}^2 + \mathcal{F}^2)_N|^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\|\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}\right\| \cdot \left\|\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\right\| +$$

$$+\sqrt{6\pi}\, a_{j_\pm} \left(\sum_{N:\, 2\pi|N| > a_{j_\pm+1} - a_{j_\pm}} |((\mathcal{G} \mp i\mathcal{F})\mathcal{H})_N|^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\|\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}\right\| \cdot \left\|\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\right\| +$$

$$+\sqrt{6\pi}\, a_{j_\pm} \left(\sum_{N:\, 2\pi|N| > a_{j_\pm+1} - a_{j_\pm}} |((\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})\mathcal{H})_N|^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\|\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}\right\| \cdot \left\|\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\right\| +$$

$$+\sqrt{6\pi}\, a_{j_\pm} \left(\sum_{N:\, 2\pi|N| > a_{j_\pm+1} - a_{j_\pm}} |(\mathcal{H}^2)_N|^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\|\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}\right\| \cdot \left\|\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta\, \|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j_\pm+1})}\|_{*,\pm} \, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\|_* .$$

Поэтому из (6.5) получаем

$$|(\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j_\pm})}, \omega_{\pm}^{(a_{j_\pm})})| \leqslant 2\delta\, \|\varphi_{\pm}\|_{*,\pm} \, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j_\pm})}\|_* . \tag{6.6}$$

Справедлива оценка

$$\#\{\{N \in \mathbf{Z}^2 :\, \pi|N| < a_J\}\} \leqslant N^* = 4\pi^{-1} a_J^2 .$$

Выберем число

$$\theta = \frac{1}{3}\, 2^{-6}\, \frac{c_1}{\pi a_1^2 N^*} .$$

Из следствия 6.1 леммы 6.1 вытекает, что для всех функций $\mathcal{P}'_{\pm} = (\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})V^{(\pm)}e^{2\pi i(N,x)}$ и $\mathcal{P}'_{\pm} = \mathcal{H}V^{(\pm)}e^{2\pi i(N,x)}$, где $N \in \{N \in \mathbf{Z}^2 :\, \pi|N| < a_J\}$, имеем $\mathcal{Q}(\mathrm{M}_{\pm}(\mathcal{P}'_{\pm}, \Psi; \theta)) = 0$. Пусть M' — объединение множеств $\mathrm{M}_{\pm}(\mathcal{P}'_{\pm}, \Psi; \theta)$ для всех рассматриваемых функций $\mathcal{P}'_{\pm}$ (их не более $4N^*$), $\mathcal{Q}(\mathrm{M}') = 0$. Положим

$$\mathrm{M} = \mathrm{N} \backslash (\mathrm{M}' \cup \{\nu \in \mathrm{N} :\, \pi\nu < \mu_0\}) .$$

Тогда $\mathcal{Q}(\mathrm{N}\backslash\mathrm{M}) = 0$, для всех $\mu \in \pi\mathrm{M}$ имеем $\mu \geqslant \mu_0$ и (для каждого из знаков)

$$6\pi a_1^2 \sum_{N \in \mathbf{Z}^2 :\, \pi|N| < a_J} \left| \int_K e^{\mp 2i\mu(\Psi - x_2)} (\mathcal{G} \mp i\mathcal{F}) V^{(\mp)} e^{2\pi i(N,x)} d^2x \right| <$$

$$< 6\pi a_1^2 N^*\theta = \frac{c_1}{32}\,,$$

$$6\pi a_1^2 \sum_{N\in\mathbf{Z}^2:\ \pi|N|<a_J} \left| \int_K e^{\mp 2i\mu(\Psi - x_2)}\,\mathcal{H}\,V^{(\mp)} e^{2\pi i (N,x)}\, d^2x \right| <$$

$$< 6\pi a_1^2 N^*\theta = \frac{c_1}{32}\,.$$

Следовательно (учитывая оценку $\#\{T^{\pm}(a_1)\} \leqslant 6\pi a_1^2$),

$$|(\omega_{\pm}^{(a_{j\pm})}, e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)})| \leqslant \tag{6.7}$$

$$\leqslant \left| \left((\mathcal{G} \pm i\mathcal{F})\left(k_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}, e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)} \right) \right| +$$

$$+ \left| \left(\mathcal{H}\left(\mu \pm \left(k_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}, e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg| \sum_{N\in T^{\pm}(a_{j\pm}),\, M\in T^{\mp}(a_1)} (k_1 + 2\pi N_1)\,\overline{(\varphi_{\pm})_N}\,(\varphi_{\mp})_M \times$$

$$\times \int_K e^{\mp 2i\mu\Psi + 2\pi i (M-N,x)} (\mathcal{G} \mp i\mathcal{F}) V^{(\mp)}\, d^2x \Bigg| +$$

$$+ \Bigg| \sum_{N\in T^{\pm}(a_{j\pm}),\, M\in T^{\mp}(a_1)} (\mu \pm (k_2 + 2\pi N_2))\,\overline{(\varphi_{\pm})_N}\,(\varphi_{\mp})_M \times$$

$$\times \int_K e^{\mp 2i\mu\Psi + 2\pi i (M-N,x)}\,\mathcal{H} V^{(\mp)}\, d^2x \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant 6\pi a_1^2\, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*\, \|\varphi_{\mp}^{(a_1)}\| \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{N'\in\mathbf{Z}^2:\ \pi|N'|<a_J} \left| \int_K e^{\mp 2i\mu(\Psi - x_2)} (\mathcal{G} \mp i\mathcal{F}) V^{(\mp)} e^{2\pi i (N',x)}\, d^2x \right| +$$

$$+ \sum_{N'\in\mathbf{Z}^2:\ \pi|N'|<a_J} \left| \int_K e^{\mp 2i\mu(\Psi - x_2)}\,\mathcal{H}\,V^{(\mp)} e^{2\pi i (N',x)}\, d^2x \right| \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{16}\, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*\, \|\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|\,.$$

Обозначим $\widetilde{\psi}_{\mp} = \omega_{\pm} + e^{\mp 2i\mu\Psi} V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)}$. Принимая во внимание неравенства

$$\|\varphi_{\mp}^{(a_1)}\| \leqslant \|\varphi_{\mp}^{(a_{j\mp})}\| \leqslant \pi^{-1}\, \|\varphi_{\mp}^{(a_{j\mp})}\|_* \leqslant \|\varphi_{\mp}^{(a_{j\mp})}\|_*\,,$$

с помощью оценок (6.6) и (6.7) получаем

$$\|\widetilde{\psi}_{\mp}\|^2 = \|\omega_{\pm}^{(a_{j\pm})} + \widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j\pm})} + e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \|\omega_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2 + \|\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j\pm})} + e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|^2 -$$

$$-2\,|(\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j\pm})}, \omega_{\pm}^{(a_{j\pm})})| - 2|(\omega_{\pm}^{(a_{j\pm})}, e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)})| \geqslant$$

$$\geqslant c_1\, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*^2 + \|\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j\pm})} + e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|^2 -$$

$$-4\delta\, \|\varphi_{\pm}\|_{*,\pm}\, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_* - \frac{c_1}{8}\, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*\, \|\varphi_{\mp}^{(a_1)}\| \geqslant$$

$$\geqslant c_1\, \|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*^2 + \|\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j\pm})} + e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|^2 -$$

$$-2\delta\left(\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_{*,\pm}^2 + 2\,\|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*^2 \right) - \frac{c_1}{16}\left(\|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*^2 + \|\varphi_{\mp}^{(a_{j\mp})}\|_*^2 \right).$$

Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ имеем (см. лемму 5.4)

$$\|\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j\pm})} + e^{\mp 2i\mu\Psi}\,V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)\, \|\widetilde{\omega}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2 - (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1} \|V^{(\mp)}\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)c_1\, \|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_{*,\pm}^2 - (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}(c_7(V^{(\mp)}))^2\, \|\varphi_{\mp}^{(a_1)}\|_*^2 \geqslant$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)c_1\, \|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_{*,\pm}^2 - (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}(c_7')^2\, \|\varphi_{\mp}^{(a_{j\mp})}\|_*^2\,.$$

Поэтому

$$\sum_{\pm} \|\widetilde{\psi}_{\mp}\|^2 \geqslant \left(c_1 - (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}(c_7')^2 - 4\delta - \frac{c_1}{8}\right) \sum_{\pm} \|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|_*^2 +$$

$$+\bigl((1-\varepsilon)c_1-2\delta\bigr)\sum_{\pm}\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2_{*,\pm}\,.$$

Положим (при $c_7'>0$)

$$\varepsilon=4\,(c_7')^2(c_1+4\,(c_7')^2)^{-1}\,.$$

Так как $(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}(c_7')^2=c_1/4$, $4\delta\leqslant c_1/8$ и $2\delta\leqslant\frac12(1-\varepsilon)c_1=\frac12 c_1^2(c_1+4\,(c_7')^2)^{-1}$, то

$$\sum_{\pm}\|\widetilde{\psi}_{\mp}\|^2\geqslant\frac{c_1}{2}\sum_{\pm}\|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2_*+\frac12\,\frac{c_1^2}{c_1+4\,(c_7')^2}\sum_{\pm}\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2_{*,\pm}\qquad(6.8)$$

(последняя оценка справедлива и при $c_7'=0$).

Обозначим

$$\varphi_{\pm}'=\widehat{P}^{\mathbf{Z}^2\setminus(T^+(\mu/2)\cup T^-(\mu/2))}\varphi_{\pm}\,,\ \varphi_{\pm}''=\widehat{P}^{T^{\mp}(\mu/2)}\varphi_{\pm}\,,$$

$$\widetilde{\varphi}_{\pm}^{[a_1]}=\widehat{P}^{T^{\pm}(\mu/2)\setminus T^{\pm}(a_1)}\varphi_{\pm}\,;\ \widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_1)}=\widetilde{\varphi}_{\pm}^{[a_1]}+\varphi_{\pm}'+\varphi_{\pm}''\,.$$

Из лемм 5.2, 5.4 и 5.5 получаем

$$\|V^{(\mp)}\widetilde{\varphi}_{\mp}^{[a_1]}\|\leqslant h_{V^{(\mp)}}(a_1)\,\|\widetilde{\varphi}_{\mp}^{[a_1]}\|_*\,,$$

$$\|V^{(\mp)}\varphi_{\mp}'\|\leqslant 3h_{V^{(\mp)}}(\mu)\,\|\varphi_{\mp}'\|_*\,,$$

$$\|V^{(\mp)}\varphi_{\mp}''\|\leqslant f_{V^{(\mp)}}(\#\{T^{\pm}(\mu/2)\})\,\|\varphi_{\mp}''\|\leqslant$$
$$\leqslant 2\mu^{-1}\,f_{V^{(\mp)}}(\#\{T^{\pm}(\mu/2)\})\,\|\varphi_{\mp}''\|_{*,\mp}\,.$$

С другой стороны (так как $\psi_{\mp}=\widetilde{\psi}_{\mp}+e^{\mp2i\mu\Psi}V^{(\mp)}\widetilde{\varphi}_{\mp}^{(a_1)}$),

$$\sum_{\pm}\|\psi_{\mp}\|^2\geqslant\frac12\sum_{\pm}\|\widetilde{\psi}_{\mp}\|^2-\qquad(6.9)$$

$$-3\sum_{\pm}\|V^{(\mp)}\widetilde{\varphi}_{\mp}^{[a_1]}\|^2-3\sum_{\pm}\|V^{(\mp)}\varphi_{\mp}'\|^2-3\sum_{\pm}\|V^{(\mp)}\varphi_{\mp}''\|^2\,.$$

Поэтому из неравенств (6.8), (6.9) и условий (6.1), (6.3) и (6.4) вытекает доказываемая в теореме 6.2 оценка

$$\sum_{\pm}\|\psi_{\mp}\|^2\geqslant\frac{c_1}{4}\sum_{\pm}\|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2_*+\frac14\,\frac{c_1^2}{c_1+4\,(c_7')^2}\sum_{\pm}\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2_{*,\pm}-$$
$$-\frac{1}{12}\,\frac{c_1^2}{c_1+4\,(c_7')^2}\Bigl(\sum_{\pm}\|\widetilde{\varphi}_{\mp}^{[a_1]}\|^2_*+\sum_{\pm}\|\varphi_{\mp}'\|^2_*+\sum_{\pm}\|\varphi_{\mp}''\|^2_{*,\mp}\Bigr)\geqslant$$
$$\frac{c_1}{6}\Bigl(\sum_{\pm}\|\varphi_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2_*+\frac{c_1}{c_1+4\,(c_7')^2}\sum_{\pm}\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a_{j\pm})}\|^2_{*,\pm}\Bigr)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{c_1^2}{6(c_1+4\,(c_7')^2)}\sum_{\pm}\|\varphi_{\pm}\|^2_{*,\pm}\,.$$

Теорема 6.2 доказана.

Пусть $k\in\mathbf{R}^2$, $\xi\in S_1$, $\mu\in\mathbf{R}$, $N\in\mathbf{Z}^2$. Положим $\widetilde{G}_N^{\pm}(k,\xi;\mu)=\bigl((k_1+2\pi N_1\pm\mu\xi_1)^2+(k_2+2\pi N_2\pm\mu\xi_2)^2\bigr)^{1/2}$;

$$G_N(k,\xi;\mu)=\min_{\pm}\widetilde{G}_N^{\pm}(k,\xi;\mu)\,.$$

Если $\mu\xi_1\in2\pi\mathbf{Z}$ и $k_1=\pi$, то $G_N(k,\xi;\mu)\geqslant\pi$. Для функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ обозначим

$$\|\varphi\|_{\xi,*}=\Bigl(\sum_{N\in\mathbf{Z}^2}G_N^2(k,\xi;\mu)\,|\varphi_N|^2\Bigr)^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_{\xi,*,\pm}=\Bigl(\sum_{N\in\mathbf{Z}^2}(\widetilde{G}_N^{\pm}(k,\xi;\mu))^2\,|\varphi_N|^2\Bigr)^{1/2}.$$

При этом (при $\xi=e_2=(0,1)$) $\widetilde{G}_N^{\pm}(k,e_2;\mu)=\widetilde{G}_N^{\pm}(k;\mu)$, $G_N(k,e_2;\mu)=G_N(k;\mu)$, $\|\varphi\|_{e_2,*}=\|\varphi\|_*$, $\|\varphi\|_{e_2,*,\pm}=\|\varphi\|_{*,\pm}$, $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$. Справедлива следующая лемма (доказывемая аналогично лемме 5.1).

Л е м м а 6.2. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$. *Тогда для всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2$, $\xi\in S_1$, *всех чисел* $\mu\in\mathbf{R}$ *и всех функций* $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ *выполняются оценки*

$$c_1\,\|\varphi\|^2_{\xi,*,\pm} =$$

$$= c_1\left(\left\|\left(\pm\mu\xi_1+k_1-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi\right\|^2+\left\|\left(\mu\xi_2\pm\left(k_2-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\varphi\right\|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant \|(\widehat{d}_\pm(k)+i\mu(\xi_2\mathcal{H}+\xi_1\mathcal{F})\pm\mu\xi_1\mathcal{G})\varphi\|^2\leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\left\|\left(\pm\mu\xi_1+k_1-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi\right\|^2+\left\|\left(\mu\xi_2\pm\left(k_2-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\varphi\right\|^2\right)=$$

$$= c_2\,\|\varphi\|^2_{\xi,*,\pm}\,,$$

где постоянные $c_1=c_1(p,q,F)>0$ *и* $c_2=c_2(p,q,F)\geqslant c_1$ — *те же, что и в лемме 3.1.*

Т е о р е м а 6.3. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$. *Предположим, что* $V^{(\pm)}\in\mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$. *Тогда найдется число* $\theta_0=\theta_0(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};V^{(+)},V^{(-)})>0$ *такое, что для любых вектора* $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbf{Z}^2\backslash\{0\}$, *НОД* $(\gamma_1,\gamma_2)=1$, *и вещественнозначной функции* Ψ *из* $\widetilde{C}(K)$, *для которых*

$$\sum_{\lambda\in\mathbf{R}}\operatorname{mes}\{x\in K\colon \Psi(x)-(|\gamma|^{-1}\gamma,x)=\lambda\}<\theta_0$$

(не более счетного числа слагаемых в рассматриваемой сумме по λ *отлично от нуля), существует множество* $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};\ V^{(+)},V^{(-)};\Psi,\gamma)\subset\mathbf{N}$ *такое, что* $\mathcal{Q}(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M})<1$ *и для всех* $\mu\in2\pi|\gamma|\mathbf{M}$, *всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2: k_1=\pi$ *и всех функций* $\varphi_\pm\in\widetilde{H}^1(K)$ *справедлива оценка*

$$\sum_\pm\|(\widehat{d}_\pm(k)+i\mu|\gamma|^{-1}(\gamma_2\mathcal{H}+\gamma_1\mathcal{F})\pm\mu|\gamma|^{-1}\gamma_1\mathcal{G})\varphi_\pm+e^{\mp2i\mu\Psi}V^{(\mp)}\varphi_\mp\|^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{c_1^2}{6(c_1+4(c_7'')^2)}\sum_\pm\|\varphi_\pm\|^2_{|\gamma|^{-1}\gamma,*,\pm}\,,$$

где $c_1=c_1(p,q,F)>0$ *и* $c_7''=c_7''(V^{(+)},V^{(-)})>0$.

Теорема 6.3 обобщает теорему 6.2 и аналогична теореме 9 из [14], в которой рассматривались функции $V^{(\pm)}\in L^\beta(K)$, $\beta>2$. Доказательство теоремы 6.3 во многом следует доказательствам этих теорем (с использованием соответствующих утверждений из [14]). В дальнейшем (кроме теоремы 6.4) теорема 6.3 использоваться не будет, поэтому ее доказательство не приводится.

Т е о р е м а 6.4. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$. *Предположим, что* $V^{(0)},V^{(3)}\in\mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$. *Тогда найдется число* $\theta_0=\theta_0(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};V^{(0)},V^{(3)})>0$ *такое, что для любых вектора* $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbf{Z}^2\backslash\{0\}$, *НОД* $(\gamma_1,\gamma_2)=1$, *и вещественнозначной функции* Ψ *из* $\widetilde{C}(K)$, *для которых*

$$\sum_{\lambda\in\mathbf{R}}\operatorname{mes}\{x\in K\colon\Psi(x)-(|\gamma|^{-1}\gamma,x)=\lambda\}<\theta_0\,,$$

существует множество $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};\ V^{(0)},V^{(3)};\ \Psi,\gamma)\subset\mathbf{N}$ *такое, что* $\mathcal{Q}(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M})<1$ *и для всех* $\mu\in2\pi|\gamma|\mathbf{M}$, *всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2: k_1=\pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ *справедлива оценка*

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu|\gamma|^{-1}((\gamma_2\mathcal{H}+\gamma_1\mathcal{F})\widehat{\sigma}_1-\gamma_1\mathcal{G}\widehat{\sigma}_2)+$$

$$+e^{2i\mu\Psi\widehat{\sigma}_3}(V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3))\varphi\|^2\geqslant$$

$$\geqslant c_8'\sum_{N\in\mathbf{Z}^2}G_N^2(k,|\gamma|^{-1}\gamma;\mu)|\varphi_N|^2\geqslant\pi^2c_8'\,\|\varphi\|^2\,,$$

где $c_8'=c_8'(p,q,F;V^{(0)},V^{(3)})>0$.

Пусть в условиях теоремы 6.4 $V^{(\pm)}=V^{(0)}\pm V^{(3)}$ и

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_-\end{pmatrix}\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)\,,$$

$\varphi_\pm\in\widetilde{H}^1(K)$. Так как при всех $\xi\in S_1$ (в том числе при $\xi=|\gamma|^{-1}\gamma$, $\gamma\in\mathbf{Z}^2\backslash\{0\}$) имеем

$$\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu((\xi_2\mathcal{H}+\xi_1\mathcal{F})\widehat{\sigma}_1-\xi_1\mathcal{G}\widehat{\sigma}_2)+e^{2i\mu\Psi\widehat{\sigma}_3}(V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3)=$$

$$\begin{pmatrix} e^{2i\mu\Psi}\,V^{(+)} & \widehat{d}_-(k)+i\mu(\xi_2\mathcal{H}+\xi_1\mathcal{F})-\mu\xi_1\mathcal{G} \\ \widehat{d}_+(k)+i\mu(\xi_2\mathcal{H}+\xi_1\mathcal{F})+\mu\xi_1\mathcal{G} & e^{-2i\mu\Psi}\,V^{(-)} \end{pmatrix}$$

(и $\|\varphi_\pm\|_{\xi,*}\leqslant\|\varphi\|_{\xi,*,\pm}$), то теорема 6.4 непосредственно вытекает из теоремы 6.3.

Т е о р е м а 6.5. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$ *и* $\widetilde{\varkappa}=\widetilde{\varkappa}(p,q;F)\in\mathbf{R}^2$ *— вектор, определяемый в теореме 3.2* ($\widetilde{\varkappa}_1>0$ *в силу леммы 3.1). Предположим, что* $V^{(0)},V^{(3)}\in\mathrm{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$. *Тогда существует множество* $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};\ V^{(0)},V^{(3)})\subset\mathbf{N}$ *такое, что* $\mathcal{Q}(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M})=0$ *и для всех* $\mu\in\pi\mathbf{M}$, *всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2:\ k_1=\pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ *справедливо неравенство*

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\mu\widetilde{\varkappa})+V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3)\varphi\|\geqslant\pi\sqrt{c_8}\,e^{-c'\mu}\,\|\varphi\|,$$

где $c_8=c_8(p,q,F;V^{(0)},V^{(3)})>0$ *и* $c'=c'(p,q;F)>0$ (c_8 *— постоянная из теоремы 6.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\Phi,\Psi\}\in\mathbb{T}(p,q;F)$ (Φ и Ψ — функции, определяемые в теореме 4.2; $\Phi,\Psi\in H_0^1(K)\cap\widetilde{C}(K)$). В силу теоремы 4.2 операторы умножения на функции $e^{\mu\Phi}$ и матричные функции $e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}$ для всех $\mu\in\mathbf{R}$ не выводят за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ и для всех $k\in\mathbf{R}^2$ (и всех $\mu\in\mathbf{R}$)

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\mu\widetilde{\varkappa})+V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3=$$
$$=e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}e^{-\mu\Phi}(\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1+e^{2i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}(V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3))e^{\mu\Phi}e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}.$$

Из леммы 4.5 следует, что при всех $\lambda\in\mathbf{R}$

$$\mathrm{mes}\,\{x\in K:\ \Psi(x)-x_2=\lambda\}=0.$$

Поэтому из теоремы 6.1 вытекает существование множества $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};\ V^{(0)},V^{(3)})\subset\mathbf{N}$ такого, что $\mathcal{Q}(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M})=0$ и для всех $\mu\in\pi\mathbf{M}$, всех векторов $k\in\mathbf{R}^2:\ k_1=\pi$ и всех вектор-функций $\varphi'\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ выполняется неравенство

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1+e^{2i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}(V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3))\varphi'\|^2\geqslant\pi^2c_8\,\|\varphi'\|^2.$$

Так как $\max\{\|\Phi\|_{L^\infty(K)},\|\Psi\|_{L^\infty(K)}\}\leqslant c_1^*$, где $c_1^*=c_1^*(p,q;F)>0$ (см. теорему 4.2), то (в рассматриваемом случае) для всех вектор-функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$, обозначив $\varphi'=e^{\mu\Phi}e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}\varphi$, получаем

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\mu\widetilde{\varkappa})+V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3)\varphi\|\geqslant$$
$$\geqslant e^{-2c_1^*\mu}\,\|(\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1+e^{2i\mu\widehat{\sigma}_3\Psi}(V^{(0)}\widehat{I}+V^{(3)}\widehat{\sigma}_3))\varphi'\|\geqslant$$
$$\geqslant\pi\sqrt{c_8}\,e^{-2c_1^*\mu}\,\|\varphi'\|\geqslant\pi\sqrt{c_8}\,e^{-4c_1^*\mu}\,\|\varphi\|.$$

Осталось положить $c'=c'(p,q;F)=4c_1^*$.

Из теоремы 6.5 непосредственно вытекает теорема 1.4.

7. Вспомогательные утверждения. II

Для измеримых функций $\varphi:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{C}$ естественным образом определяется носитель $\mathrm{supp}\,\varphi=\{x\in\mathbf{R}^2:\ \mathrm{mes}\,(\{y\in\mathbf{R}^2:\ \varphi(y)\neq 0\}\cap U_R(x))>0$ для всех $R>0\}$, $\mathrm{supp}\,\varphi$ — замкнутое множество.

Пусть $\mathcal{V}(.,.)$ — полуторалинейная форма (линейная по второму аргументу) с областью определения $Q(\mathcal{V})=H^1(\mathbf{R}^2)\subset L^2(\mathbf{R}^2)$. Предположим, что существуют числа $a>0$, $b\geqslant 0$ такие, что для всех функций $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$

$$|\mathcal{V}(\varphi,\varphi)|\leqslant a\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}+b\,\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}\,. \tag{7.1}$$

Из поляризационного тождества

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi)=\frac14\,(\mathcal{V}(\psi+\varphi,\psi+\varphi)-\mathcal{V}(\psi-\varphi,\psi-\varphi)-$$
$$-i\mathcal{V}(\psi+i\varphi,\psi+i\varphi)+i\mathcal{V}(\psi-i\varphi,\psi-i\varphi))\,,\ \psi,\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)\,,$$

следует, что для всех $t>0$

$$|\mathcal{V}(\psi,\varphi)|=\left|\mathcal{V}\left(\frac1t\,\psi,t\varphi\right)\right|\leqslant\frac{1}{t^2}\left(a\,\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}+b\,\|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}\right)+$$
$$+t^2\left(a\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}+b\,\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}\right),$$

поэтому для всех функций $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ также справедлива оценка

$$|\mathcal{V}(\psi, \varphi)| \leqslant \tag{7.2}$$

$$\leqslant 2 \left(a \, \|\nabla \psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^2)} + b \, \|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(a \, \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^2)} + b \, \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} \right)^{1/2} .$$

Л е м м а 7.1. *Пусть $\mathcal{V}(\psi, \varphi)$ — полуторалинейная форма на $L^2(\mathbf{R}^2)$, $\psi, \varphi \in Q(\mathcal{V}) = H^1(\mathbf{R}^2)$. Предположим, что*

1) существуют числа $a > 0$, $b \geqslant 0$ такие, что для всех функций $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ выполняется неравенство (7.1),

2) $\mathcal{V}(e^{i(k,x)}\psi, \varphi) = \mathcal{V}(\psi, e^{-i(k,x)}\varphi)$ для всех $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ и $k \in \mathbf{R}^2$.

Тогда

а) $\mathcal{V}(f\psi, \varphi) = \mathcal{V}(\psi, \overline{f}\varphi)$ для всех функций $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$, для которых $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^2} |f(x)| < +\infty$ и $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^2} |\nabla f(x)|_{\mathbf{C}^2} < +\infty$, и всех $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$,

б) $\mathcal{V}(\psi, \varphi) = 0$ для всех функций $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$, для которых $\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любую функцию $\Omega' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, для которой $\Omega'(x) = 1$ при всех x из некоторой окрестности начала координат и $0 \leqslant \Omega'(x) \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbf{R}^2$. Пусть $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$. Обозначим $\psi_\tau(x) = \Omega'(\frac{x}{\tau})\psi(x)$, $\varphi_\tau(x) = \Omega'(\frac{x}{\tau})\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, $\tau > 0$. Тогда $\psi_\tau \to \psi$ и $\varphi_\tau \to \varphi$ в пространстве $H^1(\mathbf{R}^2)$ при $\tau \to +\infty$ и, следовательно, для любой функции $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$, для которой $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^2} |f(x)| < +\infty$ и $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^2} |\nabla f(x)|_{\mathbf{C}^2} < +\infty$, имеем $\mathcal{V}(f\psi_\tau, \varphi_\tau) \to \mathcal{V}(f\psi, \varphi)$ и $\mathcal{V}(\psi_\tau, \overline{f}\varphi_\tau) \to \mathcal{V}(\psi, \overline{f}\varphi)$ при $\tau \to +\infty$ (см. условие 1) и оценку (7.2)). Более того, если $\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, то также $\operatorname{supp} \psi_\tau \cap \operatorname{supp} \varphi_\tau = \emptyset$ для всех $\tau > 0$. Поэтому при доказательстве как свойства а), так и свойства б) (при выборе функции $f \equiv 1$ во втором случае) можно (с самого начала) без ограничения общности предполагать, что $\operatorname{supp} \psi$ и $\operatorname{supp} \varphi$ — компактные (и непустые) множества. Докажем свойство а). Из компактности множеств $\operatorname{supp} \psi$ и $\operatorname{supp} \varphi$ следует, что для любой рассматриваемой функции f и любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{J(\varepsilon)} c_j^{(\varepsilon)} \, e^{i(k_j^{(\varepsilon)}, x)} , \; x \in \mathbf{R}^2 ,$$

где $J(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $c_j^{(\varepsilon)} \in \mathbf{C}$ и $k_j^{(\varepsilon)} \in \mathbf{R}^2$, $j = 1, \dots, J(\varepsilon)$, такую, что $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ и $|\nabla f(x) - \nabla f_\varepsilon(x)|_{\mathbf{C}^2} < \varepsilon$ для всех $x \in \operatorname{supp} \psi \cup \operatorname{supp} \varphi$. Тогда $f_\varepsilon \psi \to f\psi$ и $\overline{f}_\varepsilon \varphi \to \overline{f}\varphi$ в пространстве $H^1(\mathbf{R}^2)$ при $\varepsilon \to +0$, и из условия 1) и оценки (7.2) получаем, что $\mathcal{V}(f_\varepsilon \psi, \varphi) \to \mathcal{V}(f\psi, \varphi)$ и $\mathcal{V}(\psi, \overline{f}_\varepsilon \varphi) \to \mathcal{V}(\psi, \overline{f}\varphi)$ при $\varepsilon \to +0$. Но из условия 2) для всех $\varepsilon > 0$ следует равенство $\mathcal{V}(f_\varepsilon \psi, \varphi) = \mathcal{V}(\psi, \overline{f}_\varepsilon \varphi)$, поэтому $\mathcal{V}(f\psi, \varphi) = \mathcal{V}(\psi, \overline{f}\varphi)$. Докажем теперь свойство б). Так как $\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$ и множества $\operatorname{supp} \psi$ и $\operatorname{supp} \varphi$ можно считать компактными, то найдется функция $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ такая, что $f(x) = 1$ при всех $x \in \operatorname{supp} \psi$ и $f(x) = 0$ при всех $x \in \operatorname{supp} \varphi$. Тогда из свойства а) получаем $\mathcal{V}(\psi, \varphi) = \mathcal{V}(f\psi, \varphi) = \mathcal{V}(\psi, \overline{f}\varphi) = 0$.

В следующем примере (для любой решетки периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) приведена форма $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_0(\Lambda)$ (множество $\mathbb{V}_0(\Lambda)$ определено в п. 2), не имеющая вида

$$\mathcal{V}(\psi, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^2} \overline{\psi} \varphi \, d\mu$$

(для функций $\psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$), где μ — комплексная периодическая (с решеткой периодов Λ) борелевская мера (с локально конечной полной вариацией).

П р и м е р 7.1. Для $y \in \mathbf{R}^2$ и $\tau > 0$ обозначим $K_\tau(y) = \{x \in \mathbf{R}^2 : -\tau < x_j - y_j < \tau, \; j = 1, 2\}$, $K_\tau^+(y) = K_\tau(y) \cap \{x \in \mathbf{R}^2 :$

$x_1 \geqslant y_1\}$, $K_\tau^-(y) = K_\tau(y) \setminus K_\tau^+(y)$. Определим знакопеременную меру (заряд) μ_τ^y на борелевских множествах $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^2$: $\mu_\tau^y(\mathcal{O}) = \operatorname{mes}(\mathcal{O} \cap K_\tau^+(y)) - \operatorname{mes}(\mathcal{O} \cap K_\tau^-(y))$, где mes — мера Лебега в $\mathbf{R}^2$ (мера μ_τ^y распространяется также на измеримые по Лебегу множества). Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ имеем

$$\left| \int_{K_\tau(y)} |\varphi|^2 d\mu_\tau^y \right| =$$

$$= \left| \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\tau}^{0} (|\varphi(y_1+x_1+\tau,\, y_2+x_2)|^2 - |\varphi(y_1+x_1\,,\, y_2+x_2)|^2)\, dx_2 dx_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\tau}^{0} \int_{0}^{\tau} |\varphi(y_1+x_1+\xi_1\,,\, y_2+x_2)| \times$$

$$\times \left| \frac{\partial \varphi(y_1+x_1+\xi_1\,,\, y_2+x_2)}{\partial \xi_1} \right| dx_2 dx_1 d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\tau}^{0} \int_{-x_1-\tau}^{-x_1+\tau} |\varphi(y_1+x_1+\xi_1\,,\, y_2+x_2)| \times$$

$$\times \left| \frac{\partial \varphi(y_1+x_1+\xi_1\,,\, y_2+x_2)}{\partial x_1} \right| dx_2 dx_1 d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \tau\varepsilon \int_{K_\tau(y)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 d^2x + \frac{\tau}{\varepsilon} \int_{K_\tau(y)} |\varphi|^2 d^2x\,.$$

Так как функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ плотны в пространстве $H^1(\mathbf{R}^2)$, то для всех $\varepsilon > 0$ и всех функций $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ справедлива такая же оценка

$$\left| \int_{K_\tau(y)} |\varphi|^2 d\mu_\tau^y \right| \leqslant \tau\varepsilon \int_{K_\tau(y)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 d^2x + \frac{\tau}{\varepsilon} \int_{K_\tau(y)} |\varphi|^2 d^2x\,. \tag{7.3}$$

Выберем число $\tau > 0$ так, чтобы (открытые) квадраты $K_\tau(\gamma)$ для разных $\gamma \in \Lambda$ не пересекались. Теперь, исключая из квадрата $K_\tau(0)$ средние линии, получим четыре меньших квадрата. В одном из них снова выбрасывая средние линии, получим новые четыре квадрата. Продолжим эту процедуру (выбрасывая в

одном из меньших квадратов средние линии) до бесконечности. Пусть $\{K_{\tau_j}(y^{(j)})\}_{j \in \mathbf{N}}$ — получившееся множество квадратов, перенумерованных по убыванию размеров (т.е. $\tau_{j+1} \leqslant \tau_j$ при всех $j \in \mathbf{N}$), при этом $\sum\limits_j \tau_j^2 = \tau^2$ ($y^{(j)}$ — центры рассматриваемых квадратов). Выберем натуральные числа n_j, $j \in \mathbf{N}$, так, что $\sum\limits_j n_j \tau_j = +\infty$. Каждый квадрат $K_{\tau_j}(y^{(j)})$, $j \in \mathbf{N}$, разделим на n_j^2 квадратов $K_{\tau_j/n_j}(y^{(j,l)})$, $l = 1, \ldots, n_j^2$, прямыми, параллельными осям координат. Определим полуторалинейную форму

$$\mathcal{V}'(\psi,\varphi) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{n_j}{\tau_j} \sum_{l=1}^{n_j^2} \int_{K_{\tau_j/n_j}(y^{(j,l)})} \overline{\psi}\varphi\, d\mu_{\tau_j/n_j}^{y^{(j,l)}}\,,\ \psi,\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)\,. \tag{7.4}$$

Из (7.3) для всех $\varepsilon > 0$ и всех функций $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ следует оценка

$$|\mathcal{V}'(\psi,\varphi)| \leqslant \tag{7.5}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\varepsilon \left(\int_{K_{\tau_j/n_j}(y^{(j,l)})} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 d^2x \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{K_{\tau_j/n_j}(y^{(j,l)})} |\varphi|^2\, d^2x \right) \right) =$$

$$= \varepsilon \int_{K_\tau(0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 d^2x + \frac{1}{\varepsilon} \int_{K_\tau(0)} |\varphi|^2\, d^2x$$

(поэтому, в частности, ряд по j в (7.4) сходится для всех функций $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ и форма $\mathcal{V}$ действительно имеет область определения $Q(\mathcal{V}) = H^1(\mathbf{R}^2)$). Положим

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi) = \sum_{\gamma \in \Lambda} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{n_j}{\tau_j} \sum_{l=1}^{n_j^2} \int_{K_{\tau_j/n_j}(y^{(j,l)}+\gamma)} \overline{\psi}\varphi\, d\mu_{\tau_j/n_j}^{y^{(j,l)}+\gamma}\,,$$

$\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$. Из (7.5) следует, что $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_0(\Lambda)$ (свойства (V1) и (V2) очевидным образом выполняются). Но сумма полных вариаций мер $\mu_{\tau_j/n_j}^{y^{(j,l)}}$ (на квадратах $K_{\tau_j/n_j}(y^{(j,l)})$), $j \in \mathbf{N}$,

$l = 1,\dots,n_j$, равна $\sum\limits_j n_j\tau_j = +\infty$. Поэтому не существует (комплексной) периодической (с решеткой периодов Λ) борелевской меры μ (с локально конечной полной вариацией) такой, что

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi) = \int_{\mathbf{R}^2} \overline{\psi}\varphi\, d\mu$$

для функций $\psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$.

8. Терема 8.1 и ее доказательство

Пусть $\mathbf{R}^2 \ni x \to \widehat{G}(x) = (G_{jl}(x))_{j,l=1,2} \in \mathcal{M}_2$ — вещественная симметрическая положительно определенная (периодическая с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2$) матричная функция, $\widehat{G}, \widehat{G}^{-1} \in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$, $\det\widehat{G} \in \widetilde{H}^1(K)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\det\widehat{G} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2),\ j = 1,2\,.$$

Определим функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ из условий $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$ и

$$G_{11} = \mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2\,,\ G_{22} = \mathcal{H}^2\,,\ G_{12} = G_{21} = \mathcal{F}\mathcal{H}\,. \tag{8.1}$$

Тогда $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$ для некоторых чисел p, q и F; $\mathcal{G}\mathcal{H} = \sqrt{\det\widehat{G}}$ и, следовательно, также

$$\mathcal{G}\mathcal{H} \in \widetilde{H}^1(K)\,,\ \frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_j} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)\,,\ j = 1,2\,.$$

Вектор $\widetilde{\varkappa} = \widetilde{\varkappa}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}) \in \mathbf{R}^2$ и вещественнозначные функции $\Phi, \Psi \in \widetilde{H}_0^1(K)$ будем далее выбирать (по функциям $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$) в соответствии с теоремой 4.2 ($\{\Phi,\Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$), $\Omega = \Psi - x_2$.

Константы в этом разделе будут (частично) обозначаться независимо от других разделов.

Т е о р е м а 8.1. *Пусть $\widehat{G} = (G_{jl})_{j,l=1,2} \in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$ — вещественная симметрическая положительно определенная*

(периодическая с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2$) матричная функция, $\widehat{G}^{-1} \in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$, $\det\widehat{G} \in \widetilde{H}^1(K)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\det\widehat{G} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)\,,\ j = 1,2\,,$$

$A_j \in L^2(g;K) \subset \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$ для некоторой функции $g \in \mathbf{G}$, $j = 1,2$; $b \geqslant 0$. Тогда найдутся числа $C = C(\widehat{G}) > 0$, $c' = c'(\widehat{G},g) > 0$, $a = a(\widehat{G},A) \in (0, a_-(\widehat{G}))$, $\mu_0 = \mu_0(\widehat{G},A;b) > 0$ и векторы $k^0 = k^0(\widehat{G},A) \in \mathbf{R}^2$ и $\varkappa^0 = \varkappa^0(\widehat{G},A) \in \mathbf{R}^2$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$: $k_1 + k_1^0 = \pi$, всех чисел $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$, $\mu \geqslant \mu_0$ и каждой вектор-функции

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_-\end{pmatrix} \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)\,,$$

для которой $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ (т.е. $\varphi = \widehat{\sigma}_1\varphi$), можно найти такую ненулевую вектор-функцию

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)\,,$$

что для всех полуторалинейных форм $\mathcal{V} \in \mathbb{V}^*_{a,b}(\mathbf{Z}^2)$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{s=1}^{2}\bigl(\widetilde{\mathcal{W}}(A;k - i\varkappa^0 + i\mu\widetilde{\varkappa};\psi_s,\varphi_1) + \widetilde{\mathcal{V}}(\psi_s,\varphi_1)\bigr)\right| \geqslant \tag{8.2}$$

$$\geqslant C e^{-c'\sum\limits_{j=1}^{2}\|A_j\|_{L^2(g;K)}}\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k+k^0)e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}e^{-\mu\Phi}\psi\|\times$$

$$\times\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k+k^0)e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}e^{\mu\Phi}\varphi\|\,,$$

где $\widetilde{\varkappa} = \widetilde{\varkappa}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}) \in \mathbf{R}^2$, $\{\Phi,\Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$, $\Omega = \Psi - x_2$ (и функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ определяются в (8.1)).

Теорема 2.3 следует из теоремы 8.1, если принять во внимание оценку (1.7).

Следующие леммы понадобятся при доказательстве теоремы 8.1.

Л е м м а 8.1. *Пусть* $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_{a,b}(\mathbf{Z}^2)$, *где* $a > 0$, $b \geqslant 0$; $\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{T}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, $\Omega = \Psi - x_2$. *Тогда для всех* $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$ *и всех* $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\widetilde{\mathcal{V}}(e^{\mu(\Phi \pm i\Omega)}\psi, \varphi) = \widetilde{\mathcal{V}}(\psi, e^{\mu(\Phi \mp i\Omega)}\varphi)\,. \tag{8.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что $\psi, \varphi \in \widetilde{C}^1(K)$. Так как $\Phi, \Psi \in \widetilde{H}^1_0(g; K) \subset \widetilde{C}_0(K)$ для любой функции $g \in \mathbf{G}$ (более того, $\Phi, \Psi \in \widetilde{H}^1_0(\varepsilon; K)$ для некоторого $\varepsilon = \varepsilon(p, q, F) \in (0, 1)$ [14]), то существуют функции $\Phi_\nu, \Psi_\nu \in \widetilde{C}^\infty_0(K)$, $\nu \in \mathbf{N}$, сходящиеся при $\nu \to +\infty$ в пространствах $\widetilde{H}^1(K)$ и $L^\infty(K)$ к функциям Φ и Ψ соответственно (см. доказательство леммы 3.7). Тогда из (3.18) следует, что (для всех $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$)

$$e^{\mu(\Phi_\nu \pm i(\Psi_\nu - x_2))}\psi \to e^{\mu(\Phi \pm i\Omega)}\psi\,,\ e^{\mu(\Phi_\nu \mp i(\Psi_\nu - x_2))}\varphi \to e^{\mu(\Phi \mp i\Omega)}\varphi$$

при $\nu \to +\infty$ в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$. Поэтому (см. оценку (2.8))

$$\widetilde{\mathcal{V}}(e^{\mu(\Phi_\nu \pm i(\Psi_\nu - x_2))}\psi, \varphi) \to \widetilde{\mathcal{V}}(e^{\mu(\Phi \pm i\Omega)}\psi, \varphi)\,, \tag{8.4}$$

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\psi, e^{\mu(\Phi_\nu \mp i(\Psi_\nu - x_2))}\varphi) \to \widetilde{\mathcal{V}}(\psi, e^{\mu(\Phi \mp i\Omega)}\varphi) \tag{8.5}$$

при $\nu \to +\infty$. С другой стороны, из (2.9) для всех $\nu \in \mathbf{N}$ имеем

$$\widetilde{\mathcal{V}}(e^{\mu(\Phi_\nu \pm i(\Psi_\nu - x_2))}\psi, \varphi) = \widetilde{\mathcal{V}}(\psi, e^{\mu(\Phi_\nu \mp i(\Psi_\nu - x_2))}\varphi)\,,$$

что вместе с (8.4) и (8.5) приводит к равенству (8.3) для функций $\psi, \varphi \in \widetilde{C}^1(K)$. Обозначим через $\widehat{\Theta}$ оператор умножения на одну (любую) из четырех функций $\Theta = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}$ или $\Theta = \frac{\partial\Psi}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$. Из теоремы 3.2 следует, что $\widehat{\Theta}$ — линейный оператор из $\widetilde{H}^1(K)$ в $L^2(K)$. Пусть $\chi_\nu \in \widetilde{H}^1(K)$, $\nu \in \mathbf{N}$, и $\chi_\nu \to \chi$ в $\widetilde{H}^1(K)$, $\widehat{\Theta}\chi_\nu \to \varphi'$ в $L^2(K)$ при $\nu \to +\infty$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\chi_\nu(x) \to \chi(x)$ и $(\widehat{\Theta}\chi_\nu)(x) \to \varphi'(x)$ при $\nu \to +\infty$ для п.в. $x \in K$. Но тогда также $(\widehat{\Theta}\chi_\nu)(x) = \Theta(x)\chi_\nu(x) \to \Theta(x)\chi(x) = (\widehat{\Theta}\chi)(x)$ при $\nu \to +\infty$ для п.в. $x \in K$ и, значит, $\varphi' = \widehat{\Theta}\chi$. Поэтому из теоремы о замкнутом графике следует, что оператор $\widehat{\Theta}$ непрерывен. Пусть теперь $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$, $\psi_\nu, \varphi_\nu \in \widetilde{C}^1(K)$, $\nu \in \mathbf{N}$, и $\psi_\nu \to \psi$, $\varphi_\nu \to \varphi$ при $\nu \to +\infty$ в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$. Используя равенство (8.3), уже доказанное для функций ψ_ν и φ_ν, равенство (3.18) и непрерывность оператора $\widehat{\Theta}$ (для всех (четырех) функций $\Theta = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}$ и $\Theta = \frac{\partial\Psi}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$) получаем, что

$$e^{\mu(\Psi \pm i\Omega)}\psi_\nu \to e^{\mu(\Psi \pm i\Omega)}\psi\,,\ e^{\mu(\Psi \mp i\Omega)}\varphi_\nu \to e^{\mu(\Psi \mp i\Omega)}\varphi$$

при $\nu \to +\infty$ в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$. Тогда также (см. (2.8))

$$\widetilde{\mathcal{V}}(e^{\mu(\Psi \pm i\Omega)}\psi_\nu, \varphi_\nu) \to \widetilde{\mathcal{V}}(e^{\mu(\Psi \pm i\Omega)}\psi, \varphi)\,,$$

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\psi_\nu, e^{\mu(\Psi \mp i\Omega)}\varphi_\nu) \to \widetilde{\mathcal{V}}(\psi, e^{\mu(\Psi \mp i\Omega)}\varphi)$$

при $\nu \to +\infty$. Следовательно, равенство (8.3) справедливо для всех функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$.

Л е м м а 8.2. *Пусть* $\mathcal{Q} \in L^2(K)$ *и существуют числа* $a > 0$, $b \geqslant 0$ *такие, что для любой фунции* $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ *имеем* $\mathcal{Q}\psi \in L^2(K)$ *и справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{Q}\psi\|_{L^2(K)} \leqslant a\,\|\nabla\psi\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} + b\,\|\psi\|_{L^2(K)}\,. \tag{8.6}$$

Пусть $\Omega_1(.)$ *— функция («шапочка»), введенная при доказательстве леммы 3.7,* $\Omega_\delta(x) = \delta^{-2}\Omega_1(\delta^{-1}x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, $\delta > 0$. *Тогда для любой функции* $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\|(\mathcal{Q} - \mathcal{Q} * \Omega_\delta)\psi\|_{L^2(K)} \to 0 \tag{8.7}$$

при $\delta \to +0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как неравенствам (8.6) (для всех $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$) вместе с функцией $\mathcal{Q}$ удовлетворяют и все функции $\mathcal{Q}(.-y)$ (функция $\mathcal{Q}$ предполагается периодически продолженной на все пространство $\mathbf{R}^2$), $y \in \mathbf{R}^2$, то для всех $\delta > 0$ (и всех функций $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$) также справедливо неравенство

$$\|(\mathcal{Q} * \Omega_\delta)\psi\|_{L^2(K)} \leqslant a\,\|\nabla\psi\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} + b\,\|\psi\|_{L^2(K)}\,. \tag{8.8}$$

Если $\psi \in \widetilde{C}^1(K)$, то

$$\|(\mathcal{Q} - \mathcal{Q} * \Omega_\delta)\psi\|_{L^2(K)} \leqslant \|\mathcal{Q} - \mathcal{Q} * \Omega_\delta\|_{L^2(K)}\|\psi\|_{L^\infty(K)} \to 0$$

при $\delta \to +0$. Пусть $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$, $\psi_\nu \in \widetilde{C}^1(K)$, $\nu \in \mathbf{N}$, и $\psi_\nu \to \psi$ при $\nu \to +\infty$ в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$. Так как $\|(\mathcal{Q} - \mathcal{Q} * \Omega_\delta)\psi_\nu\|_{L^2(K)} \to 0$ при $\delta \to +0$ для всех $\nu \in \mathbf{N}$ и $\|(\mathcal{Q} - \mathcal{Q} * \Omega_\delta)(\psi - \psi_\nu)\|_{L^2(K)} \to 0$ при $\nu \to +\infty$ равномерно по всем $\delta > 0$ (см. (8.6) и (8.8)), то (8.7) справедливо и для всех функций $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$.

Л е м м а 8.3. *Для любого $\beta > 2$ найдется константа $\widetilde{c}(\beta) > 0$ такая, что для всех функций $W \in L^\beta(K)$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ и всех функций $\chi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедливо неравенство*

$$\|W\chi\| \leqslant \widetilde{c}(\beta)\,\|W\|_{L^\beta(K)}\,\|(k - i\nabla)\chi\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)}\,.$$

Лемма 8.3 достаточно хорошо известна [18].

Доказательство теоремы 8.1. Для вектор-функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ и чисел $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$ будем обозначать

$$\psi'_\mu = e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}e^{-\mu\Phi}\psi\,,\ \varphi'_\mu = e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}e^{\mu\Phi}\varphi\,.$$

Пусть $\widehat{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}_0\widehat{I} + \mathcal{Q}_3\widehat{\sigma}_3$, где $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$, $\widehat{I} \in \mathcal{M}_2$ — единичная матрица. Определим полуторалинейные формы

$$\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi) = (\widehat{\mathcal{Q}}^*\psi, -i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) - (-i\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,, \widehat{\mathcal{Q}}\varphi)\,,\ j = 1,2\,,$$

$\psi, \varphi \in Q(\mathcal{R}_j) = \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2) \subset L^2(K;\mathbf{C}^2)$, $\widehat{\mathcal{Q}}^* = \overline{\mathcal{Q}}_0\widehat{I} + \overline{\mathcal{Q}}_3\widehat{\sigma}_3$. Если $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2) \cap \widetilde{H}^1(K)$ и $\frac{\partial \mathcal{Q}_l}{\partial x_j} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $j = 1,2$, $l = 0,3$, то

$$\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi) = i\,(\psi,\,\frac{\partial\widehat{\mathcal{Q}}}{\partial x_j}\,\varphi) \tag{8.9}$$

(равенство (8.9) (очевидным образом) выполняется для функций $\mathcal{Q}_l \in \widetilde{C}^1(K)$, $l = 0,3$, и для его доказательства в общем случае достаточно воспользоваться леммой 8.2). Если $\mathcal{Q}_l \in \widetilde{C}^1(K)$, $l = 0,3$, и $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$, то (для всех $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$)

$$\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi) = i\,(\psi,\,\frac{\partial\widehat{\mathcal{Q}}}{\partial x_j}\,\varphi) = i\,(\psi,\,\frac{\partial\widehat{\mathcal{Q}}}{\partial x_j}\,e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\widehat{\sigma}_1e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\varphi) =$$

$$= i\,(e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}e^{-\mu\Phi}\,\psi,\,\frac{\partial\widehat{\mathcal{Q}}}{\partial x_j}\,\widehat{\sigma}_1e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}e^{\mu\Phi}\varphi) =$$

$$= i\,(\psi'_\mu,\,\frac{\partial\widehat{\mathcal{Q}}}{\partial x_j}\,\widehat{\sigma}_1\varphi'_\mu) = \mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi'_\mu,\widehat{\sigma}_1\varphi'_\mu)\,,$$

поэтому также из леммы 8.2 следует, что при $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$, в случае $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ (для всех $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$) выполняется равенство

$$\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi) = \mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi'_\mu,\widehat{\sigma}_1\varphi'_\mu)\,,\ j = 1,2\,. \tag{8.10}$$

Л е м м а 8.4. *Пусть $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\widehat{\mathcal{Q}}) > 0$ такая, что для всех векторов $k' \in \mathbf{R}^2 : k'_1 = \pi$ и всех вектор-функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ справедливы неравенства*

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi)| \leqslant \varepsilon\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\| + C_\varepsilon\,\|\psi\|\cdot\|\varphi\|\,,\ j = 1,2\,. \tag{8.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C'_\varepsilon = C'_\varepsilon(\widehat{\mathcal{Q}}) > 0$

такая, что для всех векторов $k' \in \mathbf{R}^2$ и всех вектор-функций $\chi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ имеем

$$\|\widehat{\mathcal{Q}}\chi\| \leqslant \varepsilon\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\chi\| + C'_\varepsilon\,\|\chi\|\,. \tag{8.12}$$

Пусть $\mathcal{U}_R = \mathcal{U}_R\,(k') = \{N \in \mathbf{Z}^2:\ |k' + 2\pi N| \leqslant R\}$, $R \geqslant 2\pi$; $\#\mathcal{U}_R < 6\pi R^2$ (см. оценку для множеств $T^{\pm}(a)$ в п. 5). Обозначим $\widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)} = (\mathcal{Q}_0 * \Omega_\delta)\,\widehat{I} + (\mathcal{Q}_3 * \Omega_\delta)\,\widehat{\sigma}_3$, $\delta > 0$ (где Ω_δ — «шапочка»),

$$\psi^{\mathcal{U}_R} = \sum_{N\in\mathcal{U}_R} \psi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}\,,\ \varphi^{\mathcal{U}_R} = \sum_{N\in\mathcal{U}_R} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$. Фиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{24}$. Число $R = R\,(\widehat{\mathcal{Q}},\varepsilon) \geqslant 2\pi$ выберем так, что $R > \varepsilon_1^{-1}C'_{\varepsilon_1}$. Справедливы равенства

$$\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi) = \mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi,\varphi) + \mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi,\varphi^{\mathcal{U}_R}) + \tag{8.13}$$

$$+\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi^{\mathcal{U}_R},\varphi-\varphi^{\mathcal{U}_R}) + \mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi-\psi^{\mathcal{U}_R},\varphi-\varphi^{\mathcal{U}_R})\,.$$

Оценим слагаемые в правой части (8.13). Так как $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\psi - \psi^{\mathcal{U}_R})\| \geqslant R\,\|\psi - \psi^{\mathcal{U}_R}\|$, $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R})\| \geqslant R\,\|\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R}\|$, то из определения полуторалинейной формы $\mathcal{R}_j$ и оценки (8.12) (см. также доказательство леммы 8.2) для всех $\delta > 0$ следует неравенство

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi-\psi^{\mathcal{U}_R},\varphi-\varphi^{\mathcal{U}_R})| \leqslant \tag{8.14}$$

$$\leqslant 2\,(\varepsilon_1\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\psi - \psi^{\mathcal{U}_R})\| + C'_{\varepsilon_1}\,\|\psi - \psi^{\mathcal{U}_R}\|)\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R})\| +$$

$$+2\,(\varepsilon_1\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R})\| + C'_{\varepsilon_1}\,\|\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R}\|)\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\psi - \psi^{\mathcal{U}_R})\| \leqslant$$

$$\leqslant 4\,(\varepsilon_1 + R^{-1}C'_{\varepsilon_1})\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\psi - \psi^{\mathcal{U}_R})\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R})\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\|\,.$$

Для второго слагаемого в правой части равенства (8.13) имеем

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi,\varphi^{\mathcal{U}_R})| \leqslant \tag{8.15}$$

$$\leqslant |(\psi, (\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)})(k'_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j})\varphi^{\mathcal{U}_R})| + |((k'_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j})\psi, (\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)})\varphi^{\mathcal{U}_R})| \leqslant$$

$$\leqslant \|\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)}\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)}\,\Big(\|\psi\|\cdot\|(k'_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j})\varphi^{\mathcal{U}_R}\|_{L^\infty(K;\mathbf{C}^2)} +$$

$$+\|(k'_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j})\psi\|\cdot\|\varphi^{\mathcal{U}_R}\|_{L^\infty(K;\mathbf{C}^2)}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{6\pi}\,R\,\|\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)}\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)}\,(\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\| + R\,\|\psi\|\cdot\|\varphi\|)\,.$$

Так как $\|\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)}\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} \to 0$ при $\delta \to +0$, то можно выбрать число $\delta = \delta(\widehat{\mathcal{Q}}, R(\varepsilon)) > 0$ так, что

$$\sqrt{6\pi}\,R\,\|\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)}\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Для третьего слагаемого в правой части равенства (8.13) (принимая во внимание, что $\|\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R}\| \leqslant \|\varphi\|$, $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')(\varphi - \varphi^{\mathcal{U}_R})\| \leqslant \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\|$ и $\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi',\varphi') = -\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}}^* - \widehat{\mathcal{Q}}^*_{(\delta)};\varphi',\psi')$ для всех $\psi', \varphi' \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$) получаем (при выборе числа $\delta = \delta(\widehat{\mathcal{Q}}, R(\varepsilon))$) такую же оценку (как и (8.15))

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi^{\mathcal{U}_R},\varphi-\varphi^{\mathcal{U}_R})| \leqslant \tag{8.16}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,(\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\| + \sqrt{6\pi}\,R^2\,\|\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)}\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)}\,\|\psi\|\cdot\|\varphi\|\,.$$

Наконец (см. (8.9)),

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)};\psi,\varphi)| = |(\psi, \frac{\partial\widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)}}{\partial x_j}\,\varphi)| \leqslant \max_{j=1,2}\,\max_{x\in K}\,\left\|\frac{\partial\widehat{\mathcal{Q}}_{(\delta)}}{\partial x_j}\right\|_{\mathbf{C}^2}\|\psi\|\cdot\|\varphi\|\,. \tag{8.17}$$

Оценки (8.11) теперь следуют из (8.13) — (8.17), при этом константа $C_\varepsilon > 0$ зависит только от ε и функции $\widehat{\mathcal{Q}}$.

Л е м м а 8.5. *Пусть $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\widehat{\mathcal{Q}}) > 0$ такая, что для всех векторов $k' \in \mathbf{R}^2:\ k'_1 = \pi$, всех чисел $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$ и* *всех вектор-функций* $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2) : \widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ *справедливы неравенства*

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}}; \psi, \varphi)| \leqslant \varepsilon \,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\| + C_\varepsilon \,\|\psi'_\mu\| \cdot \|\varphi'_\mu\| \,,\ j = 1, 2\,.$$

Лемма 8.5 непосредственно вытекает из леммы 8.4 и равенств (8.10).

Обозначим

$$\widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa) = \widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa) - (\mathcal{G}\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{F}\widehat{\sigma}_2)A_1 - \mathcal{H}\widehat{\sigma}_2 A_2$$

(оператор $\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa)$ определен в разделе 1). Для всех $k,\ \varkappa \in \mathbf{R}^2$ и $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ имеем

$$\sum_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{W}}(A; k + i\varkappa; \psi_s, \varphi_s) = (\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k - i\varkappa)\psi, \widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa)\varphi) - \tag{8.18}$$

$$-((k_1 - i\varkappa_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1} - \overline{A}_1)\psi, i\,\mathcal{G}\mathcal{H}\,\widehat{\sigma}_3\,(k_2 + i\varkappa_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2)\varphi) +$$

$$+((k_2 - i\varkappa_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - \overline{A}_2)\psi, i\,\mathcal{G}\mathcal{H}\,\widehat{\sigma}_3\,(k_1 + i\varkappa_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1)\varphi)\,,$$

где $\overline{A} = (\overline{A}_1, \overline{A}_2)$.

Л е м м а 8.6. *Умножение на функцию* $\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}$ *не выводит за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K)$ *и для любой функции* $\chi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\chi = \frac{1}{2\,\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_j}\,\chi + \frac{\partial \chi}{\partial x_j}\,,\ j = 1, 2\,. \tag{8.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_\nu > 0$, $\nu \in \mathbf{N}$, и $\delta_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Обозначим $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{G}\mathcal{H}) * \Omega_{\delta_\nu} \in \widetilde{C}^\infty(K)$, где Ω_{δ_ν} — «шапочка» (см. доказательство леммы 3.7). Тогда $\mathcal{P}_\nu \to \mathcal{G}\mathcal{H}$ при $\nu \to +\infty$ в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$. Более того,

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\nu}{\partial x_j} = \frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_j} * \Omega_{\delta_\nu}\,,\ j = 1, 2\,.$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\mathcal{P}_\nu(x) \to \mathcal{G}(x)\mathcal{H}(x)$ при $\nu \to +\infty$ при п.в. $x \in K$ (при этом $q \leqslant \mathcal{P}_\nu(x) \leqslant p$ для всех $\nu \in \mathbf{N}$ и $x \in K$). Для любой функции $\chi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедливы равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_\nu}}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\sqrt{\mathcal{P}_\nu}\,\chi = \frac{1}{2\,\mathcal{P}_\nu}\,\frac{\partial \mathcal{P}_\nu}{\partial x_j}\,\chi + \frac{\partial \chi}{\partial x_j}\,,\ j = 1, 2\,.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x_j}\,\mathcal{G}\mathcal{H} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$, то (в силу леммы 8.2)

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\nu}{\partial x_j}\,\chi \to \frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_j}\,\chi$$

при $\nu \to +\infty$ в пространстве $L^2(K)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\sqrt{\mathcal{P}_\nu}\,\chi \to \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}}\,\frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_j}\,\chi + \sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\frac{\partial \chi}{\partial x_j}\,,\ \sqrt{\mathcal{P}_\nu}\,\chi \to \sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\chi$$

при $\nu \to +\infty$ (также) в пространстве $L^2(K)$. Но операторы $\frac{\partial}{\partial x_1} \pm i\,\frac{\partial}{\partial x_2}$ (с областью определения $D(\frac{\partial}{\partial x_1} \pm i\,\frac{\partial}{\partial x_2}) = \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$) замкнуты, поэтому $\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\chi \in L^2(K)$ и выполнены равенства (8.19).

Пусть $\widetilde{\varkappa} = \widetilde{\varkappa}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ — вектор, определяемый в теореме 4.2, $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$. Из (4.14), (8.18) (и лемм 8.2 и 8.6) получаем

$$\sum_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{W}}(A; k + i\varkappa + i\mu\widetilde{\varkappa}; \psi_s, \varphi_s) - \tag{8.20}$$

$$-(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k - i\varkappa - i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\psi, \frac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa + i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\varphi) =$$

$$= -\frac{i}{2}\,\mathcal{R}_1\Big(\frac{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1} + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\,\frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_2}\,; \psi, \varphi\Big) -$$

$$-\frac{i}{2}\,\mathcal{R}_2\Big(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\,\frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1} + \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{G}}\,\frac{\partial\,\mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_2}\,; \psi, \varphi\Big) -$$

$$-i\mathcal{R}_1(\mathcal{GH}(A_2-i\varkappa_2)\widehat{\sigma}_3;\psi,\varphi)+i\mathcal{R}_2(\mathcal{GH}(A_1-i\varkappa_1)\widehat{\sigma}_3;\psi,\varphi)-$$

$$-(e^{-2i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\,\frac{\partial\,\mathcal{GH}}{\partial x_1}\,\psi'_\mu,(A_2-i\varkappa_2)\,\widehat{\sigma}_3\,\varphi'_\mu)+$$

$$+(e^{-2i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\,\frac{\partial\,\mathcal{GH}}{\partial x_2}\,\psi'_\mu,(A_1-i\varkappa_1)\,\widehat{\sigma}_3\,\varphi'_\mu)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathcal{H}}\,e^{-2i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\,\frac{\partial\,\mathcal{GH}}{\partial x_1}\,\psi'_\mu,\frac{1}{\mathcal{H}}\,\frac{\partial\mathcal{GH}}{\partial x_1}\,\varphi'_\mu\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathcal{GH}}\,e^{-2i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\left(\mathcal{F}\,\frac{\partial\,\mathcal{GH}}{\partial x_1}+\mathcal{H}\,\frac{\partial\,\mathcal{GH}}{\partial x_2}\right)\psi'_\mu,\ \frac{1}{\mathcal{GH}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\mathcal{F}\,\frac{\partial\,\mathcal{GH}}{\partial x_1}+\mathcal{H}\,\frac{\partial\,\mathcal{GH}}{\partial x_2}\right)\varphi'_\mu\right).$$

Т е о р е м а 8.2. *Для любых вектора* $\varkappa\in\mathbf{R}^2$ *и числа* $\varepsilon>0$ *найдется такое число* $C'_\varepsilon=C'_\varepsilon(\widehat{G},A;\varkappa)>0$, *что для всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2$ *и* $k'\in\mathbf{R}^2:\ k'_1=\pi$, *всех чисел* $\mu\in 2\pi\mathbf{N}$ *и всех вектор-функций* $\psi,\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2):\ \widehat{\sigma}_1\varphi=\varphi$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{s=1}^{2}\widetilde{\mathcal{W}}(A;k+i\varkappa+i\mu\widetilde{\varkappa};\psi_s,\varphi_s)-\right.$$

$$\left.-(\widehat{\mathbf{D}}(\overline{A};k-i\varkappa-i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi,\frac{1}{\mathcal{GH}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A;k+i\varkappa+i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|+C'_\varepsilon\,\|\psi'_\mu\|\cdot\|\varphi'_\mu\|.$$

Для доказательства теоремы 8.2 достаточно воспользоваться равенством (8.20) и леммой 8.5 (см. также доказательство леммы 2.1). Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 4.1.

Т е о р е м а 8.3. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$, $A_j\in L^2(g;K)$ *для некоторой функции* $g\in\mathbf{G}$, $j=1,2$. *Тогда существуют векторы* $k^0,\varkappa^0\in\mathbf{R}^2$ *и функции* $\Phi_0,\Psi_0\in\widetilde{H}^1_0(g;K)\subset\widetilde{H}^1_0(K)\cap\widetilde{C}(K)$ *такие, что*

1) умножение на функции $e^{\pm i\Phi_0}$ *и матричные функции* $e^{\pm\widehat{\sigma}_3\Psi_0}$ *не выводит за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$;

2) для всех векторов $k,\varkappa\in\mathbf{R}^2$ *имеем*

$$\widehat{\mathcal{D}}(A;k+i\varkappa)=e^{\widehat{\sigma}_3\Psi_0}e^{-i\Phi_0}\,\widehat{\mathcal{D}}(k+k^0+i\varkappa^0+i\varkappa)e^{i\Phi_0}e^{\widehat{\sigma}_3\Psi_0},$$

$$\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A};k-i\varkappa)=e^{\widehat{\sigma}_3\overline{\Psi}_0}e^{-i\overline{\Phi}_0}\,\widehat{\mathcal{D}}(k+k^0-i\varkappa^0-i\varkappa)e^{i\overline{\Phi}_0}e^{\widehat{\sigma}_3\overline{\Psi}_0};$$

3) $\max\{\|\Phi_0\|_{L^\infty(K)},\|\Psi_0\|_{L^\infty(K)}\}\leqslant c_9\sum\limits_{j=1}^{2}\|A_j\|_{L^2(g;K)}$, $|k^0|^2+|\varkappa^0|^2\leqslant c_{10}\|A\|^2_{L^2(K;\mathbf{C}^2)}$, *где* $c_9=c_9\,(p,q,F;g)>0$ *и* $c_{10}=c_{10}\,(p,q,F)>0$.

Л е м м а 8.7. *Пусть* $g\in\mathbf{G}$, $\mathcal{L}\in L^2(g;K)$ *и* $\chi\in\widetilde{H}^1(K)$. *Тогда для любого вектора* $k'\in\mathbf{R}^2:\ k'_1=\pi$

$$\|\mathcal{L}\chi\|\leqslant c_{11}\,\|\mathcal{L}\|_{L^2(g;K)}\,\|(k'-i\nabla)\chi\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)},\tag{8.21}$$

где $c_{11}=c_{11}\,(g)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\chi\in\widetilde{C}^1_0(K)$. Тогда (см. раздел 3) для всех $x\in\mathbf{R}^2$

$$|\chi(x)|\leqslant c_4\left(\int_{K^c+x}g(|x-y|)\,|\mathrm{grad}\,\chi(x)|^2d^2y\right)^{1/2},$$

где константа $c_4=c_4\,(g)>0$ определена в (3.15), и, следовательно,

$$\int_K|\mathcal{L}(x)\chi(x)|^2d^2x\leqslant\tag{8.22}$$

$$\leqslant c_4^2\int_{K^c}\int_{K^c+x}|\mathcal{L}(x)|^2\,g(|x-y|)\,|\mathrm{grad}\,\chi(y)|^2d^2x\,d^2y\leqslant$$

$$\leqslant c_4^2\int_{2K^c}\left(\int K^c\cap(K^c+y)g(|x-y|)\,|\mathcal{L}(x)|^2d^2x\right)|\mathrm{grad}\,\chi(y)|^2d^2y\leqslant$$

$$\leqslant 4c_4^2\,\|\mathcal{L}\|^2_{L^2(g;K)}\int_K|\mathrm{grad}\,\chi|^2d^2x.$$

С другой стороны,

$$\|\mathcal{L}\|_{L^2(K)} \leqslant c_{12}\,\|\mathcal{L}\|_{L^2(g;K)}\,, \tag{8.23}$$

где $c_{12} = c_{12}(g) > 0$. Поэтому для функций $\chi \in \widetilde{C}^1(K)$ из (8.22) и (8.23) следует оценка (8.21) с некоторой константой $c_{11} = c_{11}(g) > 0$. Пусть теперь $\chi \in \widetilde{H}^1(K)$, $\chi_\nu \in \widetilde{C}^1(K)$, $\nu \in \mathbf{N}$, и $\chi_\nu \to \chi$ при $\nu \to +\infty$ в пространстве $\widetilde{H}^1(K)$. Так как $\mathcal{L} \in \mathbb{L}_0^{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, то $\|\mathcal{L}(\chi - \chi_\nu)\|_{L^2(K)} \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Но оценка (8.21) справедлива для всех функций χ_ν, поэтому при $\nu \to +\infty$ получаем, что эта оценка справедлива и для функции $\chi \in \widetilde{H}^1(K)$.

Обозначим

$$\psi''_\mu = e^{i\overline{\Phi}_0} e^{\widehat{\sigma}_3 \overline{\Psi}_0} \sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi'_\mu\,,\ \varphi''_\mu = e^{i\Phi_0} e^{\widehat{\sigma}_3 \Psi_0} \sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi'_\mu\,.$$

Из теоремы 8.3 и леммы 8.7 для всех $k' \in \mathbf{R}^2 \colon k'_1 = \pi$ следует оценка

$$\|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi'_\mu\| \leqslant e^{2\,c_9 \sum\limits_{j=1}^{2} \|A_j\|_{L^2(g;K)}}\, \|\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k' + k^0 - i\varkappa^0)\,\frac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}}\,\psi''_\mu\| \leqslant$$

$$\leqslant C'_1 e^{c'_1 \sum\limits_{j=1}^{2} \|A_j\|_{L^2(g;K)}}\, \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu\|\,,$$

где $C'_1 = C'_1(\widehat{G}) > 0$ и $c'_1 = c'_1(\widehat{G}, g) > 0$. Такая же оценка справедлива для вектор-функций φ'_μ и φ''_μ (вместо вектор-функций ψ'_μ и ψ''_μ соответственно). Пусть $k' = k + k^0$. Будем выбирать векторы $k \in \mathbf{R}^2$, для которых $k'_1 = k_1 + k^0_1 = \pi$. Имеем

$$(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k + i\varkappa^0 - i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi,\, \frac{1}{\mathcal{GH}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k - i\varkappa^0 + i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi) =$$

$$= (\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu\,,\, \frac{1}{\mathcal{GH}}\,e^{2\widehat{\sigma}_3(\Psi_0 - i\mu\Omega)}\,\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi''_\mu)\,.$$

Из (1.5) и леммы 3.2 вытекает (так как $k'_1 = \pi$), что $\ker \widehat{\mathcal{D}}(k') = \{0\}$ и $R(\widehat{\mathcal{D}}(k')) = L^2(K; \mathbf{C}^2)$. Для каждой вектор-функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ далее будем выбирать такую вектор-функцию $\psi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$, зависящую также от $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, A, μ и k', что

$$\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu = \frac{1}{\mathcal{GH}}\,e^{2\widehat{\sigma}_3(\Psi_0 - i\mu\Omega)}\,\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi''_\mu\,. \tag{8.24}$$

Тогда (см. (1.6) и теорему 8.3)

$$(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k + i\varkappa^0 - i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi,\, \frac{1}{\mathcal{GH}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k - i\varkappa^0 + i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant p^{-2} e^{-2\,c_9 \sum\limits_{j=1}^{2} \|A_j\|_{L^2(g;K)}}\, \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi''_\mu\| \geqslant$$

$$\geqslant c_1^2\,(pC'_1)^{-2}\, e^{-2\,(c'_1 + c_9) \sum\limits_{j=1}^{2} \|A_j\|_{L^2(g;K)}}\, \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|\,,$$

где $c_1 = c_1(p, q, F) > 0$ — константа из леммы 3.1. Из полученной оценки и теоремы 8.2 следует теорема 8.4.

Т е о р е м а 8.4. *Существуют константы $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\widehat{G}) \in (0, a_-(\widehat{G}))$, $c' = c'(\widehat{G}, g) > 0$ и $C'_2 = C'_2(\widehat{G}, A) > 0$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 \colon k'_1 = k_1 + k^0_1 = \pi$, всех чисел $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$ и всех вектор-функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$, для которых $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ и выполнено равенство (8.24), справедлива оценка*

$$\Big| \sum_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{W}}(A; k - i\varkappa^0 + i\mu\widetilde{\varkappa}; \psi_s, \varphi_s) \Big| \geqslant$$

$$\geqslant \widetilde{C}\, e^{-c' \sum\limits_{j=1}^{2} \|A_j\|_{L^2(g;K)}}\, \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\| - C'_2\,\|\psi'_\mu\| \cdot \|\varphi'_\mu\|\,.$$

Л е м м а 8.8. *Равномерно по всем векторам $k' \in \mathbf{R}^2 \colon k'_1 = \pi$ и всем ненулевым вектор-функциям $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$, для которых $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$, имеем*

$$\frac{\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|}{\|\varphi'_\mu\|} \to +\infty$$

при $\mu \to +\infty$ (и $\mu \in 2\pi\mathbf{N}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\widetilde{\varphi}_\mu = e^{\mu\Phi}\varphi$. Тогда $\varphi'_\mu = e^{-i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\widetilde{\varphi}_\mu$ и

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|^2 = \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\widetilde{\varphi}_\mu\|^2 + \mu^2 \int_K \left(\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)^2\right) |\widetilde{\varphi}_\mu|^2 d^2x$$

($\frac{\partial\Omega}{\partial x_j}|\widetilde{\varphi}_\mu| \in L^2(K)$, $j = 1,2$, в силу теоремы 3.2). Пусть $K_\varepsilon = \{x \in K: \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)^2 \leqslant \varepsilon^2\}$, $\varepsilon > 0$. Из леммы 4.4 следует, что $\operatorname{mes} K_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Определим невозрастающую функцию $[\pi, +\infty) \ni \lambda \to \varepsilon(\lambda) > 0$ так, что $\widetilde{c}^{\,2}(3)\,(\operatorname{mes} K_{\varepsilon(\lambda)})^{2/3}\lambda^2 \leqslant \frac{1}{2}$ для всех λ, где $\widetilde{c}\,(3)$ — константа из леммы 8.3 (при $\beta = 3$). Если $\widetilde{\varphi}_\mu \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^2)$: $\|\widetilde{\varphi}_\mu\| = 1$, то для каждого $\lambda \geqslant \pi$ либо $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\widetilde{\varphi}_\mu\| \geqslant \lambda$, либо $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\widetilde{\varphi}_\mu\| < \lambda$. Во втором случае из леммы 8.3 (для $\beta = 3$) получаем

$$\int_{K_{\varepsilon(\lambda)}} |\widetilde{\varphi}_\mu|^2 d^2x \leqslant \widetilde{c}^{\,2}(3)\,(\operatorname{mes} K_{\varepsilon(\lambda)})^{\frac{2}{3}}\, \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\widetilde{\varphi}_\mu\|^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\int_K \left(\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)^2\right) |\widetilde{\varphi}_\mu|^2 d^2x \geqslant$$

$$\geqslant \int_{K\setminus K_{\varepsilon(\lambda)}} \varepsilon^2(\lambda)|\widetilde{\varphi}_\mu|^2 d^2x \geqslant \frac{1}{2}\,\varepsilon^2(\lambda)\,.$$

Поэтому для всех $\widetilde{\varphi}_\mu \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^2)$: $\|\widetilde{\varphi}_\mu\| = 1$ имеем

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|^2 \geqslant \sup_{\lambda\geqslant\pi} \min\{\lambda^2, \frac{1}{2}\mu^2\varepsilon^2(\lambda)\} \to +\infty$$

при $\mu \to +\infty$.

Т е о р е м а 8.5. *Пусть* $\mathcal{V} \in \mathbb{V}^*_{a,b}(\mathbb{Z}^2)$, $a > 0$, $b \geqslant 0$. *Тогда для всех векторов* $k' \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = \pi$, *всех чисел* $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$

и всех вектор-функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^2)$: $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{V}}(\psi_s,\varphi_s)\right| \leqslant a\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\| + b\,\|\psi'_\mu\| \cdot \|\varphi'_\mu\|\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\widetilde{\mathcal{W}}(\psi,\varphi) = \sum\limits_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{V}}(\psi_s,\varphi_s)$. Из леммы 8.1 (см. (8.3)) следует равенство $\widetilde{\mathcal{W}}(\psi,\varphi) = \widetilde{\mathcal{W}}(\psi'_\mu, e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\widetilde{\varphi}_\mu)$, которое приводит к оценке

$$|\widetilde{\mathcal{W}}(\psi,\varphi)| \leqslant a\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\,\widetilde{\varphi}_\mu)\| + C'_\varepsilon\,\|\psi'_\mu\| \cdot \|\varphi'_\mu\|\,,$$

справедливой для всех векторов $k' \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = \pi$ и всех чисел $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$. С другой стороны,

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\widetilde{\varphi}_\mu\|^2 = \left\|\left(\widehat{\mathcal{D}}_0(k') + i\mu\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\,\widehat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\,\widehat{\sigma}_2\right)\right)\widetilde{\varphi}_\mu\right\|^2 =$$

$$= \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\widetilde{\varphi}_\mu\|^2 + \mu^2\left\|\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\,\widehat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\,\widehat{\sigma}_2\right)\widetilde{\varphi}_\mu\right\|^2 =$$

$$= \left\|\left(\widehat{\mathcal{D}}_0(k') - i\mu\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\,\widehat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\,\widehat{\sigma}_2\right)\right)\widetilde{\varphi}_\mu\right\|^2 = \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|^2\,.$$

Теорема 8.1 теперь следует из оценки (1.7), теорем 8.4, 8.5 (при выборе достаточно малого числа $a > 0$ (например, можно положить

$$a = \frac{1}{3}\,\widetilde{C}e^{-c'\sum\limits_{j=1}^{2}\|A_j\|_{L^2(g;K)}}$$

и $C = \frac{1}{2}\widetilde{C}$)) и леммы 8.8.

Список литературы

1. Kuchment P., Levendorskii S. On the spectra of periodic elliptic operators. Preprint mp_arc # 00-388, 2000 (http://www.ma.utexas.edu/mp_arc).
2. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 2. С. 1–40.
3. Shen Z. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators. Preprint mp_arc # 99-189, 1999 (http://www.ma.utexas.edu/mp_arc).
4. Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 5. С. 197–240.
5. Friedlander L. On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators. Preprint ESI № 1037. Vienna, 2001 (http://www.esi.ac.at).
6. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.
7. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.
8. Данилов Л. И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI. М.: ВИНИТИ, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.96. № 3855-В96.
9. Gruber M. J. Measures of Fermi surfaces and absence of singular continuous spectrum for magnetic Schrödinger operators. Preprint № 421, SFB 288. Berlin, 1999 (arXiv : math-ph/9908026).
10. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace-Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 7593–7601.
11. Данилов Л. И. О спектре двумерного периодического оператора Дирака // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 118, № 1. С. 3–14.
12. Birman M. Sh., Suslina T. A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous. Preprint ESI № 603. Vienna, 1998 (http://www.esi.ac.at).
13. Данилов Л. И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. III. М.: ВИНИТИ, 1992. 33 с. Деп. в ВИНИТИ 10.07.92. № 2252-В92.

14. Данилов Л. И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. II. М.: ВИНИТИ, 2001. 60 с. Деп. в ВИНИТИ 09.04.01. № 916-В2001.
15. Данилов Л. И. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 233–240.
16. Данилов Л. И. О спектре периодического оператора Дирака // Теор. и мат. физика. 2000. Т. 124, № 1. С. 3–17.
17. Данилов Л. И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. I. М.: ВИНИТИ, 2000. 76 с. Деп. в ВИНИТИ 15.06.00. № 1683-В00.
18. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
19. Данилов Л. И. Оценки резольвенты и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом // Теор. и мат. физика. 1995. Т. 103, № 1. С. 3–22.
20. Гельфанд И. М. Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 6. С. 1117–1120.
21. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
22. Shen Z. Absolute Continuity of Periodic Schrödinger Operators with Potentials in the Kato Class. Preprint mp_arc # 00-294, 2000 (http://www.ma.utexas.edu/mp_arc).
23. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
24. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 357 с.
25. Thomas L. E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 335–343.
26. Hempel R., Herbst I. Bands and gaps for periodic magnetic hamiltonians. Preprint ESI № 162. Vienna, 1994 (http://www.esi.ac.at).
27. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 1. С. 32–48.
28. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10, № 4. С. 1–36.
29. Sobolev A. Absolute continuity of the periodic magnetic Scrödinger

operator. Preprint ESI № 495. Vienna, 1997 (http://www.esi.ac.at).

30. Kuchment P., Levendorskii S. On absolute continuity of spectra of periodic elliptic operators. Preprint mp_arc # 98-630, 1998 (http://www.ma.utexas.edu/mp_arc).
31. Shen Z. The Periodic Schrödinger Operators with Potentials in the C.Fefferman-Phong Class. Preprint mp_arc # 99-455, 1999 (http://www.ma.utexas.edu/mp_arc).
32. Данилов Л. И. Об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шредингера // Матем. заметки. 2002 (в печати).
33. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 6. С. 140–177.
34. Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 4. С. 196–228.
35. Shargorodsky E., Sobolev A.V. Quasi-conformal mappings and periodic spectral problems in dimension two. Preprint arXiv : math.SP/0109216, 2001.
36. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
37. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 443 с.