Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. №3(26)

УДК 517.958:530.145.6

© М. С. Сметанина
chuburin@otf.fti.udmurtia.su

ОБ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелокальный потенциал, собственное значение, резонанс, асимптотика

Abstract. We consider the Schrödinger operator of the form $H = -d^2/dx^2 + V$ acting in $L^2(\mathbf{R})$ where $V = \varepsilon W(x) + \lambda(\cdot, \phi_0)\phi_0$ is non-local potential. It is proved, that the unique level (i. e. eigenvalue or resonance of the operator H) exists for $V = \lambda(\cdot, \phi_0)\phi_0$ for all sufficiently small λ. We investigate the asymptotic behaviour of level for a small λ. We prove that there are no levels for $V = \varepsilon W(x) + \lambda(\cdot, \phi_0)\phi_0$ for all sufficiently small ε, if $\lambda \neq 0$.

Введение

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$-d^2\psi/dx^2 + V\psi = E\psi \tag{1.1}$$

с нелокальным потенциалом

$$V = \varepsilon W(x) + \lambda(\cdot, \phi_0)\phi_0, \tag{1.2}$$

где $W(x)$ — вещественная функция («локальный потенциал»), удовлетворяющая оценке вида $|W(x)| \leqslant Ce^{-a|x|}$, где C — некоторая константа, $a > 0$, а $\phi_0(x)$ — некоторая функция, для которой выполнено аналогичное неравенство $|\phi_0(x)| \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$, причем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x)\,dx \neq 0$. Как известно, решения уравнения Шредингера (1.1) описывают состояния электрона с заданной энергией E.

Одномерный оператор $V_s = \lambda(\cdot, \phi_0)\phi_0$ в физической литературе называется сепарабельным потенциалом [1], а потенциалы вида (1.2) используются физиками, например, в теории псевдопотенциала [2]. Физически интересными являются решения уравнения (1.1) не только класса $L^2(\mathbf{R})$, описывающие так называемые локализованные состояния, соответствующие собственным значениям $E \in \mathbf{R}$, но и экспоненциально возрастающие решения, отвечающие квазистационарным (распадающимся) состояниям, соответствующим «резонансам», которые определены ниже.

Положим $H_0 = -d^2/dx^2$, тогда $H = H_0 + \varepsilon W(x) + V_s$. Обозначим через $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$ резольвенту оператора H_0. Как известно, ядро $R_0(E)$ имеет вид $G(x,y,k) = -(2ik)^{-1}e^{ik|x-y|}$, где $k = \sqrt{E}$ (разрез выбираем вдоль полуоси $[0,\infty)$). Будем говорить, что $k \in \mathbf{C}$ (или соответствующее $E = k^2$) является резонансом оператора H, если существует решение интегрального уравнения

$$\psi(x) = -1/2ik \int_{\mathbf{R}} G(x,y,k)V\psi(y)dy,$$

удовлетворяющее неравенствам

$$C_1 \exp(\beta|x|) \leqslant |\psi(x)| \leqslant C_2 \exp(\gamma|x|), \quad C_1, C_2 > 0, \quad 0 < \beta \leqslant \gamma < \alpha$$

(ср. [3]). Заметим, что резонансы отвечают k с $\operatorname{Im} k < 0$ или второму листу римановой поверхности для функции $\sqrt{E}$. Заметим также, что данное определение эквивалентно для локальных потенциалов обычному определению резонанса [3] как полюса резольвенты $R(E) = (H - E)^{-1}$; это следует из леммы 1 [4] и аналитической теоремы Фредгольма [5].

Уровнем оператора H в дальнейшем будем называть его собственное значение или резонанс. Спектр оператора A обозначим через $\sigma(A)$. Для $\lambda = 0$ и малых ε уравнение (1.1) исследовалось Б.Саймоном [6], а для малого оператора специального вида в качестве потенциала — в недавней работе [7] (см. ниже замечание после теоремы 2). В обеих работах изучалось поведение только собственных значений.

В настоящей работе исследуется поведение уровней при малых ε или λ.

1. Исследование уровней в случае $V = \lambda(\cdot, \phi_0)\phi_0$

В данном разделе рассматривается случай $\varepsilon = 0$ и малого $\lambda \in \mathbf{R}$. Уравнение Шредингера

$$H\psi = -d^2/dx^2 + \lambda(\psi, \phi_0)\phi_0 = E\psi$$

запишем в виде $(H_0 - E)\psi = -\lambda(\psi, \phi_0)\phi_0$. Как известно, $\sigma(H_0) = [0,\infty)$. Для $E \notin [0,\infty)$ получим, применяя к обеим частям равенства оператор $R_0(E)$, эквивалентное интегральное уравнение (для $\psi \in L^2(\mathbf{R})$)

$$\psi(x) = (\lambda/2ik) \int_{\mathbf{R}} e^{ik|x-y|}(\psi, \phi_0)\phi_0(y)dy, \tag{1.3}$$

которое затем продолжаем по $E = k^2$ также на второй лист. Заметим, что $E = k^2$ является уровнем в том и только в том случае, если существует ненулевое решение уравнения (1.3).

Л е м м а 1.1. *Пусть $|k| \leqslant \delta < \alpha$. Величина $E = k^2 \neq 0$ является уровнем оператора H тогда и только тогда, когда k является решением алгебраического уравнения*

$$k = (\lambda/2i) \int_{\mathbf{R}^2} e^{ik|x-y|}\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим (1.3) справа на $\overline{\phi_0(x)}$ и возьмем интеграл по переменной x от обеих частей уравнения:

$$(\psi, \phi_0) = \frac{\lambda(\psi, \phi_0)}{2ik} \int_{\mathbf{R}^2} e^{ik|x-y|}\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy.$$

(Выражение (ψ, ϕ_0) в случае, если $\psi \notin L^2(\mathbf{R})$, понимаем как $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\phi_0(x)dx$.) Сократив полученное выражение на $(\psi, \phi_0) \neq 0$

(если $(\psi, \phi_0) = 0$, то из (1.3) следует, что $\psi(x) = 0$ — решение, которое нас не устраивает), получим

$$1 = \frac{\lambda}{2ik} \int_{\mathbf{R}^2} e^{ik|x-y|} \phi_0(y) \overline{\phi_0(x)} dxdy,$$

что совпадает с (1.4).

Функция

$$F(k) = (\lambda/2i) \int_{\mathbf{R}^2} e^{ik|x-y|} \phi_0(y) \overline{\phi_0(x)} dxdy$$

в круге $|k| < \delta$, где $\delta < \alpha$ — произвольное, является аналитической, поскольку при дифференцировании по параметру k возникает абсолютно сходящийся интеграл (см. оценку ниже в доказательстве теоремы 1.1).

Т е о р е м а 1.1 (ср. [6], раздел XIII, п. 17). *Пусть $\delta < \alpha$. Тогда для всех достаточно малых λ в круге $\{|k| \leqslant \delta\}$ существует единственный уровень $E = k^2$, причем справедлива формула*

$$k = (\lambda/2i) | \int_{\mathbf{R}} \phi_0(x) dx|^2 +$$

$$+ (\lambda^2/4i) \int_{\mathbf{R}^2} |x-y| \phi_0(y) \overline{\phi_0(x)} dxdy | \int_{\mathbf{R}} \phi_0(x) dx|^2 + o(\lambda^2). \quad (1.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (1.4) является уравнением вида $k = F(k)$, т.е. уравнением на неподвижную точку. Будем его решать с помощью принципа сжимающих отображений, рассматривая в качестве метрического пространства замкнутый круг $|k| \leqslant \delta$ в комплексной плоскости.

Докажем, что при достаточно малых λ функция $F(k)$ переводит круг $|k| \leqslant \delta$ в себя. Имеем

$$|F(k)| \leqslant (\lambda/2) \int_{\mathbf{R}^2} e^{|k|(|x|+|y|)} |\phi_0(y)| |\phi_0(x)| dxdy \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda C/2) (\int_{\mathbf{R}} e^{\delta|x|} e^{-\alpha|x|} dx)^2 \leqslant \lambda C/(\alpha - \delta)^2 < \delta.$$

Условие сжимаемости отображения выполнено, если существует производная $F'(k)$ и в круге $|k| \leqslant \delta$ справедлива оценка

$$|F'(k)| \leqslant q < 1. \quad (1.6)$$

Существование производной вытекает из абсолютной сходимости интеграла, полученного при формальном дифференцировании по параметру k функции $F(k)$. Оценив $F'(k)$, мы получим оценку и для q. Имеем

$$|F'(k)| = |(\lambda/2i) \int_{\mathbf{R}^2} i|x-y| e^{ik|x-y|} \phi_0(y) \overline{\phi_0(x)} dxdy| \leqslant$$

$$\leqslant (|\lambda|/2) (\int_{\mathbf{R}^2} e^{|k||x|} \cdot e^{|k||y|} |x \phi_0(y) \phi_0(x)| dxdy +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^2} e^{|k||y|} \cdot e^{|k||x|} |y \phi_0(y) \phi_0(x)| dxdy) \leqslant$$

$$\leqslant |(\lambda/2i) (\int_{\mathbf{R}} C e^{(\delta-\alpha)|x|} |x| dx \int_{\mathbf{R}} C e^{(\delta-\alpha)|y|} dy +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}} C e^{(\delta-\alpha)|x|} |y| dx \int_{\mathbf{R}} C e^{(\delta-\alpha)|y|} dy) \leqslant$$

$$\leqslant 4|\lambda| C^2/(\alpha - \delta)^3 = q < 1 \quad (1.7)$$

для достаточно малых λ. Из принципа сжимающих отображений следует, что отображение $F(k)$ имеет одну и только одну неподвижную точку. Для отыскания приближенного решения $k = F(k)$ применяем формулу для последовательных приближений $k_n : k_n = F^n k_0$. Данную формулу используем для $n = 2$, а в качестве нулевого приближения берем $k_0 = 0$. Имеем

$$k_1 = F(k_0) = (\lambda/2i) \int_{\mathbf{R}^2} \phi_0(y) \overline{\phi_0(x)} dxdy.$$

Для второго приближения $k_2 = F(k_1)$. Имеем равенство

$$k_2 = (\lambda/2i)\int_{\mathbf{R}^2} e^{ik_1|x-y|}\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy.$$

Разложив экспоненту по формуле Тейлора в окрестности нуля, получим для некоторого $\theta \in [0, k_1] \subset \{|k| \leqslant \delta\}$ равенство

$$k_2 = (\lambda/2i)\times$$

$$\times\int_{\mathbf{R}^2}(1 + ik_1|x-y| + \frac{ik_1}{2}(x-y)^2 e^{i\theta|x-y|})\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy =$$

$$= (\lambda/2i)\int_{\mathbf{R}^2}\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy + (\lambda^2/4i)\int_{\mathbf{R}^2}|x-y|\phi_0(y)\overline{\phi}_0(x)dxdy\times$$

$$\times\int_{\mathbf{R}^2}\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy + o(\lambda^2) =$$

$$= (\lambda/2i)|\int_{\mathbf{R}}\phi_0(x)dx|^2 + (\lambda/4i)\int_{\mathbf{R}^2}|x-y|\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy\cdot\times$$

$$\times|\int_{\mathbf{R}}\phi_0(x)dx|^2 + o(\lambda^2)$$

(интеграл

$$(\lambda/2i)\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(ik_1)^2}{2}(x-y)^2 e^{i\theta|x-y|}\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy$$

оцениваем, пользуясь неравенством $|k_1| \leqslant 2C^2|\lambda|/\alpha^2$ и рассуждениями, примененными при оценке интеграла в предыдущих выкладках, так что $k_1 = O(\lambda)$).

Погрешность для k_2 находим по известной общей формуле для погрешности $|k_2 - k^*| \leqslant \dfrac{q^2}{1-q}|k_1|$, где k^* — точное решение. Имеем, используя (1.7),

$$\frac{q^2}{1-q} = q^2(1 + O(q)) = \lambda^2\frac{16C^4}{(\alpha-\delta)^6} + o(\lambda^2).$$

Таким образом,

$$|k_2 - k^*| \leqslant \frac{2|\lambda|C^2}{\alpha^2}(\lambda^2\frac{16C^4}{(\alpha-\delta)^6} + o(\lambda^2)) =$$

$$= |\lambda|^3\frac{32C^6}{\alpha^2(\alpha-\delta)^6} + o(\lambda^3) = o(\lambda^2).$$

Отсюда

$$k^* = (\lambda/2i)|\int_{\mathbf{R}}\phi_0(x)dx|^2 + (\lambda^2/4i)\int_{\mathbf{R}^2}|x-y|\phi_0(y)\overline{\phi_0(x)}dxdy\times$$

$$\times|\int_{\mathbf{R}}\phi_0(x)dx|^2 + o(\lambda^2).$$

С л е д с т в и е 1.1. *Имеет место формула*

$$E = -\lambda^2/4|\int_{\mathbf{R}}\phi_0(x)dx|^4 + o(\lambda^2).$$

Т е о р е м а 1.2. *В условиях теоремы 1, если $\lambda < 0$, то $E = k^2$ является собственным значением, а если $\lambda > 0$, то резонансом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из интегрального уравнения (1.3) нетрудно усмотреть, что поведение функции $\psi(x)$ полностью определяется интегралом $I(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ik|x-y|}\phi_o(y)dy$. Докажем, что в случае $\operatorname{Im} k < 0$ и $|k| < \delta < \alpha$ интеграл $I(x)$ экспоненциально убывает, а случае $\operatorname{Im} k > 0$ экспоненциально возрастает. Имеем для $x \to +\infty$

$$I(x) = \int_{\{y\leqslant x\}} e^{ik(x-y)}\phi_0(y)dy + \int_{\{y>x\}} e^{-ik(x-y)}\phi_0(y)dy =$$

$$= e^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky}\phi_0(y)dy - e^{ikx}\int_x^{\infty} e^{-iky}\phi_0(y)dy+$$

$$+e^{-ikx}\int_x^{\infty} e^{iky}\phi_0(y)dy. \qquad (1.8)$$

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$|e^{ikx}\int_x^\infty e^{-iky}\phi_0(y)dy| \leqslant Ce^{-\operatorname{Im} k\cdot x}\int_x^\infty e^{\operatorname{Im} k\cdot y}e^{-\alpha y}dy =$$

$$= Ce^{-\operatorname{Im} k\cdot x}/(\alpha - \operatorname{Im} k)e^{(\operatorname{Im} k-\alpha)x} = C_1 e^{-\alpha x}.$$

Аналогично оценивается и последнее слагаемое в (1.8). Итак, экспоненциальное убывание (возрастание) $I(x)$ определяется выражением вида Ce^{ikx}, т.е. знаком $\operatorname{Im} k$. В свою очередь знак $\operatorname{Im} k$, в силу равенства (1.5), определяется знаком λ.

Аналогично рассматривается случай $x \to -\infty$.

З а м е ч а н и е 1.1. В недавней работе [7] рассматривается одномерный оператор Шредингера с оператором достаточно общего вида в качестве потенциала. В случае ϕ_0 с компактным носителем и вещественного E асимптотическая формула (1.5) вытекает из результатов [7]. Однако автор данной работы не исследует резонансы и асимптотику решений уравнения Шредингера.

2. Исследование уровней в случае $\varepsilon W(x) + \lambda(\cdot,\phi_0)\phi_0$

Теперь рассмотрим уравнение Шредингера вида

$$-d^2\psi/dx^2 + \varepsilon W(x)\psi + \lambda(\psi,\phi_0)\phi_0 = E\psi,$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$ — фиксированное число, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ — малый параметр. Перепишем данное уравнение в виде

$$(H_0 + V_s)\psi - E\psi = -\varepsilon W\psi. \tag{2.1}$$

Заметим, что при прибавлении к самосопряженному оператору компактного самосопряженного (в частности, конечномерного) оператора , существенный спектр не меняется [6]. Таким образом, спектр оператора $H_0 + V_s$ представляет собой объединение $[0,+\infty)$ и собственных значений конечной кратности.

Обозначим через $R_s(E) = ((H_0+V_s)-E)^{-1}$ резольвенту оператора $H_0 + V_s$. В данном разделе видоизменен подход к изучению резонансов: используем вместо интегрального уравнения с ядром оператора $R_0(E)$ интегральное уравнение с ядром $R_s(E)$, что, как нетрудно показать, эквивалентно. Применяя оператор $R_s(E)$ в точках E из резольвентного множества к обеим частям (2.1), получим эквивалентное для $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ равенство

$$\psi(x) = -\varepsilon R_s(E)W(x)\psi. \tag{2.2}$$

Найдем выражение для резольвенты $R_s(E)$. (Формула для резольвенты без доказательства приведена в [3, прил. B], однако даем ее вывод, чтобы показать его применимость также для оператора $R_s(E)$, полученного продолжением по E резольвенты на второй лист.) Для заданной правой части $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ решим уравнение $(H_0 - E)\psi = \phi - \lambda(\psi,\phi_0)\phi_0$. Применяя к обеим частям равенства оператор $R_0(E)$, который существует в тех точках, в которых существует $R_s(E)$, получим

$$\psi(x) = R_0(E)\phi - \lambda(\psi,\phi_0)R_0(E)\phi_0. \tag{2.3}$$

Умножая данное равенство скалярно на ϕ_0, получаем

$$(\psi,\phi_0) = (R_0(E)\phi,\phi_0) - \lambda(\psi,\phi_0)(R_0(E)\phi_0,\phi_0),$$

откуда

$$(\psi,\phi_0) = \frac{(R_0(E)\phi,\phi_0)}{1+\lambda(R_0(E)\phi_0,\phi_0)}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.3), находим

$$\psi = R_s(E)\phi = R_0(E)\phi - \frac{\lambda(R_0(E)\phi,\phi_0)}{\lambda(R_0(E)\phi_0,\phi_0)+1}R_0(E)\phi_0.$$

Уравнение (2.2) примет вид:

$$\psi(x) = -\varepsilon R_0(E)W\psi + \frac{\lambda\varepsilon(R_0(E)W\psi,\phi_0)}{\lambda(R_0(E)\phi_0,\phi_0)+1}R_0(E)\phi_0. \tag{2.4}$$

По определению существование уровня эквивалентно существованию нулевого решения данного интегрального уравнения ($E=k^2$ рассматриваем в том числе и на втором листе).

Перейдем в уравнении (2.4) от функции ψ к новой неизвестной функции $\phi(x)=\sqrt{W(x)}\psi(x)$ (ср. [8]), а в качестве функции ϕ_0 аналогично будем использовать функцию вида $\sqrt{\overline{W}}\phi_0$. После этого уравнение, определяющее уровни оператора H, запишется в виде:

$$\phi(x)=-\varepsilon\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}\phi+\frac{\lambda\varepsilon(\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}\phi,\phi_0)}{\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{\overline{W}}\phi_0,\phi_0)+1}\times$$

$$\times\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{\overline{W}}\phi_0, \tag{2.5}$$

где $k\in\mathbf{C}$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $\lambda\neq 0$, *тогда для* (k,ε) *из некоторой окрестности точки* $(0,0)\in\mathbf{C}\times\mathbf{R}$ *оператор* $H_0+\varepsilon W+\lambda(\cdot,\phi_0)\phi_0$ *уровней не имеет.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|k|<\delta$. Для ядра

$$-\sqrt{W(x)}\frac{e^{ik|x-y|}}{2ik}\sqrt{W(y)}$$

оператора $\sqrt{W}R_0(E)\sqrt{W}\phi$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbf{R}^2}|\sqrt{W(x)}\frac{e^{ik|x-y|}}{2ik}\sqrt{W(x)}|^2dxdy\leqslant$$

$$\leqslant(1/2|k|)\int_{\mathbf{R}}Ce^{-(a-2\delta)|x|}dx\int_{\mathbf{R}}Ce^{-(a-2\delta)|y|}dy<+\infty$$

для достаточно малых δ. Следовательно, для данных δ оператор $\sqrt{W}R_0(E)\sqrt{W}\phi$ является компактным. Преобразуем выражение

$$\sqrt{W}R_0(E)\sqrt{W}\phi=-\sqrt{W}\int_{\mathbf{R}}\frac{e^{ik|x-y|}-1}{2ik}\sqrt{W}\phi(y)dy-$$

$$-(\sqrt{W}/2ik)\int_{\mathbf{R}}\sqrt{W(y)}\phi(y)dy. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$K(k)\phi=-\frac{\sqrt{W(x)}}{2i}\int_{\mathbf{R}}\frac{e^{ik|x-y|}-1}{k}\sqrt{W(y)}\phi(y)dy;$$

$K(k)$ является аналитической функцией со значениями в пространстве операторов, действующих в $L^2(\mathbf{R})$ (при $k\neq 0$ аналитичность вытекает из аналитичности $k\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}$ — см. ниже; а особенность в нуле устранима).

Докажем теперь аналитичность операторнозначной функции $k\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}$ для достаточно малых δ. Для этого достаточно доказать, что ядро оператора аналитически зависит от k как $L^2(\mathbf{R}^2)$-значная функция или что имеет место сходимость в $L^2(\mathbf{R}^2)$:

$$\frac{\sqrt{W(x)}e^{i(k+\Delta k)|x-y|}\sqrt{W(y)}-\sqrt{W(x)}e^{ik|x-y|}\sqrt{W(y)}}{\Delta k}-$$

$$-\sqrt{W(x)}\sqrt{W(y)}(i|x-y|)e^{ik|x-y|}\to 0,$$

т. е. существует производная.

Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе. Проверим ограниченность подынтегральной функции некоторой суммируемой функцией. Оценим

$$\int_{\mathbf{R}^2}|W(x)W(y)e^{2ik|x-y|}|\cdot|\frac{e^{i\Delta k|x-y|}-1}{\Delta k}-i|x-y||^2dxdy\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^2}|W(x)W(y)|e^{2\delta(|x|+|y|)}|\frac{e^{i\Delta k|x-y|}-1}{\Delta k}-i|x-y||^2dxdy.$$

Рассмотрим отдельно

$$|\frac{e^{i\Delta k|x-y|}-1}{\Delta k}-i|x-y||\leqslant|1/\Delta k\int_{[0,\Delta k]}i|x-y|\cdot e^{iz|x-y|}dz|+$$

$$+|x-y| \leqslant \frac{1}{|\Delta k|}|\Delta k||x-y|e^{\delta(|x|+|y|)} + |x| + |y| \leqslant$$

$$\leqslant (1+|x|+|y|)e^{\delta(|x|+|y|)} \leqslant Ce^{\delta_1(|x|+|y|)},$$

где $[0, \Delta k]-$ отрезок в $\mathbf{C}$ и $\delta_1 > \delta$ произвольно.

Отсюда

$$\int_{\mathbf{R}^2} |W(x)W(y)|e^{2\delta(|x|+|y|)}C^2 e^{2\delta_1(|x|+|y|)}dxdy < +\infty$$

для достаточно малых δ, δ_1.

Осталось проверить поточечную сходимость

$$\frac{\sqrt{W(x)}e^{i(k+\Delta k)|x-y|}\sqrt{W(y)} - \sqrt{W(x)}e^{ik|x-y|}\sqrt{W(y)}}{\Delta k}$$

$$-\sqrt{W(x)}\sqrt{W(y)}i|x-y|e^{ik|x-y|} \to 0$$

при $\Delta k \to 0$.

По теореме Лагранжа

$$\frac{e^{i\Delta k|x-y|}}{\Delta k} - i|x-y| = i|x-y|e^{i\theta|x-y|} - i|x-y|,$$

где θ некоторая точка из отрезка $[0, \Delta k]$ на комплексной плоскости. Если $\Delta k \to 0$, то очевидно, что $\theta \to 0$. Получаем

$$\lim_{\theta\to 0} \sqrt{W(x)}\sqrt{W(y)}e^{ik|x-y|}i|x-y|(e^{i\theta|x-y|}-1) = 0.$$

Таким образом, доказана аналитическая зависимость операторов
$k\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}$ от k.

Рассмотрим теперь оператор $K(k)$ в круге $\{|k| < \delta\}$. Его ядро имеет вид:

$$\sqrt{W(x)}\frac{e^{ik|x-y|}-1}{k}\sqrt{W(y)} =$$

$$= \frac{\sqrt{W(x)}kG(x,y,k)\sqrt{W(y)} - \sqrt{W(x)}(kG(x,y,k)|_{k=0})\sqrt{W(y)}}{k}.$$

Из этого представления видно, что $K(k)$ — операторы, аналитически зависящие от k, поскольку аналитичность $k\sqrt{W}G(x,y,k)\sqrt{W}$ доказана выше.

Вернемся к выражению (2.6), его можно представить в виде:

$$\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}\phi = -\frac{\sqrt{W}}{2ik}(\phi, \overline{\sqrt{W}}) + K(k)\phi. \qquad (2.7)$$

Аналогично имеем

$$\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi = -\frac{\sqrt{W}}{2ik}(\phi, \sqrt{W}) + K_1(k)\phi, \qquad (2.8)$$

где

$$K_1(k)\phi = -\frac{\sqrt{W}}{2i}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}-1}{k}\overline{\sqrt{W}}\phi(y)dy.$$

Равенство (2.5) примет вид:

$$\phi(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{W}}{2ik}(\phi, \overline{\sqrt{W}}) - \varepsilon K(k)\phi + \frac{\lambda\varepsilon(\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}\phi, \phi_0)}{\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi_0, \phi_0)+1}\times$$

$$\times(-\frac{\sqrt{W}}{2ik}(\phi_0, \sqrt{W}) + K_1(k)\phi_0). \qquad (2.9)$$

Введем обозначение

$$L(k) = \frac{\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}(\cdot), \phi_0)}{\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi_0, \phi_0)+1}K_1(k)\phi_0 - K(k).$$

Операторнозначная фукция $L(k)$ является аналитической по k в окрестности нуля; это следует из доказанного выше после умножения числителя и знаменателя на k.

Соотношение (2.9) запишется в виде:

$$\phi(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{W}}{2ik}(\phi, \overline{\sqrt{W}}) + \frac{\lambda\varepsilon(\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}\phi, \phi_0)}{\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi_0, \phi_0)+1}\times$$

$$\times(-\frac{\sqrt{W}}{2ik}(\phi_0, \sqrt{W})) + \varepsilon L(k)\phi$$

или

$$(1-\varepsilon L(k))\phi = \frac{\varepsilon\sqrt{W}}{2ik}(\phi, \overline{\sqrt{W}}) + \frac{\lambda\varepsilon(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi, \phi_0)}{\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi_0, \phi_0)+1}\times$$

$$\times(-\frac{\sqrt{W}}{2ik}(\phi_0, \sqrt{W})). \qquad (2.10)$$

Перейдем к новой неизвестной функции $\theta = (1-\varepsilon L(k))\phi$. При условии $|\varepsilon| < 1/||L(k)||$, которое выполнено для достаточно малых ε, существует обратный оператор $(1-\varepsilon L(k))^{-1}$. Таким образом, из (2.10) получаем

$$\theta(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{W}}{2ik}((1-\varepsilon L(k))^{-1}\theta, \overline{\sqrt{W}}) -$$

$$-\frac{\lambda\varepsilon(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}(1-\varepsilon L(k))^{-1}\theta, \phi_0)}{2ik(\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi_0, \phi_0)+1)}\sqrt{W}(\phi_0, \sqrt{W}). \qquad (2.11)$$

Из этого уравнения видно, что $\theta = C\sqrt{W(x)}$, где C — некоторая константа, не зависящая от k. Подставив в (2.11) выражение для $\theta(x)$, получим после сокращения

$$k = \frac{\varepsilon}{2i}((1-\varepsilon L(k))^{-1}\sqrt{W}, \overline{\sqrt{W}}) -$$

$$-\frac{\lambda\varepsilon(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}(1-\varepsilon L(k))^{-1}(\sqrt{W}), \phi_0)}{2i(\lambda(\sqrt{W}R_0(k^2)\overline{\sqrt{W}}\phi_0, \phi_0)+1)}(\phi_0, \sqrt{W}) - \qquad (2.12)$$

нелинейное алгебраическое уравнение относительно k. Очевидно, что существование уровня $E = k^2$ эквивалентно существованию решения данного алгебраического уравнения.

Обозначим правую часть уравнения (2.12) через $F(\varepsilon, k)$, тогда оно примет вид:

$$k = F(\varepsilon, k). \qquad (2.13)$$

(Функцию $F(\varepsilon, k)$ продолжаем по ε в комплексную плоскость.) Докажем аналитичность функции F по переменной k в круге $\{|k| < \delta\}$ и по переменной ε в окрестности нуля в $\mathbf{C}$. Операторнозначная функция $(1-\varepsilon L(k))^{-1}$ раскладывается в равномерно сходящийся степенной ряд по степеням $\varepsilon L(k)$ и таким образом, по теореме Вейерштрасса [9], определяет аналитическую функцию переменных k, ε. (Как известно, см., например, [10], основные теоремы комплексного анализа легко переносятся на случай векторнозначных функций). Далее, операторнозначные функции $k\sqrt{W}R_0(k^2)\sqrt{W}$ и $K(k)$ являются аналитическими по k, как было доказано выше. По теореме Хартогса [9] функция $F(\varepsilon, k)$ аналитична по совокупности переменных.

Уравнение (2.13) будем исследовать с помощью теоремы о неявной функции. Рассмотрим функцию $f(\varepsilon, k) = k - F(\varepsilon, k)$, аналитическую по k, ε. Из вида функций f и F вытекает равенство $f(0,0) = 0$. Найдем

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial k} = (1 - F'_k(\varepsilon, k))|_{(0,0)} = 1.$$

Предположим, что $\lambda \neq 0$; по теореме о неявной функции [9] равенство $f(\varepsilon, k) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $k = k(\varepsilon)$, где $k(\varepsilon)$ — некоторая аналитическая функция от ε в окрестности нуля. С другой стороны, точки вида $(\varepsilon, 0)$ удовлетворяют уравнению $f(\varepsilon, k) = 0$ для всех достаточно малых ε:

$$f(\varepsilon, 0) = 0 - F(\varepsilon, 0) = (-\frac{\varepsilon}{2i}((1-\varepsilon L(k))^{-1}\sqrt{W}, \overline{\sqrt{W}}) +$$

$$+\lambda\varepsilon(-\sqrt{W}((1-\varepsilon L(k))^{-1}(\sqrt{W}), \overline{\sqrt{W}}) +$$

$$+2ikK(k)(1-\varepsilon L(k))^{-1}(\sqrt{W}), \phi_0)\times$$

$$\times(2i(\lambda(-\sqrt{W}(\phi_0, \sqrt{W}) + 2ikK_1(k)\phi_0, \phi_0) + 2ik))^{-1}(\phi_0, \sqrt{W}))|_{k=0} =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2i}((1-\varepsilon L(0))^{-1}(\sqrt{W}), \overline{\sqrt{W}}) + \frac{\varepsilon}{2i}((1-\varepsilon L(0))^{-1}(\sqrt{W}), \overline{\sqrt{W}}) = 0$$

Следовательно, $k(\varepsilon) \equiv 0$, так что уровней в окрестности нуля нет.

С л е д с т в и е 2.1. *Имеем равенство* $\sigma(H) = [0,\infty)$ *для всех достаточно малых* ε.

З а м е ч а н и е 2.1. В случае n-мерного оператора

$$V_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\cdot, \phi_i)\phi_i$$

данный результат получить не удается, поскольку в выражении для $f(\varepsilon, 0)$ получается не нуль, а неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Список литературы

1. Демков Ю. Н., Островский В. Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1975. 240 с.
2. Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала. М.: Мир, 1973. 560 с.
3. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг–Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. 568 с.
4. Чубурин Ю.П. О попадании собственного значения (резонанса) оператора Шредингера на границу зоны // Теор. и мат. физика. 2001. Т. 126, № 2. С. 196–205.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 432 с.
7. Gadyl'shin R. On local perturbations of Shrödinger operator in axis. Preprint in the Texas Math Physics archive. 2002. № 02–65.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 448 с.
9. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1976. 400 с.
10. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1072 с.