



УДК: 517.925 + 517.3

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35

О существовании аттракторов лоренцевского типа в неголономной модели «кельтского камня»

А. С. Гонченко, С. В. Гонченко

В работе рассматривается неголономная модель движения кельтского камня по плоскости. Показано, что при определенных значениях параметров, характеризующих геометрические и физические свойства камня, в модели наблюдается странный аттрактор лоренцевского типа, для которого также прослежены сценарии его возникновения и разрушения.

Ключевые слова: кельтский камень, неголономная модель, аттрактор Лоренца, аттрактор лоренцевского типа для диффеоморфизмов, хаотическая динамика

1. Введение

Кельтский камень — это твердое тело на горизонтальной плоскости, обладающее свойством асимметрии относительно вращения вокруг вертикальной оси: если его вращение в одном направлении (например, по часовой стрелке) является устойчивым, то в противоположном направлении оно неустойчиво. Если попытаться закрутить камень в этом неустойчивом направлении (против часовой стрелки), он начнет замедлять свое вращение и сильно раскачиваться, затем меняет направление вращения на противоположное, раскачивания уменьшаются, и, в конце концов, он будет вращаться уже по часовой стрелке (в идеале (без трения) с той же угловой скоростью, что и в начале).

Задача исследования динамики движения кельтского камня на плоскости является одной из наиболее сложных и интересных задач динамики твердого тела вообще. Соответствующая неголономная модель (см. систему (2.1)) является неинтегрируемой, хотя и допускает

Получено 7 февраля 2013 года
После доработки 22 марта 2013 года

Работа поддержана грантами РФФИ No.11-01-00001, No.13-01-00589 и ФЦП «Кадр» No.14.B37.21.0361. Работа выполнена также при поддержке Федеральной программы “Scientific and scientific-educational brain-power of innovative Russia” (Contract No. 14.B37.21.0863).

Гонченко Александр Сергеевич
agonchenko@mail.ru

Гонченко Сергей Владимирович
gonchenko@pochta.ru

НИИ прикладной математики и кибернетики
603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 10



два интеграла — энергии и геометрический. Заметим, что сама система (2.1) шестимерна, а на совместном уровне двух интегралов она становится четырехмерной. Эта система обратима относительно замены времени $t \rightarrow -t$, а кроме того, она зависит от большого числа параметров, характеризующих, в частности, физические и геометрические свойства камня. Все это свидетельствует о том, что динамика системы может быть весьма богатой и разнообразной. Как показывают исследования, проведенные еще в работах А. Борисова и И. Мамаева [1, 2], это утверждение справедливо даже для устойчивых режимов, наблюдаемых в динамике кельтского камня, — перманентных вращений, периодических и квазипериодических движений, а также хаотической динамики. Что касается последней, то, как показано в недавних работах [3–5], она действительно весьма богатая. Здесь наблюдаются не только странные аттракторы (СА) различной природы, не только хаос, близкий к консервативному, но также и сравнительно мало исследованный, но весьма интересный тип хаоса, так называемая *смешанная динамика*. Последняя, как показано в работе [6], типична для обратимых систем, обладающих симметричными гомоклиническими и гетероклиническими траекториями. Что касается странных аттракторов, то они здесь могут быть также весьма различных типов: спиральные (шильниковские) СА, аттракторы типа «тор-хаос», даже аттракторы фейгенбаумовского типа [4].¹

Однако по-настоящему странным представляется то, что в хаотической динамике кельтского камня до сих пор не наблюдались аттракторы лоренцевского типа.² Хотя заметим, что и спиральные аттракторы, и аттракторы лоренцевского типа могут возникать (в частности, в трехмерных отображениях) в результате простых и универсальных бифуркационных сценариев, которые начинаются с бифуркации потери устойчивости неподвижной точки (или периодического аттрактора) [12, 15]. Для возникновения аттрактора лоренцевского типа характерен сценарий (см. рис. 1а)

- устойчивая неподвижная точка \Rightarrow устойчивая точка периода два \Rightarrow появление гомоклинической точки у седла O типа (2, 1);

а для спирального аттрактора — сценарий (см. рис. 1b)

- устойчивая неподвижная точка \Rightarrow замкнутая инвариантная кривая (тор) \Rightarrow появление гомоклинической точки у седло-фокуса O типа (1, 2).

По существу, различие состоит только в типе первой бифуркации потери устойчивости неподвижной точки: удвоение периода или бифуркация Андронова–Хопфа. В первом

¹Заметим, что последние — это те, которые меньше всего предполагалось обнаружить в динамике кельтского камня. Дело в том, что фейгенбаумовские аттракторы, ассоциируемые с бесконечным каскадом бифуркаций удвоения периода, характерны для сильнодиссипативных систем, тогда как модель кельтского камня в ограничении на уровнях двух интегралов (геометрического и энергии) является четырехмерным потоком (или трехмерным диффеоморфизмом, если рассматривать его отображение Пуанкаре), причем существенно слабодиссипативным. Для систем такого типа цепочки бифуркаций удвоения периода устойчивых периодических траекторий должны, типично, прерываться, например, бифуркациями Андронова–Хопфа [7, 8]. Так, в трехмерном отображении Эно $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (y, z, M_1 + Bx - z^2)$ уже при значениях якобиана $B \geq 1/3$ нет второго удвоения периода у устойчивой неподвижной точки [9]. Кроме того, даже в двумерном случае, параллельно с каскадом удвоений периода, могут возникать гомоклинические структуры и, соответственно, хаос проявляется еще до того, как процесс удвоений закончится [10].

²Более того, авторам неизвестны и другие примеры моделей из приложений, где обнаруживались бы аттракторы лоренцевского типа, кроме трехмерных отображений Эно [9, 11–13], в которых они, собственно, и были впервые найдены [9], а также тех моделей, которые непосредственно связаны со знаменитой системой Лоренца (см., например, обзор [14]).

случае устойчивая точка становится седлом с одномерным неустойчивым многообразием (точкой типа седло-минус $(2, 1)$, поскольку неустойчивый мультипликатор отрицателен), а во втором — с двумерным неустойчивым многообразием (седло-фокус типа $(1, 2)$).

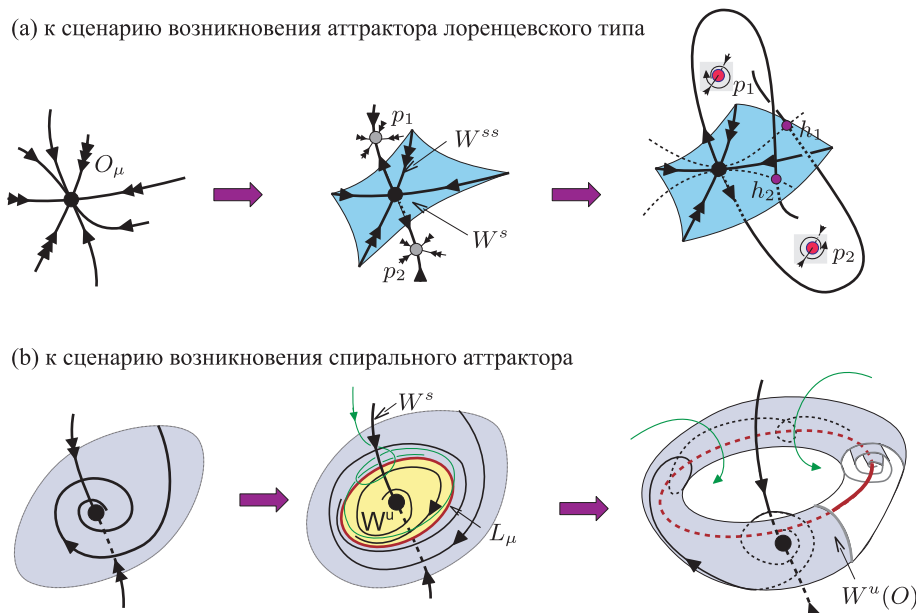


Рис. 1. Два основных пути, по [12], возникновения хаоса от устойчивой неподвижной точки к гомоклиническому СА, содержащему эту точку (очень схематично).

В настоящей работе мы показываем, что в модели кельтского камня (с параметрами, взятыми из работы [4]), все-таки существуют аттракторы лоренцевского типа. Мы также частично прослеживаем сценарии возникновения и разрушения таких аттракторов.

Далее содержание работы следующее. В §2 собраны необходимые сведения о рассматриваемой неголономной модели кельтского камня (по материалам работ [1, 2]). В §3 изложены основы теории аттракторов лоренцевского типа для диффеоморфизмов, а также описаны основные этапы исследования таких аттракторов в конкретных моделях, в данном случае — в однопараметрическом семействе трехмерных отображений Пуанкаре из модели кельтского камня. В §4 приведены результаты численного исследования этих отображений.

2. Уравнения движения кельтского камня

Мы изучаем динамику движения твердого тела по горизонтальной плоскости при условии, что проскальзывание отсутствует, то есть скорость тела в точке контакта с плоскостью равна нулю. Это условие можно записать в виде неголономной связи $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс G с точкой контакта R , а \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно. Считается, что координаты всех векторов заданы в некотором базисе, жестко связанном с телом. Хорошо известно (см. [1]), что уравнения движения твердого тела в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= M \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ — кинетический момент тела относительно точки контакта, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный орт вертикали, mg — вес тела. Уравнение (2.1) имеет два интеграла: *интеграл энергии* $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$ и *геометрический интеграл* $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$.

Мы рассматриваем кельтский камень в форме *эллиптического параболоида*. Тогда уравнение поверхности тела, $F(\mathbf{r}) = 0$, и координаты вектора $\boldsymbol{\gamma}$ задаются соотношениями (см. [1, 2])

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{a_1} + \frac{r_2^2}{a_2} \right) - (r_3 + h) = 0, \quad (2.2)$$

$$r_1 = -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 = -h + \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2},$$

где a_1, a_2 — радиусы главных кривизн при вершине параболоида, а h — высота центра масс, расположенного на оси параболоида. Предполагается также, что центр тяжести тела находится в точке $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, а одна из главных осей инерции является вертикальной. Отличительной особенностью кельтских камней является то, что две другие главные оси повернуты относительно геометрических осей на угол δ , где $0 < \delta < \pi/2$. Тогда тензор инерции в главных геометрических осях будет иметь вид [1]

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции параболоида.

В рассматриваемой задаче, как и во многих других разделах динамики твердого тела, весьма удобными для исследования являются *координаты Андуайе–Депри* (L, H, G, g, l) , которые вводятся по формулам

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \\ \gamma_1 &= (\sin \zeta \cos \tau + \sin \tau \cos \zeta \cos g) \sin l + \cos \zeta \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= (\sin \zeta \cos \tau + \sin \tau \cos \zeta \cos g) \cos l - \cos \zeta \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \sin \zeta \sin \tau - \cos \tau \cos \zeta \cos g, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\sin \tau = L/G$, $\sin \zeta = H/G$, $\tau, \zeta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и, по определению (см., например, [16]), $H = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2 + M_3 \gamma_3$.

Отметим, что новые координаты L, H, G, g и l выбраны так, что условие $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ выполняется автоматически. Тогда на уровне интеграла $\mathcal{H} = E = \text{const}$ уравнения (2.1) будут задавать четырехмерный поток \mathcal{G}_E , который и будет изучаться в работе. При этом трехмерные плоскости $g = g_0 = \text{const}$ (при подходящих g_0) можно рассматривать в качестве секущих для соответствующего четырехмерного потока. И тогда исследование динамики последнего можно проводить с помощью отображения Пуанкаре T_E [1, 2],

$$\bar{x} = \mathcal{F}_{g_0}(x, \mu), \quad x = \left(l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G} \right), \quad (2.5)$$

которое определено в области $0 \leq l < 2\pi$, $-1 \leq L/G \leq 1$, $-1 \leq H/G \leq 1$.

3. К определению аттракторов лоренцевского типа для диффеоморфизмов

Аттракторы лоренцевского типа образуют некоторый подкласс так называемых *псевдогиперболических аттракторов*, основы теории которых были построены в работах Тураева и Шильникова [17, 18]. Псевдогиперболичность означает, что выполняются следующие два свойства:

- 1) существуют инвариантные направления, вдоль которых динамическая система (поток или диффеоморфизм) является сильно сжимающей (здесь «сильно» означает, что любое возможное сжатие в трансверсальных направлениях всегда строго слабее), и
- 2) трансверсально к сжимающим направлениям система растягивает объемы.

Существует много разных определений аттрактора (см., например, [19]). Мы будем придерживаться определения из [17], в основе которого лежит понятие ε -траектории (Аносов, Рюэль, Конли и др.).³

Определение 1. Компактное инвариантное множество Λ называется *аттрактором*, если оно (i) *цепнотранзитивно*, то есть каждая точка множества Λ достижима из любой другой его точки по ε -траекториям, которые также принадлежат Λ , для любого достаточно малого ε , и (ii) *устойчиво*, то есть ε -траектории, стартующие вблизи множества Λ , никогда не покидают его некоторой малой окрестности.

Заметим, что так определенные (по Рюэлю–Тураеву–Шильникову) аттракторы сохраняют свои основные свойства также и при малых случайных возмущениях (шумах). Что касается свойств устойчивости этих аттракторов, то они могут быть описаны различными (эквивалентными) способами. Воспользуемся одним из них. Определим *пролонгацию* точки M из фазового пространства как множество всех его точек, достижимых от M по ε -траекториям для произвольно малого ε (соответственно, пролонгация некоторого множества — это объединение пролонгаций всех его точек). Заметим, что пролонгация любой точки/множества является всегда устойчивым замкнутым инвариантным множеством [17, 20]. Тогда

- *цепнотранзитивный аттрактор является всегда пролонгацией любой из его точек.*

Это важное свойство аттрактора как раз и является теоретической основой «рабочей стратегии» при нахождении аттракторов: найти пролонгацию подходящей точки и попытаться увидеть (доказать, догадаться, подтвердить), что она цепнотранзитивна. Это не всегда просто, и здесь на помощь могут прийти различные численные методы.

Определение 2 ([17, 18]). *Псевдогиперболический аттрактор* — это устойчивое цепнотранзитивное инвариантное множество с равномерно псевдогиперболической структурой.

³Напомним ее определение. Пусть $f: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм, заданный на некотором многообразии M , и пусть $\rho(x, y)$ — расстояние между точками $x, y \in M$. Последовательность точек $x_n \in M$, таких, что

$$\rho(x_{n+1}, f(x_n)) < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется ε -траекторией диффеоморфизма f .

Это определение весьма широкое. Класс систем с псевдогиперболическими аттракторами открыт в C^r -топологии ($r \geq 2$), он включает в себя системы с гиперболическими аттракторами, а также с аттракторами Лоренца.⁴

Заметим, что в работе [18] были исследованы динамические свойства геометрической модели Лоренца [21] при воздействии малых неавтономных периодических по времени возмущений. При этом было показано, что свойства псевдогиперболичности и цепной транзитивности невозмущенного аттрактора Лоренца выполняются также и для периодически возмущенного аттрактора. Поэтому отображение Пуанкаре (отображение за период возмущения) также имеет здесь псевдогиперболический аттрактор A , который является базовым примером *аттрактора лоренцевского типа для диффеоморфизмов*. Это настоящий СА, поскольку он сам и все C^r -близкие отображения не содержат устойчивых периодических точек (так как псевдогиперболичность — C^r -открытое свойство, а второе ее свойство влечет положительность старшего ляпуновского показателя у любой траектории).

Отметим, что седловое состояние равновесия аттрактора Лоренца невозмущенного потока будет теперь отвечать седловой неподвижной точке отображения Пуанкаре возмущенной системы. Тогда аттрактор A — это в точности множество всех тех точек, которые достижимы по положительным ε -полутраекториям, стартующим из неподвижной точки, для любого $\varepsilon > 0$, и это множество всегда цепнотранзитивно (когда возмущение мало) [18].

Те же самые заключения можно вывести и без предположения о том, что рассматриваемое отображение является отображением Пуанкаре периодического по времени потока, близкого к автономному. Для этого общего случая соответствующее определение аттрактора лоренцевского типа для диффеоморфизмов дано в [13], но мы его здесь не будем воспроизводить, в силу достаточной сложности и абстрактности. Однако смысл его такой. Сначала рассматривается надстройка над диффеоморфизмом f — это будет некоторый поток F_t . От потока F_t тогда требуется выполнение основных условий (цепной транзитивности, псевдогиперболичности и т. п.), которые выполняются для потока с периодически возмущенным аттрактором Лоренца из геометрической модели. Эти условия затем проверяются для исходного отображения.

Однако такой подход весьма трудно реализовать на практике, хотя он, конечно, имеет смысл при теоретических исследованиях. Вместо этого подхода в настоящей работе мы будем придерживаться следующей стратегии.

- 1) Проверяем геометрическое сходство с аттрактором Лоренца нашего аттрактора A_{E^*} , найденного в модели кельтского камня. В работе рассматривается СА, найденный при $E = E^* = 752$.

Это сходство будет состоять, в частности, в том, что наше трехмерное отображение T_{E^*} обладает следующими свойствами: (i) оно имеет седловую неподвижную точку O^* (на аттракторе A_{E^*}) с мультипликаторами $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$, такими, что $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1 < |\gamma|$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\gamma < -1$ и $|\lambda_1 \gamma| > 1$; (ii) многообразия $W^u(O)$ и $W^s(O)$ пересекаются; (iii) фазовые портреты «похожи» (см. рис. 2).

Заметим, что отрицательность мультипликаторов λ_2 и γ обеспечивает лоренцевскую симметрию ($x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$) в гомоклинической структуре. Кроме того, при значениях параметра E , близкого к E^* , многообразие W^u будет пересекать W^s строго с одной

⁴В частности, в известной геометрической модели аттрактора Лоренца, в окрестности аттрактора существует сильно сжимающее инвариантное слоение коразмерности 2, и поток экспоненциально растягивает площади в направлениях, трансверсальных этому слоению [21].

стороны от сильно устойчивого инвариантного многообразия $W^{ss}(O)$ (как на рис. 1), касающегося собственного направления в седле, отвечающего мультипликатору λ_2 , что дает «гомоклиническую конфигурацию восьмерки-бабочки», похожую на лоренцевскую.

2) Проверяем численно странность и псевдогиперболичность аттрактора A_{E^*} .

На этом этапе мы исследуем спектр $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ ляпуновских показателей отображения T на аттракторе A и показываем, что этот спектр, где $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$, удовлетворяет таким условиям: (1) $\Lambda_1 > 0$, (2) $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$, (3) $\Lambda_1 + \Lambda_2 > 0$. Условия (1) и (2) означают, что аттрактор A является странным, а условие (3) — что он псевдогиперболический (имеется растяжение площадей по двум направлениям, трансверсальным сильному сжатию, отвечающему показателю $\Lambda_3 < 0$).

3) Строим численно график зависимости старшего ляпуновского показателя Λ_1 от E на некотором интервале значений параметра E , содержащем то его значение, $E = E^*$, при котором существует аттрактор A_{E^*} (см. рис. 3).

На этом этапе мы проверяем (но только численно!), что наш аттрактор не является квазиаттрактором, то есть не содержит устойчивых периодических траекторий больших периодов, которые также не появляются и при возмущениях. Как видно из рисунка 3, искомый график весь находится в области $\Lambda_1 > 0$, описывается непрерывной функцией; если бы A_{E^*} был квазиаттрактором, то на графике наблюдались бы «провалы» с участками $\Lambda_1 < 0$, отвечающими «окнам устойчивости».

4) Исследуем численно основные бифуркации от устойчивой точки, приводящие к появлению аттрактора A , а также основные этапы его разрушения.

В принципе, этот этап может показаться необязательным, но он, как нам кажется, самый интересный, поскольку здесь можно проследить определенную «генетическую» связь между тем, что происходит в потоковых системах с аттрактором Лоренца (модель Лоренца, модель Шимицу–Мариока и т. п.) и в модели кельтского камня. Более того, как показывают вычисления, наше отображение Пуанкаре T_E при соответствующих значениях параметров во многом схоже с малым возмущением сдвига по времени автономного потока из геометрической модели Лоренца. Формально на это обстоятельство указывает то, что средний ляпуновский показатель Λ_2 близок к 0 (для случая потока он просто равен нулю), причем в процессе вычисления он демонстрирует малые колебания в пределах значений от 0.00007 до 0.00015 (см. дискуссию по этому поводу в [9]). Но что особенно интересно: бифуркации, приводящие здесь к возникновению СА, практически идентичны тем, которые сопровождают рождение СА в модели Лоренца ([23], см. § 4 и рис. 4b–f).

4. Численное исследование модели кельтского камня и сценарии перехода к лоренцевскому аттрактору

При численных расчетах мы используем модель кельтского камня с физическими параметрами

$$I_1 = 2, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 7, \quad m = 1, \quad g = 100, \quad a_1 = 9, \quad a_2 = 4, \quad h = 1, \quad (4.1)$$

а также $\delta = 0.485$, и изучаем динамику отображения Пуанкаре T_E (см. (2.5)) при $g_0 = 0$.⁵ Сами численные исследования проводились с помощью программного комплекса «Хаос», разработанного в Институте компьютерных исследований УдГУ.

Ниже мы приводим результаты численных исследований, выполненных согласно пунктам 1–4 программы из § 3.

1) На рисунке 2 показаны для сравнения (а) итерации одной точки на аттракторе A_{E^*} отображения T_E при $E = E^* = 752$ (выбран подходящий ракурс проецирования) и (б) проекция траекторий классического аттрактора Лоренца из модели Лоренца при $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ на плоскость (x, z) .

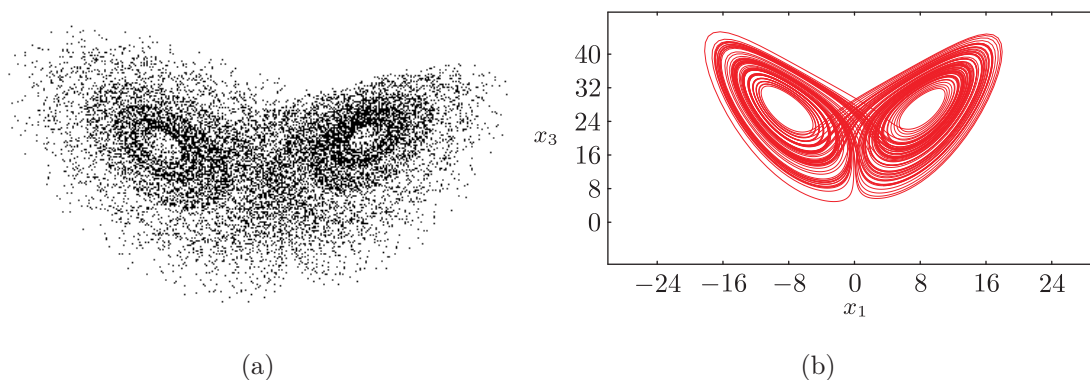


Рис. 2. (а) Аттрактор лоренцевского типа при $E = E^* = 752$ в модели кельтского камня (показано порядка 10 000 итераций некоторой начальной точки); (б) Проекция на плоскость (x, z) аттрактора Лоренца из системы Лоренца.

Седловая неподвижная точка O^* с координатами $l = 3.650$, $L/G = 0.669$, $H/G = -0.384$ на аттракторе A_{E^*} имеет мультипликаторы $\lambda_1 = 0.996$, $\lambda_2 = -0.664$, $\gamma = -1.312$. Если нарисовать ее неустойчивые многообразия («сепаратрисы»), то, как и ожидалось, они будут с «петлями» (результат существования гомоклинического пересечения, см. рис. 5а), в отличие от неустойчивых сепаратрис потокового аттрактора Лоренца, которые представляют собой вполне монотонные спирали.

2) Для аттрактора A_{E^*} при $E = E^* = 752$ спектр ляпуновских показателей получился следующим: $\Lambda_1 = 0.0248$, $\Lambda_3 = -0.2445$, $0.00007 < \Lambda_2 < 0.00015$.

Очевидно, что условия $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$ и $\Lambda_1 + \Lambda_2 > 0$ здесь выполнены.

3) На графике рисунка 3 показана зависимость старшего показателя $\Lambda_1 = \Lambda_1(E)$ от E на интервале $[752; 752.01]$ значений параметра E .

4) На рисунке 4 проиллюстрированы основные этапы возникновения аттрактора лоренцевского типа в отображении T_E при возрастании значений E от $E = 747$ до $E = E^* = 750$.

Сначала аттрактор у T_E — это устойчивая неподвижная точка O (рис. 4а), которая при $E = E_1 = 747.61$ претерпевает бифуркацию удвоения периода, и аттрактором становится устойчивый цикл $P = (p_1, p_2)$ периода 2, представленный на рисунке 4б (см. также рис. 1а). При $E = E_2 = 748.4395$ у отображения T_E образуется «гомоклиническая

⁵Заметим, что кельтский камень с параметрами (4.1) был рассмотрен в работе [4], в которой при значениях $E = 770$, $\delta = 0.405$ управляющих параметров E (энергии) и δ (угол асимметрии) был обнаружен аттрактор, весьма похожий на аттрактор рисунка 6f. Поскольку аналогичные аттракторы, как мы знаем, существуют у трехмерных отображений Эно [12, 13] вблизи границ разрушения лоренцевских аттракторов, естественно возникает вопрос: а нет ли в данной модели кельтского камня (при близких значениях параметров) аттрактора лоренцевского типа?

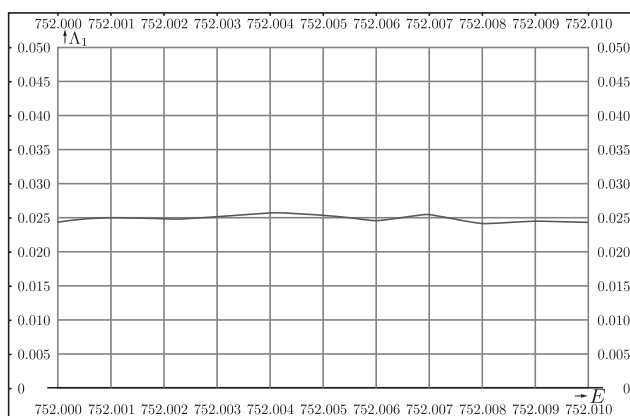


Рис. 3. Вид графика $\Lambda_1(E)$ на интервале $[752; 752.01]$.

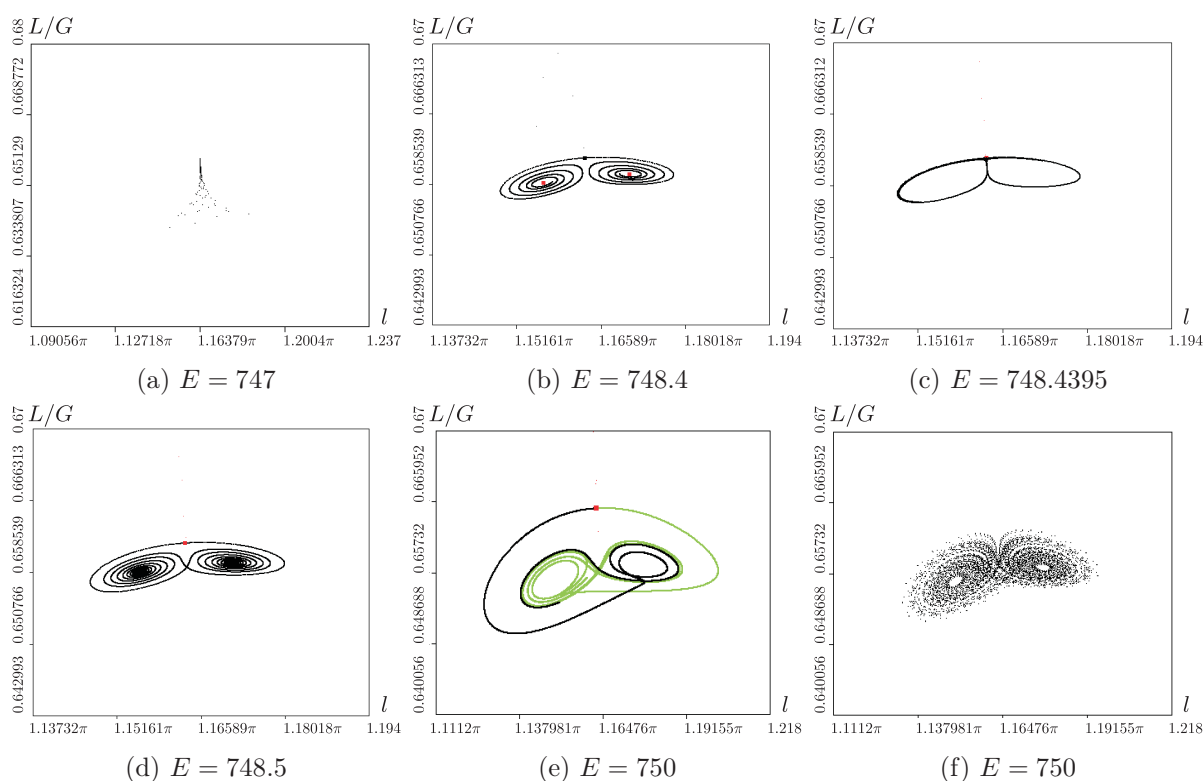


Рис. 4. Основные этапы возникновения аттрактора лоренцевского типа у отображения T_E . На рис. (а), (f) показаны итерации некоторой начальной точки, а на рис. (b)–(e) показаны неустойчивые многообразия (сепаратрисы) точки O .

восьмерка-бабочка» неустойчивых многообразий (сепаратрис) седла O (рис. 4с), из которой затем рождается седловая замкнутая инвариантная кривая $L = (L_1, L_2)$ периода 2 (где $T_E(L_1) = L_2, T_E(L_2) = L_1$), кривая L_1 окружает точку p_1 , а кривая L_2 — точку p_2 . При этом неустойчивые сепаратрисы седла O перестраиваются, и теперь, при $E_2 < E < E_3$, левая (правая) сепаратриса наматывается на правую (левую) точку цикла P (рис. 4d). Более того, вместе с рождением инвариантной кривой L периода 2 здесь возникает инвариантное предельное множество Ω [22, 23], которое не является пока притягивающим. Как показывает

численный счет, при $E = E_3 \sim 748.97$ сепаратрисы «ложатся» на устойчивое многообразие кривой L , затем сходят с него. Почти сразу после этого, при $E = E_4 \sim 748.98$, цикл P периода 2 жестко теряет устойчивость (бифуркация Андронова–Хопфа) — в него «влипают» инвариантная кривая L . Значение $E = E_4$ — это бифуркационный момент образования СА, здесь инвариантное множество Ω становится притягивающим. Уже при близких к $E = E_3$ (и $E > E_3$) значениях параметра сепаратрисы начинают раскручиваться (см. рис. 4е), их конфигурация становится похожей на лоренцевскую, что также относится и к фазовому портрету (см. рис. 4ф).

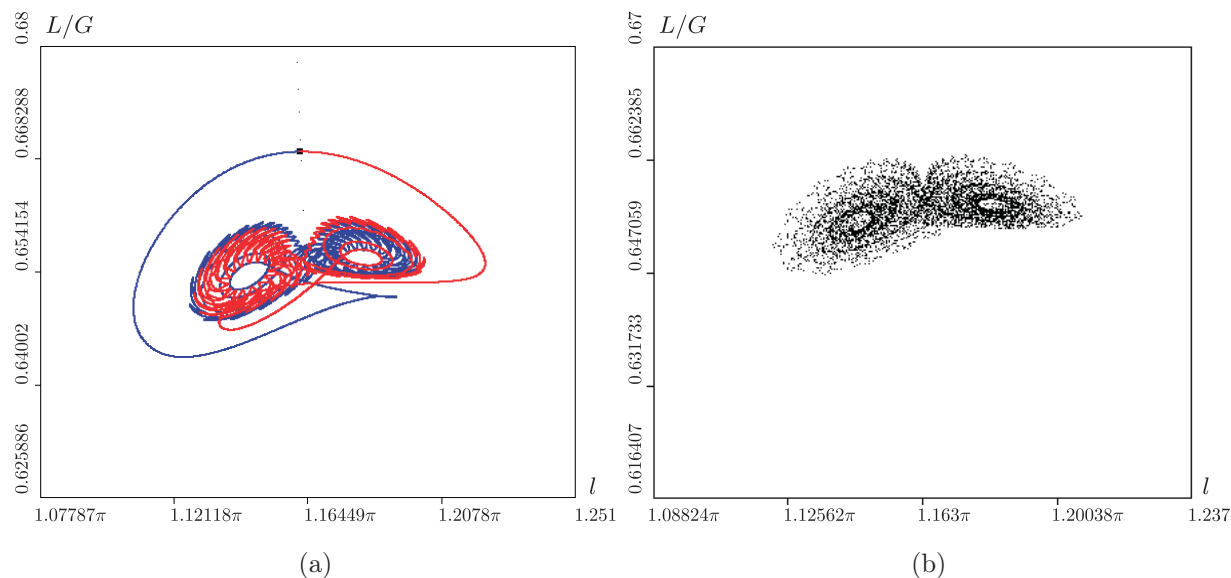


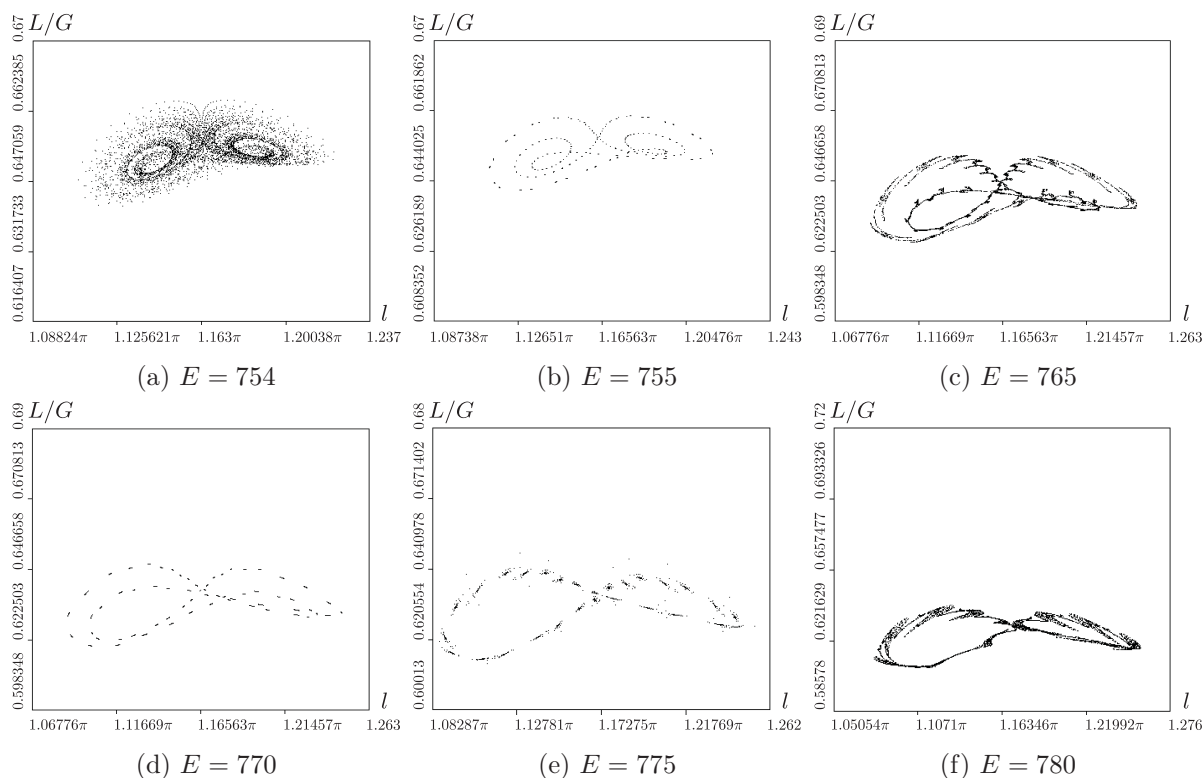
Рис. 5. Для эталонного значения $E = E^* = 752$ показаны (а) неустойчивые многообразия (сепаратрисы) точки $O = O^*$, (б) итерации некоторой начальной точки на аттракторе A_{E^*} (см. также рис. 2а).

На рисунке 5 показаны (а) вид многообразий $W^u(O^*)$ и (б) итерации точек на СА отображения T_E при выбранном нами (эталонном) значении параметра $E = E^* = 752$. Как раз этот аттрактор исследуется в пунктах 1)–3) выше.

На рисунке 6 показаны этапы разрушения аттрактора лоренцевского типа, которое связано с возникновением резонансных инвариантных кривых (рис. 6b, d, e), а также хаотических режимов (тор–хаос) (рис. 6с, f). Заметим, что при $E > 790$ от лоренцевского аттрактора «ничего не остается», а траектории из его окрестности убегают на новый устойчивый режим — спиральный аттрактор, наблюдавшийся в [3, 4].

5. Заключение

Как показано в работах [1–5], неголономная модель кельтского камня оказалась весьма интересной системой из приложений, которая демонстрирует хаотическую динамику разнообразных типов. Это и спиральный хаос, и смешанная динамика, и так называемый «квазиконсервативный хаос» и даже аттракторы фейгенбаумовского типа. В настоящей работе мы показали, что в некоторых моделях кельтского камня могут наблюдаться также и аттракторы лоренцевского типа. Последние следует относить, наряду с гиперболическими аттракторами и аттракторами Лоренца, к настоящим СА, так как они обладают псевдоги-

Рис. 6. Этапы разрушения аттрактора лоренцевского типа в семействе отображений T_E .

перболической структурой, которая запрещает существование устойчивых периодических траекторий как в аттракторе самой системы, так и всех близких.

Найденный нами аттрактор действительно нужно относить к семейству аттракторов лоренцевского типа, что подтверждено в работе численными экспериментами. Однако здесь следует иметь в виду, что такие эксперименты нельзя рассматривать в качестве доказательных вычислений (“computer assistant proof”). И дело здесь не только в отсутствии надлежащего контроля вычислений, а по существу в том, что математическая теория лоренцевских аттракторов для отображений еще только создается. Тем не менее, некоторые результаты (такие как, например, структура сценария перехода к хаосу, которая в нашем случае имеет ту же природу, что и в знаменитой системе Лоренца), можно считать доказанными. Другие же, такие как, например, проверка псевдогиперболичности с помощью ляпуновских показателей, следует рассматривать лишь только как косвенные (хотя весьма интересные и важные) свидетельства того, что найденный нами аттрактор является «настоящим». Однако та же самая проблема существует и в случае потоковых аттракторов Лоренца, хотя здесь достигнут гораздо больший прогресс [24, 25].

Аттракторы лоренцевского типа для диффеоморфизмов были впервые найдены в работе [9] у трехмерных отображений Эно вида $\bar{x} = y$, $\bar{y} = z$, $\bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2$; другие случаи отображений Эно, допускающих такие аттракторы, были указаны в [13]. Однако эти результаты, по большому счету, имеют чисто математический интерес. Что касается систем из приложений, то, насколько нам известно, рассмотренная в настоящей работе модель кельтского камня является первой, в которой обнаружены указанные аттракторы. Мы надеемся, что наша работа привлечет внимание специалистов к этой весьма интересной и перспективной тематике.

Благодарности. Авторы благодарят А. В. Борисова, А. О. Казакова и Д. В. Тураева за весьма полезные замечания и проявленный интерес к работе.

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 293–316.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 117, № 4, с. 407–418.
- [3] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 507–518.
- [4] Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной динамике «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 735–762.
- [5] Borisov A. V., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [6] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazaro J. T., Sten'kin O. V. Abundance of attracting, repelling and elliptic orbits in two-dimensional reversible maps // Nonlinearity, 2013, vol. 26, no. 1, pp. 1–35.
- [7] Гонченко С. В., Гонченко В. С. О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями // Тр. МИАН, 2004, т. 244, с. 87–114.
- [8] Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Tatjer J. C. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 3, pp. 233–266.
- [9] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simó C., Turaev D. V. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, pp. 3493–3508.
- [10] Dmitriev A. S., Komlev Yu. A., Turaev D. V. Bifurcation phenomena in the 1 : 1 resonant horn for the forced van der Pol–Duffing equation // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1992, vol. 2, no. 1, pp. 93–98.
- [11] Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation // Regul. Chaotic Dyn., 2006, vol. 11, no. 2, pp. 191–212.
- [12] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 3–28.
- [13] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Turaev D. V. Lorenz-like attractors in three-dimensional Hénon maps // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2013 (принято в печать).
- [14] Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Шлячков С. В. Странные аттракторы // Динамические системы–9 / Д. В. Аносов. (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 9.) Москва: ВИНТИ, 1999. С. 100–148.
- [15] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и турбулентность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / Е. А. Леонтович (отв. ред.) и др. Горький: ГГУ, 1986. С. 150–163.
- [16] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. 2-е изд. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

- [17] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб., 1998, т. 189, № 2, с. 137–160.
- [18] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Докл. РАН, 2008, т. 418, № 1, с. 23–27.
- [19] Аносов Д. В., Солодов В. В. Гиперболические множества // Динамические системы–9 / Д. В. Аносов. (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 9.) Москва: ВИНТИ, 1999. С. 12–99.
- [20] Auslander J., Seibert P. Prolongations and stability in dynamical systems // Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1964, vol. 14, fasc. 2, pp. 237–267.
- [21] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. ММО, 1982, т. 44, с. 150–212.
- [22] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // Докл. АН СССР, 1977, т. 234, с. 336–339.
- [23] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. Москва: Мир, 1980. С. 317–335.
- [24] Tucker W. The Lorenz attractor exists // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math., 1999, vol. 328, no. 12, pp. 1197–1202.
- [25] Tigan G., Turaev D. On the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // представлено в журнал Nonlinearity.

On existence of Lorenz-like attractors in a nonholonomic model of Celtic stones

Alexander S. Gonchenko¹, Sergey V. Gonchenko²

Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics

Ul'yanova st. 10, Nizhnii Novgorod, 603605, Russia

¹agonchenko@mail.ru, ²gonchenko@pochta.ru

We consider a nonholonomic model of movement of celtic stone on the plane. We show that, for certain values of parameters characterizing geometrical and physical properties of the stone, a strange Lorenz-like attractor is observed in the model. We have traced both scenarios of appearance and break-down of this attractor.

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35

Keywords: Celtic stone, nonholonomic model, the Lorenz attractor, Lorenz-like attractor for diffeomorphisms, chaotic dynamics

Received February 7, 2013, accepted March 22, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 77–89 (Russian)