УДК 511.83

© С. А. Логунов
serlog@uni.udm.ru

Об УДАЛЕННЫХ ТОЧКАХ И ТОЧКАХ–БАБОЧКАХ

Ключевые слова: расширение Чеха–Стоуна, наследственная нормальность, удаленные точки, точки–бабочки.

Abstract. It is proved for second countable topological spaces without isolated points, that every remote point in the remainder of Chech–Stone compactification is a butterfly-point.

Введение

Мы исследуем различные типы точек в наростах $X^* = \beta X - X$ расширений Чеха-Стоуна. Пусть $p \in X^*$. Если $\beta X - \{p\}$ не нормально, то p называется *точкой ненормальности.* Несмотря на большие усилия, в ω^* только для очень специфических типов точек удалось показать, что они являются точками ненормальности (см. например, [1], [7] или [8]). Но если X — нормальное пространство со счётной базой и без изолированных точек, которое либо локально компактно, либо нульмерно, то всякая точка нароста является точкой ненормальности [5], [6]. Б.Э. Шапировский ввёл понятие b-точки (или точки-бабочки) [9]. Мы будем говорить, что $p \in X^*$ является b-точкой *в* βX, если она является предельной точкой для некоторых множеств F и $G \subseteq X^* - \{p\}$, замкнутых в $\beta X - \{p\}$ и непересекающихся [5]. В этом случае p является точкой ненормальности. До сих пор неизвестно, всякая ли точка в экстремально несвязном компактном пространстве является точкой-бабочкой. Если p не принадлежит замыканию никакого нигде не плотного подмножества пространства X, то p называется *удалённой* точкой. Этот тип точек стал популярен после опубликования работ Э. ван Дауэна [2] и [3]. А. Доу построил удалённые точки в наростах непсевдокомпактных пространств π-веса ω_1 [4].

1. Основные результаты

Т е о р е м а 1. *Пусть пространство X нормально, со счётной базой и без изолированных точек. Тогда всякая удалённая точка $p \in X^*$ является b-точкой в βX. Следовательно, пространство $\beta X - \{p\}$ ненормально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всегда в дальнейшем выполняются условия теоремы. Каждое трансфинитное число отождествляется с множеством меньших трансфинитных чисел. Так $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ и $\omega = \{0, 1 \ldots\}$. Если $U \subseteq X$ открыто, то $U^e = \beta X - \mathrm{cl}_{\beta X}(X - U)$. Мы пишем $U \subsetneq V$ только для собственных подмножеств множества V. Пусть 2^X — семейство подмножеств множества X. Тогда семейство $\pi \subset 2^X$ называется (*строго*) *клеточным*, если его члены (их замыкания) попарно дизъюнктны. Семейство называется *звёздно конечным*, если каждый его член пересекает не более конечного числа других членов π. Множество всех отображений из π в 2 обозначается 2^π. Если каждый член π содержится в некотором члене σ, где $\sigma \subset 2^X$, то π измельчает σ, $\pi > \sigma$. Если, кроме того, каждый член π пересекает не более конечного числа членов σ, то π конечно измельчает σ, $\pi >_{fin} \sigma$. Пусть $\mathcal{B} = \{b_j\}_{j \in \omega}$ — счётная база в X. Пусть непустое открытое множество $b_j(k) \subset X$ выбрано для всяких $j, k \in \omega$ так, что $\mathrm{cl}\, b_j(k) \subset b_j(k+1)$ и $b_j = \bigcup_{k \in \omega} b_j(k)$. Тогда $\mathcal{B}_{jk} = \{b_j\} \bigcup \{b \in \mathcal{B}\colon b \bigcap b_j(k) = \emptyset\}$ — открытое покрытие X. Семейство $\{\mathcal{B}_{jk}\}_{j,k \in \omega}$ может быть заиндексировано в виде $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in \omega}$. Открытые звёздно конечные бесконечные покрытия $\mathcal{P}_i$, $i \in \omega$ пространства X и непустые открытые множества $U(k) \subset X$ для всяких $U \in \mathcal{P}_i$ и $k \in \omega$ легко могут быть построены так, что:

1) $\mathrm{cl}\, U(k) \subset U(k+1)$ и $U = \bigcup_{k \in \omega} U(k)$;
2) если $i < j < \omega$ и $V \in \mathcal{P}_j$, то либо $V \subsetneq U$, либо $V \bigcap U(j) = \emptyset$;
3) $\mathcal{P}_{i+1} >_{fin} \mathcal{P}_i > \mathcal{B}_i$. Тогда (3) легко влечёт, что $\mathcal{P} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{P}_i$ является базой в X.

Л е м м а 1. *Для каждого покрытия $\pi \subset \mathcal{P}$ пространства X существует локально конечное в X подпокрытие $\sigma \subset \pi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой точки $x \in X$ фиксируем единственное $U(x) \in \pi$, содержащее x и принадлежащее $\mathcal{P}_i$ с минимальным индексом i. Тогда любое подпокрытие без повторяющихся множеств σ покрытия $\{U(x) : x \in X\}$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, если $x \in U$ для некоторого $U \in \sigma$, то $x \in U(k)$ и $U \in \mathcal{P}_i$ для подходящих $k, i \in \omega$. Для любого $j \leqslant k + i$ существует окрестность $O_j x \subset X$ точки x, пересекающая лишь конечное число членов $\mathcal{P}_j$. Но тогда $Ox = \bigcap\limits_{j \leqslant k+i} O_j x U(k)$ пересекает лишь конечное число членов σ. Действительно, для любых $m > k + i$ и $V \in \mathcal{P}_m$, $V \nsubseteq U$ влечёт $V \bigcap U(k) = \varnothing$ по построению и $V \subsetneq U$ влечёт $V \notin \sigma$.

Легко заметить, что если π — локально конечное открытое покрытие X, то семейство $\mathcal{R}(\pi) = \{V(f) : f \in 2^\pi$ и $V(f) \neq \varnothing\}$ открытых множеств

$$V(f) = \bigcap \{U \in \pi\colon f(U) = 0\} - \bigcup \{\mathrm{cl}\, U : U \in \pi \text{ и } f(U) = 1\}$$

счётно, клеточно, локально конечно и измельчает π, $\mathrm{cl}\, R(\pi) = X$. Определим семейства $\mathcal{D}_k$ и $\mathcal{W}_k$ индукцией по $k \in \omega$ следующим образом. Пусть $\mathcal{D}_0 = \mathcal{R}(\mathcal{P}_0)$. Если $\mathcal{D}_k = \{V_i : i \in \omega\}$, то $\mathcal{W}_k = \{V_i(\nu) : \mathrm{cl}\, V_i(\nu) \subset V_i$ для каждого $i \in \omega$, $\nu \in 3\}$ является строго клеточным подсемейством $\mathcal{P}$ и $\mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{R}(\mathcal{D}_k \cup \mathcal{W}_k \cup \mathcal{P}_{k+1})$. По построению каждое $\mathcal{D}_k$ локально конечно; $U(\nu) \in \mathcal{W}_k$ непусто для каждого $U \in \mathcal{D}_k$ и $\nu \in 3$; если U и $V \in \bigcup_{k \in \omega}(\mathcal{D}_k \bigcup \mathcal{W}_k)$ пересекаются, то либо $U \subseteq V$, либо $U \supseteq V$. Каждое $U \in \mathcal{P}$ принадлежит $\mathcal{P}_{k(U)}$ для единственного $k(U) \in \omega$. Тогда

$$\mathcal{D}(U) = \{V \in \mathcal{D}_{k(U)}\colon V \cap U \neq \varnothing \text{ или, эквивалентно } V \subset U\}$$

имеет всюду плотное в U объединение. Если $\pi \subset \mathcal{P}$ — локально конечное покрытие X, то $\mathcal{D}(\pi) = \bigcup \{\mathcal{D}(U) : U \in \pi\}$ локально конечно и $W = \bigcup \mathcal{D}(\pi)$ всюду плотно в X. Для произвольной точки $x \in W$ мы положим $k_\pi(x) = \min\{k(U) : U \in \pi \text{ и } x \in \bigcup \mathcal{D}(U)\}$ и обозначим $V(x)$ единственный член $\mathcal{D}_{k_\pi(x)}$, содержащий x. Тогда $V(x) \in \mathcal{D}(\pi)$. Покрытие $\{V(x) : x \in W\}$, состоящее из либо совпадающих, либо дизъюнктных множеств, содержит клеточное подпокрытие $\sigma(\pi)$ множества W. Если $\sigma = \sigma(\pi) = \{V_i : i \in \omega\}$, то $\sigma(\nu) = \{V_i(\nu) : i \in \omega\}$ для каждого $\nu \in 3$ и

$$\sigma(p) = \{\delta \subset \sigma\colon p \in \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup \delta\}.$$

Так как p является удалённой точкой, то следующие условия эквивалентны для любого $\delta \subset \sigma : \delta \in \sigma(p)$, $p \in \bigcup \delta^{\epsilon}$ и $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup (\sigma - \delta)$. Поэтому $\xi(\sigma) = \{A \subset \omega : p \in \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{i \in A} V_i\}$ является ультрафильтром на ω и $[\sigma] = \bigcap \{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup \delta : \delta \in \sigma(p)\}$ равно $\bigcap \{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{i \in A} V_i : A \in \xi(\sigma)\}$. Для всяких σ и δ из

$$\Omega = \{\sigma(\pi) : \pi \subset \mathcal{P} \text{ является локально конечным покрытием } X\}$$

мы положим $\sigma <_p \delta$, если

$$p \in \mathrm{cl}_{\beta X} \{U \in \delta : U \subsetneq V \text{ для некоторого } V \in \sigma\}.$$

Тогда $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \tau\} \subset \Omega$ мы будем называть максимальной цепью, если $\alpha < \beta < \tau$ влечёт $\sigma_\alpha <_p \sigma_\beta$ (и, следовательно, $[\sigma_\alpha] \supset [\sigma_\beta]$) и для каждого $\sigma \in \Omega$, $\sigma <_p \sigma_\alpha$ для некоторого $\alpha < \tau$. Так как любые σ и $\delta \in \Omega$ сравнимы в смысле $<_p$, то максимальные цепи существуют. Пусть

$$\lambda(p) = \min\{|\Delta| : \Delta \subset \Omega \text{ является максимальной цепью}\}.$$

Пусть в дальнейшем $\Theta = \{\sigma_\alpha : \alpha < \lambda(p)\}$ — максимальная цепь минимальной мощности $\lambda(p)$, где $[\sigma_0] \subset X^*$.

Л е м м а 2. *Для произвольной окрестности $Op \subset \beta X$, $[\sigma_\alpha] \subset Op$ для некоторого $\sigma_\alpha \in \Theta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathrm{cl}_{\beta X} O'p \subset Op$ для окрестности $O'p \subset \beta X$. Для произвольной точки $x \in X$ существует окрестность $Ox \in \mathcal{P}$ такая, что либо $Ox \subset Op$, если $x \in \mathrm{cl}\, O'p$, либо $Ox \bigcap \mathrm{cl}\, O'p = \emptyset$ в противном случае. Покрытие $\{Ox : x \in X\}$ пространства X содержит локально конечное подпокрытие π в силу леммы 1. Тогда для каждого $\sigma_\alpha \in \Theta$, $\sigma_\alpha >_p \sigma(\pi) > \pi$ влечёт

$$[\sigma_\alpha] \subset [\sigma(\pi)] \subset \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup \{Ox : x \in X \cap \mathrm{cl}\, O'p\} \subset \mathrm{cl}_{\beta X} Op.$$

Л е м м а 3. *Для любых $\alpha < \lambda(p)$ и $\nu \in 3$ существует точка $p_\alpha(\nu) \in [\sigma_\alpha]$ такая, что $p_\alpha(\nu) \in \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup \sigma_\beta(\nu)$ для каждого $\beta \in \lambda(p) - \alpha$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы должны для всяких $n \in \omega$, $\alpha = \beta_0 < \ldots < \beta_k < \beta_{k+1} < \ldots < \beta_n < \lambda(p)$ и $\delta_\alpha \in \sigma_\alpha(p)$ построить последовательность

$$U_0 = \ldots = U_{0+k_0} \supsetneq U_0(\nu) \supseteq \ldots \supseteq U_i = \ldots U_{i+k_i} \supsetneq U_i(\nu) \supseteq \ldots$$
$$\supseteq U_m = \ldots = U_{m+k_m}, \quad i = 0 \ldots m-1,$$

так, что

$$U_0 \in \delta_\alpha \tag{1}$$

и для каждого $k = 0 \ldots n$ $U_{i+t} \in \sigma_{\beta_k}$ для подходящих индексов $i \leqslant m$ и $t \leqslant k_i$.

Выберем $\delta_{\beta_k} \in \sigma_{\beta_k}(p)$ следующим образом. Пусть $\delta_{\beta_0} = \delta_\alpha$. Если $k < n$ и δ_{β_k} построены, то

$$\delta = \{U \in \sigma_{\beta_{k+1}} : U \supsetneq V \text{ для некоторого } V \in \sigma_{\beta_k}\},$$
$$\delta_0 = \{U \in \delta : U \subsetneq V \text{ для некоторого } V \in \delta_{\beta_k}\}$$

и $\delta_1 = \{U \in \delta : U \cap (\bigcup \delta_{\beta_k}) = \varnothing\}$ удовлетворяют следующим условиям: $p \in \bigcup \delta^{\epsilon}$, $\delta_0 \cup \delta_1 = \delta$ и $(\bigcup \delta_{\beta_k})^{\epsilon} \cap (\bigcup \delta_1)^{\epsilon} = \varnothing$. Следовательно, $p \in \bigcup \delta_0^{\epsilon}$ и, обеспечивая $\delta_{\beta_{k+1}} > \delta_{\beta_k}$, мы можем положить $\delta_{\beta_{k+1}} = \delta_0$. Теперь мы можем зафиксировать $U_k \in \delta_{\beta_k}$ для каждого $k = 0 \ldots n$ так, что они образуют последовательность

$$U_0 = \ldots = U_{0+k_0} \supsetneq \ldots \supsetneq U_i = \ldots = U_{i+k_i} \supsetneq \ldots \supsetneq U_m = \ldots = U_{m+k_m}.$$

Нам необходимо вставить $U_i(\nu)$ в нужные места последовательности. Для этого предположим, что для некоторого $i < m$ удовлетворяющая (1) последовательность

$$U_0 = \ldots = U_{0+k_0} \supsetneq U_0(\nu) \supseteq \ldots \supsetneq U_{i-1}(\nu) \supseteq U_i = \ldots$$
$$\ldots = U_{i+k_i} \supsetneq U'_t \supseteq \ldots \supseteq U'_n$$

построена и все $U_j(\nu)$, $j < i$, вставлены. Тогда, используя максимальность и клеточность семейств σ_α, мы можем заменить $U'_k \in \sigma_{\beta_{k'}}$ для каждого $k = t \ldots n$ на тот же самый или другой член U_k того же самого семейства $\sigma_{\beta_{k'}}$, так, чтобы выполнялось (1) и следующее условие: $\bigcap_{k=t}^{n} U_k \cup U_i(\nu) \neq \varnothing$. Но тогда

$U_i(\nu) \supseteq U_k$ потому, что иначе $U_k \supseteq U_i \supsetneq U'_k$ в противоречие с нашей конструкцией. Последовательность

$$U_0 = \ldots = U_{0+k_0} \supsetneq U_0(\nu) \supseteq \ldots \supseteq U_i = \ldots =$$
$$= U_{i+k_i} \supsetneq U_i(\nu) \supseteq U_{k_t} \supseteq \ldots \supseteq U_{k_n}$$

ещё с одним вставленным $U_i(\nu)$ является искомой на данном шаге. После окончания индукции доказательство завершено.

Пусть для каждого $\nu \in 3$, $F_\nu = \{p_\alpha(\nu) : \alpha < \lambda(p)\}$. Тогда $F_\nu \subset [\sigma_0] \subset X^*$ в силу выбора σ_0. Для произвольной окрестности $Op \subset \beta X$, $\{p_\alpha(\nu) : \alpha \in \lambda(p) - \beta\} \subset [\sigma_\beta] \subset Op$ для некоторого $\beta < \lambda(p)$. Это влечёт $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(F_\nu - \{p\})$, исключая, возможно, случай, когда $p_\alpha(\nu) = p$ для каждого $\alpha \in \lambda(p) - \gamma$ и $\{p_\alpha \colon \alpha < \beta\}$ содержится в $\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup \sigma_\beta(\nu)$, который не пересекается с $\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup \sigma_\beta(\nu')$, для любого другого $\nu' \in 3$. Наше доказательство завершено.

Список литературы

1. Blaszczyk A. and Szymanski A. Some nonnormal subspaces of the Cech-Stone compactifications of a discrete space // Proc. 8-th Winter School on Abstract Analysis, Prague. 1980. P. 73.
2. Douwen van E.K. Why certain C'ech-Stone remainders are not homogeneous // Colloq. Math.. 1979. V. 41. P.45–52.
3. Douwen van E.K. Remote points. Dissert.Math. 1980. V. 188. PP. 95.
4. Dow A. Remote points in spaces with π-weight ω_1 // Fund. Math. 1984. V. 124. P. 197–205.
5. Logunov S. On hereditary normality of compactifications // Topology Appl. 1996. V. 20. P. 35–39.
6. Logunov S. On hereditary normality of zero-dimentional spaces // Topology Appl. 1999. V. 18. P. 25–31.
7. Mill van J. An easy proof that $\beta N \setminus N \setminus \{p\}$ is non-normal // Ann.Math.Silesianea. 1984. V. 2, № 2. P. 81–84.
8. Rajagopalan M. $\beta N - N - \{p\}$ is not normal // Journal of the Indian Math. Soc. 1972. V. 36. P. 173–176.
9. Шапировский Б.Э. О вложениях экстремально несвязных пространств в компактные хаусдорфовы пространства, b-точки и вес точечно нормальных пространств // ДАН СССР. 1987. Т. 223. С. 1083–1086.