



УДК: 531.36,531.53

MSC 2010: 70E55,70H12,70H14

О движении связанных маятников

А. П. Маркеев

Исследуется движение двух одинаковых маятников, связанных линейной упругой пружиной произвольной жесткости. Движение происходит в однородном поле тяжести в фиксированной вертикальной плоскости. Основное внимание уделено задаче об орбитальной устойчивости в первом (линейном) приближении периодического движения, в котором маятники совершают колебания в одну сторону с одинаковой, произвольной по величине амплитудой (один из двух возможных типов нелинейных нормальных колебаний). Уравнения возмущенного движения содержат два параметра, один из которых характеризует жесткость пружины, связывающей маятники, а второй задает амплитуду изучаемых колебаний маятников. В плоскости этих параметров выделены области устойчивости и неустойчивости.

Ранее были исследована задача о произвольных линейных и нелинейных колебаниях малой амплитуды в случае пружины малой жесткости [1, 2].

Ключевые слова: маятник, нелинейные колебания, устойчивость

1. Введение

Пусть два математических маятника длины ℓ и веса mg каждый движутся в однородном поле тяжести. Точки подвеса O_1 и O_2 маятников находятся на неподвижной горизонтальной прямой, расстояние между точками O_1 и O_2 постоянно и равно d . Движение происходит в фиксированной вертикальной плоскости, проходящей через отрезок O_1O_2 . Маятники связаны невесомой упругой пружиной жесткости k . Расстояния точек прикрепления B_1

Получено 23 января 2013 года

После доработки 1 марта 2012 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00322), программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4149.2012.1) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

Маркеев Анатолий Павлович

markeev@ipmnet.ru

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

119526, Россия, Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1



и B_2 пружины к маятникам от их точек подвеса одинаковы и равны b , в ненапряженном состоянии длина пружины равна d .

Уравнения движения. Положение маятников зададим углами φ_1 и φ_2 , которые они составляют с вертикалью (рис. 1). Кинетическая энергия маятников вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \quad (1.1)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t .

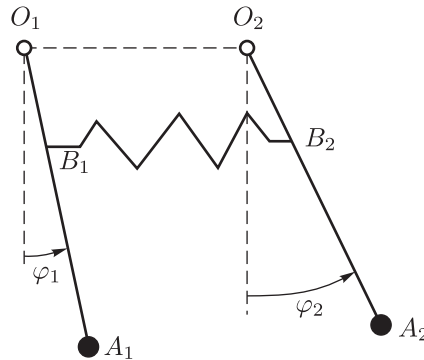


Рис. 1. Связанные маятники ($O_1A_1 = O_2A_2 = \ell$, $O_1B_1 = O_2B_2 = b$, $O_1O_2 = d$).

А для потенциальной энергии имеем выражение

$$\Pi = \frac{1}{2} k [\sqrt{(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2 b^2 + [(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) b + d]^2} - d]^2 - mg\ell(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2). \quad (1.2)$$

Дифференциальные уравнения движения маятников можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (1.3)$$

где $L = T - \Pi$.

О двух типах частных решений уравнений движения. Уравнения (1.3) допускают семейства частных решений, в которых

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} + \sin \varphi_1 = 0 \quad (1.4)$$

или

$$\varphi_1 = -\varphi_2, \quad \frac{d^2 \varphi_2}{d\tau^2} + \sin \varphi_2 + \beta \sin 2\varphi_2 = 0. \quad (1.5)$$

Здесь введена безразмерная независимая переменная

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{\ell}} t, \quad (1.6)$$

а через β обозначен безразмерный параметр, характеризующий величину жесткости пружины, связывающей маятники,

$$\beta = \frac{kb^2}{mg\ell}. \quad (1.7)$$

Движения маятников, удовлетворяющие соотношениям (1.4) (или (1.5)), назовем движениями первого (или второго) типа. В случае колебаний в окрестности равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ движения первого и второго типов будем называть нормальными (в общем случае нелинейными) колебаниями первого и второго типов соответственно (рис. 2).

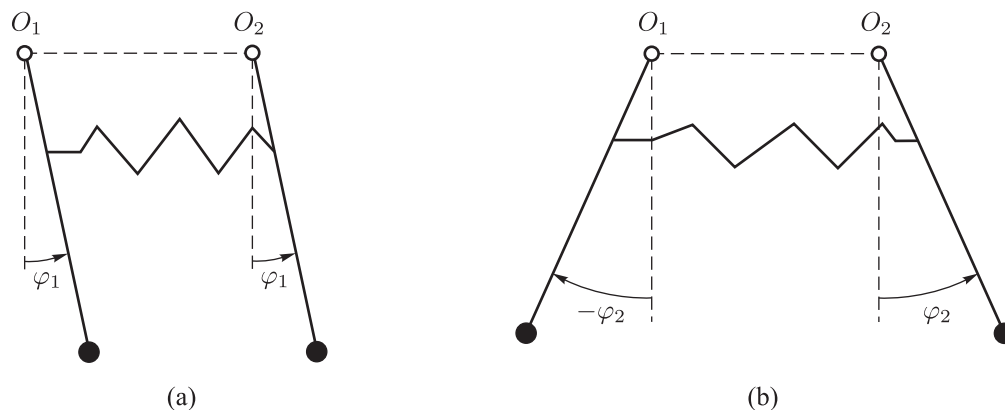


Рис. 2. Нормальные нелинейные колебания маятников: (а) $\varphi_1 = \varphi_2$ — колебания первого типа; (б) $\varphi_1 = -\varphi_2$ — колебания второго типа.

Основная цель статьи состоит в исследовании орбитальной устойчивости в первом (линейном) приближении нормальных колебаний первого типа произвольной амплитуды ($\varphi_1 = \varphi_2$, $-\pi < \varphi_i < \pi$; $i = 1, 2$).

Предварительно целесообразно рассмотреть некоторые общие свойства семейств движений (1.4) и (1.5).

2. О некоторых свойствах движений первого и второго типов

В семействе движений (1.4) пружина не деформирована и оно представляет собой хорошо изученную совокупность движений математического маятника. В частности, равновесие $\varphi_1 = \pi$ (или $\varphi_1 = -\pi$, что физически одно и то же) неустойчиво, а равновесие $\varphi_1 = 0$ устойчиво, причем частота (по τ) малых колебаний в окрестности этого равновесия равна 1.

Семейство движений (1.5) второго типа зависит от параметра β . Имеют место следующие три качественно отличающихся один от другого случая.

1. *Случай* $0 < \beta < 1/2$. Фазовый портрет показан на рисунке 3, он аналогичен фазовому портрету математического маятника (на рис. 3 принято, что $\beta = 1/4$). Равновесие $\varphi_2 = 0$ устойчиво, а равновесие $\varphi_2 = \pm\pi$ неустойчиво. Частота (по τ) малых колебаний в окрестности устойчивого равновесия вычисляется по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{1 + 2\beta}. \quad (2.1)$$

2. *Случай* $\beta > 1/2$. Фазовый портрет показан на рисунке 4 (где принято $\beta = 1$). Существует четыре физически отличающихся одно от другого положения равновесия, обозначенных на фазовом портрете буквами a, b, c, d . На рисунке 4 показаны также соответствующие равновесные конфигурации маятников.

В положениях a и c (в которых $\varphi_2 = -\pi - \arccos \frac{1}{2\beta}$ и $\varphi_2 = -\pi + \arccos \frac{1}{2\beta}$ соответственно) маятники наклонены к вертикали; эти положения равновесия неустойчивы.

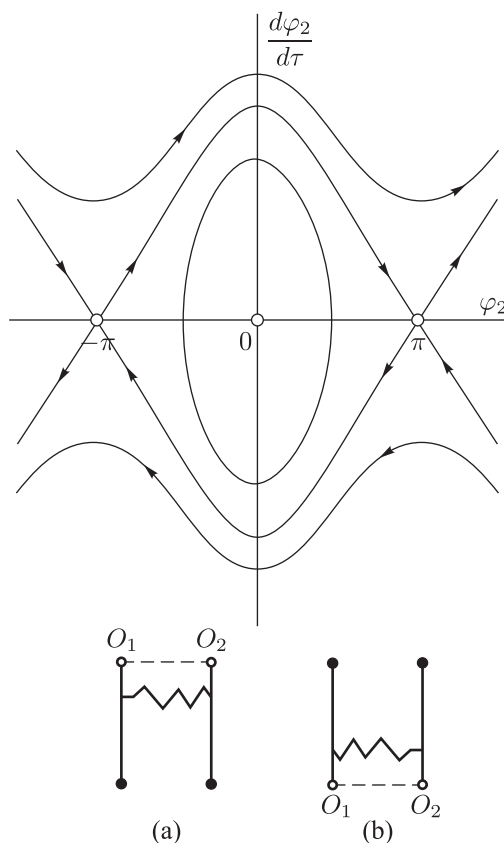


Рис. 3. К случаю $0 < \beta < 1/2$ в движениях второго типа: (а) устойчивое равновесие $\varphi_2 = 0$; (б) неустойчивое равновесие $\varphi_2 = \pm\pi$.

В положениях b и d маятники вертикальны. В этих положениях, соответственно, $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_2 = -\pi$ (или $\varphi_2 = \pi$, что физически одно и то же). Равновесие $\varphi_2 = 0$ устойчиво, причем частота ω_0 малых колебаний в его окрестности определяется равенством (2.1). Положение равновесия $\varphi_2 = -\pi$ также устойчиво (но лишь для возмущений, оставляющих маятники в семействе движений второго типа (1.5)). Частота ω_π малых колебаний в окрестности этого положения равновесия вычисляется по формуле

$$\omega_\pi = \sqrt{2\beta - 1}. \quad (2.2)$$

3. *Случай $\beta = 1/2$.* Существует два положения равновесия $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_2 = \pm\pi$. Первое равновесие устойчиво, а второе неустойчиво. Фазовый портрет показан на рисунке 5.

Значение параметра $\beta = 1/2$ является бифуркационным. Движения маятников при $0 < \beta \leq 1/2$ и при $\beta > 1/2$ существенно отличаются. Из сказанного выше следует, что при $0 < \beta \leq 1/2$ существует устойчивое равновесие $\varphi_2 = 0$ и неустойчивое $\varphi_2 = -\pi$. При $\beta > 1/2$ по-прежнему есть устойчивое равновесие $\varphi_2 = 0$, а от неустойчивого равновесия $\varphi_2 = -\pi$ ответвляются два равновесия $\varphi_2 = -\pi \pm \arccos \frac{1}{2\beta}$, которые являются неустойчивыми, а само равновесие $\varphi_2 = -\pi$ становится устойчивым (для возмущений, оставляющих маятники в семействе движений второго типа).

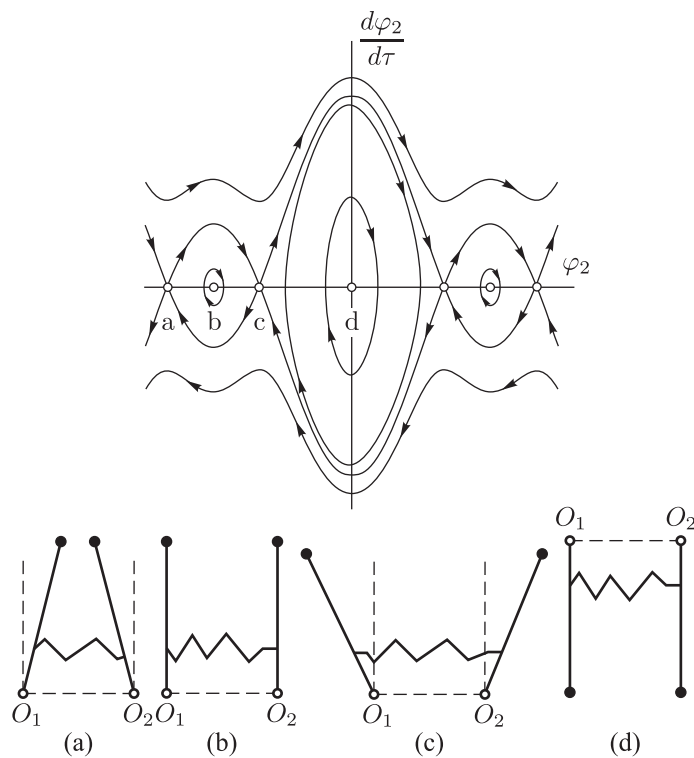


Рис. 4. К случаю $\beta > 1/2$ в движениях второго типа.

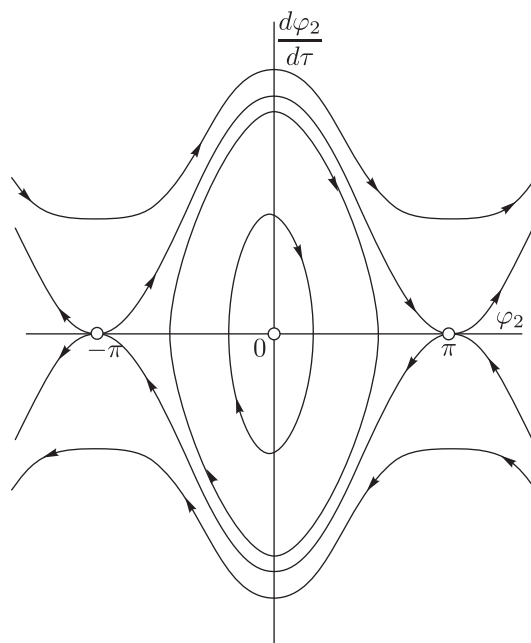


Рис. 5. К случаю $\beta = 1/2$ в движениях второго типа.

3. Анализ устойчивости нелинейных нормальных колебаний

Вместо уравнений (1.3) будем использовать уравнения движения маятников, записанные в форме канонических уравнений Гамильтона. Причем для удобства вместо углов φ_1, φ_2 введем обобщенные координаты q_1, q_2 , положив

$$q_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad q_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Соответствующие (обезразмеренные при помощи множителя $(m\ell\sqrt{g\ell})^{-1}$) обобщенные импульсы p_1, p_2 зададим равенствами

$$p_1 = \frac{1}{2m\ell\sqrt{g\ell}}(p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2}), \quad p_2 = \frac{1}{2m\ell\sqrt{g\ell}}(p_{\varphi_1} - p_{\varphi_2}),$$

где $p_{\varphi_i} = m\ell^2\dot{\varphi}_i$ ($i = 1, 2$). Если еще в качестве независимой переменной принять величину τ , определяемую формулой (1.6), то функция Гамильтона, задающая канонические уравнения движения связанных маятников, запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \cos q_1 \cos q_2 + \frac{1}{4}\beta \left[\sqrt{4\sin^2 q_1 \sin^2 q_2 + (\gamma - 2\cos q_1 \sin q_2)^2} - \gamma \right]^2. \quad (3.1)$$

Здесь β — безразмерный параметр (1.7), а $\gamma = d/b$.

Невозмущенное движение. Для движений маятников (1.4) первого типа

$$q_2 = 0, \quad p_2 = 0, \quad (3.2)$$

а переменные q_1, p_1 определяются каноническими уравнениями с функцией Гамильтона математического маятника

$$h = \frac{1}{2}p_1^2 - \cos q_1. \quad (3.3)$$

Решение этих уравнений, отвечающее нелинейным нормальным колебаниям амплитуды α , записывается в виде

$$q_1 = 2 \arcsin \left[k \operatorname{sn} \left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k \right) \right], \quad p_1 = 2k \operatorname{cn} \left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k \right), \quad (3.4)$$

$$w = \omega\tau + w_0, \quad \omega = \frac{\pi}{2\mathbf{K}(k)}, \quad k = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (0 < \alpha < \pi). \quad (3.5)$$

Здесь и далее применяются стандартные обозначения для эллиптических функций и интегралов [3, 4].

Линеаризованные уравнения возмущенного движения и их характеристическое уравнение. Примем величину w из (3.5) за независимую переменную. Тогда линеаризованные уравнения возмущенного движения задачи об орбитальной устойчивости нормальных колебаний (3.2), (3.4) можно записать в виде

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_2}. \quad (3.6)$$

Здесь

$$H_2 = \frac{\mathbf{K}(k)}{\pi} (p_2^2 + f(w; \alpha, \beta) q_2^2), \quad (3.7)$$

а

$$\begin{aligned} f &= \cos q_1 + 2\beta \cos^2 q_1 = \\ &= 1 + 2\beta - 2k^2(1 + 4\beta) \operatorname{sn}^2\left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k\right) + 8\beta k^4 \operatorname{sn}^4\left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.6) имеют период π по независимой переменной w и содержат два параметра: амплитуду α исследуемых нормальных колебаний ($0 < \alpha < \pi$) и безразмерный параметр β , характеризующий величину жесткости пружины ($\beta > 0$). Зависимость задачи об устойчивости колебаний (3.2), (3.4) от параметра γ , содержащегося в исходной функции Гамильтона (3.1), может проявиться только в нелинейных уравнениях возмущенного движения.

Пусть $\mathbf{X}(w)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы (3.6), удовлетворяющая условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица второго порядка. Через \mathbf{Y} обозначим матрицу $\mathbf{X}(w)$, вычисленную при $w = \pi$. Характеристическое уравнение линейной системы (3.6) записывается в виде

$$\varrho^2 - 2a\varrho + 1 = 0, \quad (3.9)$$

где

$$a = \frac{1}{2}(y_{11} + y_{22}). \quad (3.10)$$

Величина a — функция параметров α, β . В плоскости α, β области устойчивости выделяются неравенством $|a| < 1$; при $|a| > 1$ имеет место неустойчивость [5–7].

Используя свойство четности функции (3.8) по w , аналогично [8, 9] можно показать, что элементы x_{11}, x_{22} матрицы $\mathbf{X}(w)$ — четные, а x_{12}, x_{21} — нечетные функции w , а также что $y_{11} = y_{22}$. Из последнего равенства и симплектичности матрицы \mathbf{Y} следует, что на границах $|a| = 1$ областей устойчивости и неустойчивости выполняется равенство $y_{12}y_{21} = 0$, то есть хотя бы одна из величин y_{12} или y_{21} обращается в нуль.

Ниже излагаются результаты аналитического и численного исследования величины (3.10). Результаты иллюстрируются рисунками 6 и 7. На этих рисунках области неустойчивости заштрихованы.

Случай малых амплитуд колебаний ($0 \leq \alpha \ll 1$). В предельном случае $\alpha = 0$ функция (3.7) представляет собой гамильтониан гармонического осциллятора частоты ω_0 , задаваемой равенством (2.1):

$$H_2 = \frac{1}{2} [p_2^2 + (1 + 2\beta)q_2^2].$$

Области устойчивости и неустойчивости при малых, отличных от нуля значениях параметра α находятся при помощи теории параметрического резонанса [5–7].

Принимая во внимание π — периодичность функции Гамильтона (3.7) по независимой переменной w , находим, что в плоскости β, α при $0 < \alpha \ll 1$ области неустойчивости (области параметрического резонанса) исходят из точек $(\beta_n, 0)$ оси $\alpha = 0$, в которых $\omega_0 = n$, где n — произвольное натуральное число. В этих точках

$$\beta_n = \frac{1}{2}(n^2 - 1) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из каждой точки $(\beta_n, 0)$ исходят две граничные кривые, на которых $a = 1$ при четном n и $a = -1$ при n нечетном.

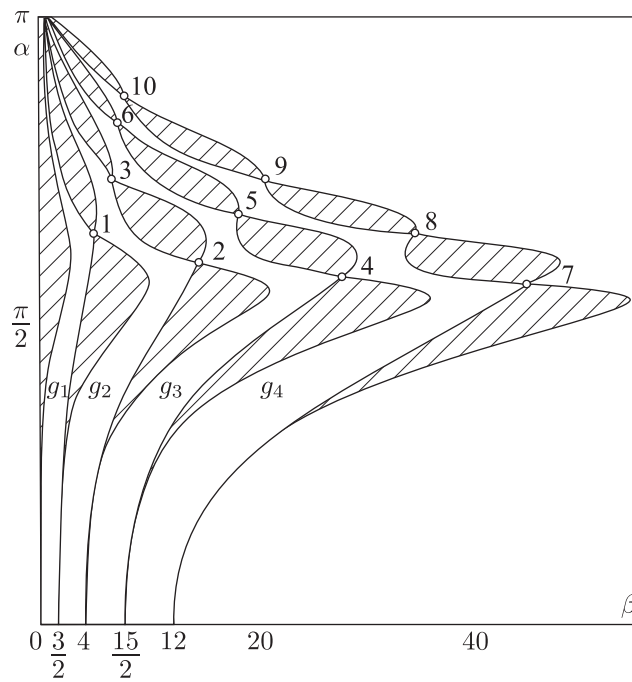


Рис. 6. Общий вид областей устойчивости и неустойчивости (области неустойчивости заштрихованы).

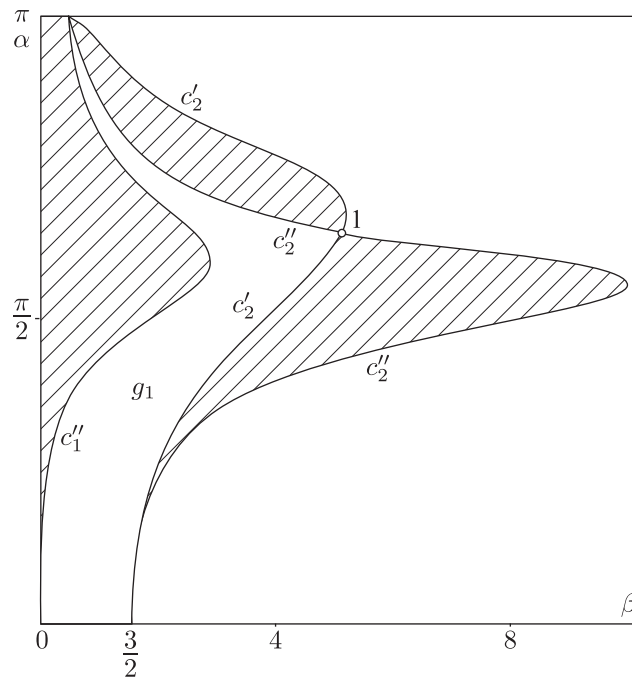


Рис. 7. Увеличенный фрагмент рис. 6.

Введем обозначения (для любых α). Области устойчивости, примыкающие при $\alpha \rightarrow 0$ к отрезку

$$\frac{1}{2}(n^2 - 1) < \beta < \frac{1}{2}[(n + 1)^2 - 1]$$

оси $\alpha = 0$, обозначим через g_n . Участки граничных кривых, на которых $y_{12} = 0$ (а $y_{21} \neq 0$), обозначим через c'_n , если n — четное число, и через c''_n , если n — нечетное число. Участ-

ки граничных кривых, на которых $y_{21} = 0$ (а $y_{12} \neq 0$), наоборот, обозначим через c'_n при нечетном n и через c''_n при n четном.

Уравнения $\beta = \beta'_n(\alpha)$ и $\beta = \beta''_n(\alpha)$ граничных кривых c'_n и c''_n представимы рядами по четным степеням α . При достаточно малых α величина β''_n больше величины β'_n , а область неустойчивости задается неравенством $\beta'_n < \beta < \beta''_n$. Кривые c'_n и c''_n в точке $(\beta_n, 0)$ имеют касание порядка $(2n - 1)$ (то есть величина β на кривой c'_n отличается от величины β на кривой c''_n в членах порядка α^{2n}).

На рисунке 6 показаны только первые пять из счетного множества областей параметрического резонанса и первые четыре области устойчивости g_n . Приведем приближенные уравнения границ этих областей:

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= 0, & \beta''_1 &= \frac{1}{8}\alpha^2 + O(\alpha^4); \\ \beta'_n &= k_n + k'_n\alpha^{2n} + O(\alpha^{2n+2}), & \beta''_n &= k_n + k''_n\alpha^{2n} + O(\alpha^{2n+2}) \quad (n = 2, 3, 4, 5); \\ k_2 &= \frac{3}{2} + \frac{5}{8}\alpha^2, & k'_2 &= \frac{9}{64}, & k''_2 &= \frac{33}{128}; \\ k_3 &= 4 + \frac{25}{16}\alpha^2 + \frac{2809}{6144}\alpha^4, & k'_3 &= \frac{13807}{147456}, & k''_3 &= \frac{22303}{147456}; \\ k_4 &= \frac{15}{2} + \frac{23}{8}\alpha^2 + \frac{1573}{1920}\alpha^4 + \frac{3259}{15360}\alpha^6, & k'_4 &= \frac{259736117}{6193152000}, & k''_4 &= \frac{406841117}{6193152000}; \\ k_5 &= 12 + \frac{73}{16}\alpha^2 + \frac{7895}{6144}\alpha^4 + \frac{80543}{245760}\alpha^6 + \frac{512638955}{6341787648}\alpha^8, \\ k'_5 &= \frac{2199816293}{140928614400}, & k''_5 &= \frac{3465906293}{140928614400}. \end{aligned}$$

Случай пружины малой жесткости ($0 < \beta \ll 1$). При достаточно малых β матрицу фундаментальных решений системы (3.6) можно представить в виде ряда по степеням β . Затем по формуле (3.10) можно найти ряд для величины a , определяющей характер устойчивости колебаний (3.2), (3.4). После проведения довольно громоздких выкладок, опирающихся на классическую теорию возмущений [10], получим

$$a = -1 + \beta a_1 + O(\beta^2),$$

где

$$a_1 = -2k \frac{d\mathbf{K}(k)}{dk} \int_0^{2\mathbf{K}(k)} [1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)]^2 \operatorname{cn}^2(u, k) du.$$

Величина a_1 отрицательна при любых значениях k . Поэтому если параметр β достаточно мал, то $a < -1$ и исследуемые колебания маятников неустойчивы.

Случай амплитуд колебаний, близких π . Для амплитуд, близких π , невозмущенные колебания (3.2), (3.4) отвечают малой окрестности сепаратрисы математического маятника с функцией Гамильтона (3.3). Во время движения маятники находятся вблизи их неустойчивого вертикального положения равновесия длительное время. На большей части периода колебаний величина q_1 близка π , и функция Гамильтона линеаризованных уравнений возмущенного движения (3.6) мало отличается от функции

$$H_2^* = \frac{\mathbf{K}(k)}{\pi} [p_2^2 + (2\beta - 1)q_2^2], \quad (3.11)$$

которая получается из функции H_2 , задаваемой формулой (3.7), если в ней положить $q_1 = \pi$.

Если $0 < \beta < 1/2$, то в системе с функцией Гамильтона (3.11) имеет место неустойчивость. Если же $\beta > 1/2$, то эта система устойчива, причем величины q_2, p_2 совершают колебания с частотой

$$\omega^* = \frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} \sqrt{2\beta - 1}. \quad (3.12)$$

Частота (3.12) отвечает независимой переменной w . Если бы независимой переменной была величина τ из (1.6), то частота упомянутых колебаний величин q_2, p_2 была бы равна величине ω_π , определяемой равенством (2.2).

Отброшенные при переходе от функции H_2 к функции H_2^* величины имеют период π относительно w . В системе (3.6) с функцией Гамильтона (3.7) они приводят к параметрическому резонансу. Кривые $\omega^* = s$ ($s = 1, 2, \dots$) в плоскости β, α являются порождающими для параметрического резонанса: из этих кривых в системе (3.6) рождаются области неустойчивости. При помощи равенства (3.12) уравнения порождающих кривых можно записать в виде

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left[\frac{\pi s}{\mathbf{K}(k)} \right]^2 \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (3.13)$$

При $\alpha \rightarrow \pi$ (то есть когда $k = \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow 1$) каждая из кривых (3.13) стремится к точке $(1/2, \pi)$, причем вблизи этой точки

$$\alpha \simeq \pi - 8 \exp\left(-\frac{\pi s}{2\sqrt{2\beta - 1}}\right) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

При фиксированном β вблизи прямой $\alpha = \pi$ существует счетное множество областей устойчивости и неустойчивости, причем их ширина (по α) при $\alpha \rightarrow \pi$ может стать меньше любого заданного положительного числа.

Прямая $\alpha = \text{const}$, близкая к прямой $\alpha = \pi$, высекает из областей неустойчивости интервалы, длина которых, вообще, может быть довольно значительной, но при достаточно больших β длина этих интервалов становится сколь угодно малой.

Результаты численного исследования. При произвольных значениях параметров устойчивость исследовалась путем вычисления величины (3.10) на компьютере. Результаты вычислений показаны на рисунках 6 и 7. Области неустойчивости заштрихованы (в них $|a| > 1$), а в незаштрихованных областях (где $|a| < 1$) колебания орбитально устойчивы в первом (линейном) приближении. Из счетного множества областей устойчивости и неустойчивости показаны только четыре области устойчивости g_1, g_2, g_3, g_4 и области неустойчивости, исходящие из пяти точек $(\beta_n, 0)$ оси $\alpha = 0$, в этих точках $\beta = 0, 3/2, 4, 15/2, 12$.

Опишем еще результаты исследования устойчивости на границах областей устойчивости и неустойчивости (где $|a| = 1$). При $n \geq 2$ граничные кривые, исходящие из точек $(\beta_n, 0)$, пересекаются в одной или нескольких точках. В области, представленной на рисунке 6, существует десять таких двойных точек $P_i(\beta_i, \alpha_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 10$). На рисунке они обозначены цифрами 1, 2, ..., 10:

$$\begin{aligned} &P_1(5.1610, 2.0241), P_2(14.5175, 1.8718), P_3(6.6912, 2.3520), P_4(27.7877, 1.8079), \\ &P_5(18.2805, 2.1270), P_6(7.4661, 2.5720), P_7(44.8822, 1.7706), P_8(34.2500, 2.0211), \\ &P_9(20.5261, 2.3043), P_{10}(7.8911, 2.7349). \end{aligned}$$

Наличие двойных точек приводит к «перекручиванию» областей неустойчивости (аналогично тому, как это происходит в уравнении Мейсснера [11–13]).



В двойных точках матрица \mathbf{Y} имеет диагональную форму $\mathbf{Y} = \mathbf{E}$, если n — четное, или $\mathbf{Y} = -\mathbf{E}$, если n — нечетное число. А на участках c'_n и c''_n граничных кривых у матрицы \mathbf{Y} отличен от нуля один из внедиагональных элементов и она не приводится к диагональной форме. Поэтому в первом (линейном) приближении на границах областей устойчивости и неустойчивости изучаемые нормальные колебания маятников всюду неустойчивы, кроме двойных точек, где имеет место устойчивость [5].

ЗАМЕЧАНИЕ. Качественное отличие свойств нормальных колебаний первого типа ($\varphi_1 = \varphi_2$) при $0 < \beta < 1/2$ и $\beta > 1/2$ объясняется бифуркационным характером значения параметра $\beta = 1/2$ (см. раздел 2 статьи). В окрестности вертикального положения маятников $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$ от движения $\varphi_1 = \varphi_2$ ответвляется семейство движений второго типа ($\varphi_1 = -\varphi_2$). Если $0 < \beta < 1/2$, то ответвившееся движение происходит в окрестности $\varphi_1 = -\varphi_2 = 0$, что свидетельствует о неустойчивости исследуемого движения ($\varphi_1 = \varphi_2$). А при $\beta > 1/2$ ответвившееся движение представляет собой колебания (с частотой (по τ), равной $\omega_\pi = \sqrt{2\beta - 1}$) в окрестности устойчивого равновесия $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi$ второго типа. Эти колебания и приводят к возникновению описанных выше счетных множеств областей устойчивости и неустойчивости вблизи прямой $\alpha = \pi$ при $\beta > 1/2$.

Список литературы

- [1] Зоммерфельд А. Механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 368 с.
- [2] Маркеев А. П. Нелинейные колебания симпатических маятников // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 3, с. 1–17.
- [3] Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. Москва–Ленинград: АН СССР, 1941. 235 с.
- [4] Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integral for engineers and physicists. Berlin: Springer, 1954. 355 pp.
- [5] Малкин И. Г. Теория устойчивости гамильтоновых систем. Москва: Наука, 1966. 530 с.
- [6] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. Москва: Наука, 1972. 718 с.
- [7] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 396 с.
- [8] Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва: ИИЛ, 1953. 256 с.
- [9] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Москва: Наука, 1967. 300 с.
- [10] Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. Москва: Наука, 1979. 319 с.
- [11] Meissner E. Über Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität // Schweizerische Bauzeitung, 1918, vol. 72, no. 11, pp. 95–98.
- [12] Вибрации в технике: В 6 тт.: Т. 1: Колебания линейных систем: Справочник / В. В. Болотин. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Машиностроение, 1999. 504 с.
- [13] Маркеев А. П. О нелинейном уравнении Мейсснера // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 531–547.

A motion of connected pendulums

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

A motion of two identical pendulums connected by a linear elastic spring with an arbitrary stiffness is investigated. The system moves in an homogeneous gravitational field in a fixed vertical plane. The paper mainly studies the linear orbital stability of a periodic motion for which the pendulums accomplish identical oscillations with an arbitrary amplitude. This is one of two types of nonlinear normal oscillations. Perturbational equations depend on two parameters, the first one specifies the spring stiffness, and the second one defines the oscillation amplitude. Domains of stability and instability in a plane of these parameters are obtained.

Previously [1, 2] the problem of arbitrary linear and nonlinear oscillations of a small amplitude in a case of a small spring stiffness was investigated.

MSC 2010: 70E55, 70H12, 70H14

Keywords: pendulum, nonlinear oscillation, stability

Received January 23, 2013, accepted March 1, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 27–38 (Russian)