



КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

Качение тел с регулярной поверхностью: теория управляемости и приложения

А. Мариго, А. Биччи

Пара тел, обладающих регулярной поверхностью и катящихся без скольжения одно по другому в пространстве, образует неголономную систему достаточно общего вида, для которой можно сформулировать некоторое число интересных задач управления, мало изученных ранее. Неголономность таких систем может быть использована в различных устройствах, полезных для робототехнических приложений. Для достижения всех принципиальных преимуществ, связанных с движением подобных систем, необходимо глубокое понимание их динамики, а также алгоритмов управления и планирования движением таких систем. В данной статье мы изучаем вопросы управляемости в системах такого типа, даем полное описание многообразия достижимости для двух тел общего вида и составляем алгоритм управления для планирования движения гибкого манипулятора мобильного робота.

Ключевые слова: неголономные системы, нелинейная теория управления, динамика гибких манипуляторов и мобильных роботов

1. Введение

С недавнего времени неголономные системы привлекают к себе все большее внимание специалистов по теории управления. Этот интерес вызван как практическими приложениями

Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: controllability theory and applications // IEEE Transactions on automatic control, vol. 45, no. 9, September 2000. Перевод с английского Ю. В. Колесниченко.

Алессиа Мариго
School for Advanced Studies (SISSA-ISAS),
Trieste, Italy
Interdept. Research Center “Enrico Piaggio” University of Pisa
56100 Pisa, Italy

Антонио Биччи
Department of Electrical Systems and Automation, University of Pisa
Interdept. Research Center “Enrico Piaggio” University of Pisa
56100 Pisa, Italy

ями неголономных систем (в частности, в робототехнике), так и теоретическими задачами планирования движения и управления такими системами [1, 2].

Напомним некоторые классические определения из теоретической механики. Рассмотрим механическую систему с n -мерным конфигурационным многообразием \mathcal{M} , на котором введены обобщенные координаты \mathbf{q} . Пусть обобщенные скорости $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$ удовлетворяют m локально независимым связям в пфаффово́й форме:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (1.1)$$

где \mathbf{A} — матрица $m \times n$ ($m < n$), элементами которой являются действительные аналитические функции. Связи называют *голономными*, если их дифференциальная форма (1.1) интегрируема. В этом случае существует семейство интегральных подмногообразий $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ размерности $n - m$, которое является инвариантным.

Если связи не являются голономными при некоторых обобщенных координатах \mathbf{q} , то будет существовать интегральное подмногообразие размерности $n - m + k$, $0 < k \leq m$. Число k называется степенью неголономности. Если $k = m$, то связи называют максимально неголономными.

В соответствии с определениями, сформулированными выше, свойство неголономности относится к связям, наложенным на систему, и обычно рассматривается как досадная неприятность, мешающая созданию простого алгоритма управления системой. Таково, например, мнение большинства водителей, испытывающих трудности при параллельной парковке своего автомобиля и даже не подозревающих, что трудности эти вызваны неголономностью автомобильной кинематики.

В данной работе мы будем придерживаться другой точки зрения. Удобная «управляемая» форма, описывающая систему со связями, может быть легко получена из дифференциальных связей (1.1). Действительно, если мы обозначим $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ матрицу размером $n \times (n - m)$, столбцы $\mathbf{g}_i(\mathbf{q})$, $i = 1, \dots, n - m$, которой образуют базис, аннулирующий распределение $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, тогда все допустимые скорости $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{A}(\mathbf{q})^\perp \subset T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$ могут быть записаны как линейные комбинации столбцов $\mathbf{G}(\mathbf{q})$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n-m} \mathbf{g}_i(\mathbf{q})\mathbf{w}_i, \quad (1.2)$$

где \mathbf{w} — это вектор *квазискоростей*, принимающий значения в \mathbb{R}^{n-m} . Если за квазискорости могут быть взяты некоторые наперед заданные функции времени $\mathbf{w}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $t \mapsto \mathbf{w}(t)$, то эти функции могут быть представлены как управляющие воздействия, приложенные к нелинейной (но линейной по управлениям) системе (1.2) с нулевым сносом. Каждое управляющее воздействие w_i реализуется с помощью некоторого *привода* (например в электромеханических системах роль такого привода играет мотор). Неголономность исходной системы, то есть неинтегрируемость уравнений (1.1), может быть доказана при помощи теоремы Фробениуса, с учетом того обстоятельства, что распределение $\text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \dots \mathbf{g}_{n-m}(\mathbf{q})\}$ в уравнении (1.2) не является инволютивным. Действительно, пусть Δ — наименьшее инволютивное распределение, содержащее столбцы матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{q})$, и пусть оно имеет размерность d . Тогда если $d > n - m$, то система является неголономной; если $d = n$, то система максимально неголономна. Следовательно, система может быть переведена из одной конфигурации своего n -мерного многообразия в другую вдоль $n - m$ векторных полей. Отметим, что все конфигурационное многообразие \mathcal{M} является многообразием равновесий

для системы с $w = 0$. Задача попадания на многообразии равновесий размерности большей, чем размерность пространства управлений, не имеет решения для произвольных линейных систем, однако (что удивительно) для неголономных систем она имеет решение.

С утилитарной инженерной точки зрения последнее утверждение может быть более просто переформулировано так: n -мерная неголономная система может быть управляема при помощи управляющих воздействий в количестве, меньшем n . Такая формулировка подчеркивает тот привлекательный факт, что для управления неголономной системой можно предложить более простые управляющие устройства, если неголономность специально введена в систему или правильно учтена в конструкции этих устройств. Примеры неголономных систем, управляемых в соответствии с этой философией, указаны в работах [3–7, 33].

Неголономные системы, возникающие в задачах о качении тел, частично относятся к динамике манипуляторов мобильных роботов. Одной из основных задач здесь является задача произвольного перемещения и переориентации объекта, захваченного манипулятором (схватом) мобильного робота. Для решения этой задачи манипулятор должен обладать свойством *гибкости*. Гибкие манипуляторы долгое время развивались на основе антропоморфной парадигмы, использующей в конструкции схвата большое число узлов и приводов (не менее девяти). Такой схват по конструкции слишком сложен, чтобы быть жизнеспособным индустриальным решением. Неголономные системы могут быть использованы в этой связи для устранения имеющихся ограничений. Действительно, в то время как качение без проскальзывания между поверхностью захваченного объекта и поверхностью пальцев манипулятора рассматривалось лишь как усложнение задачи, которым следует пренебречь, в работах [7, 8] была сделана попытка использовать качение для достижения гибкости при помощи простейших механических устройств.

В частности, несколько прототипов гибких манипуляторов были сконструированы в центре Э. Пьяджо университета в Пизе (Италия). Они используют не более четырех приводов (см. рис. 1 и рис. 2).

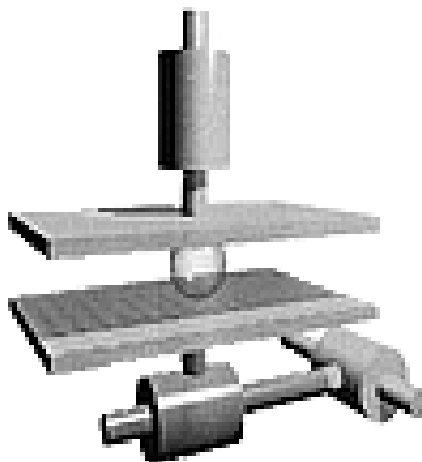


Рис. 1. Первое многофункциональное захватывающее устройство (DxGrip-I), разработанное в Центре Э. Пьяджо университета Пизы (Италия). Захватывающее устройство имеет два плоских параллельных зажима: верхний зажим обеспечивает усилие, необходимое для удержания тела, а нижний обеспечивает перемещение тела по плоскости, сообщая ему заданное качение. Произвольная конфигурация тела в контакте с пластинами достигается при помощи качения: полная гибкость всего манипулятора достигается посредством дополнительного вертикального перемещения всего захватывающего устройства. Это вертикальное перемещение осуществляется при помощи исполнительного механизма, не показанного здесь.

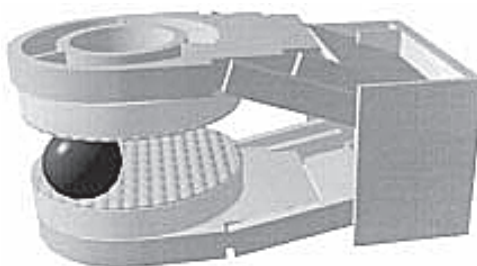


Рис. 2. Захватывающее устройство второго поколения (DxDrip-II). Захватывающее устройство имеет два параллельных зажима, способных перемещаться независимо друг от друга, и два поворачивающихся диска с безредукторными моторами на каждом зажиме. Зажимы снабжены также тактильными датчиками силы/момента. Данный рабочий орган может произвольно перемещать и поворачивать любое выпуклое тело с регулярной поверхностью посредством качения его между зажимами. Конструкция представляет промышленноориентированную версию устройства DxDrip-I.

Эти устройства могут выполнять различные манипуляции с захваченным объектом, катая его между пальцами. Они успешно использовались при работе с широким классом захваченных объектов и большим разнообразием поставленных задач. Эти схваты дублировали свойство гибкости и были сконструированы на основе гипотезы, которая называется *гипотезой обобщенной управляемости* (см. [7]).

Гипотеза. Пара тел может быть переведена из произвольной начальной конфигурации в произвольную конечную относительную конфигурацию посредством качения одного тела по другому, за исключением, может быть, случаев, когда такое качение невозможно.

В данной работе мы доказываем сформулированную гипотезу, точно характеризуем, качение каких пар тел не являются управляемым, и описываем структуру многообразия достижимости во всех случаях. Более того, мы рассматриваем вопрос конструктивной управляемости в данной задаче и предлагаем алгоритм, с помощью которого можно перевести систему из одной достижимой конфигурации в любую другую достижимую конфигурацию.

1.1. Родственные по тематике работы

Учет неголономных связей в описании конструкций робототехнических механизмов может расцениваться как намеренное повышение сложности модели, начиная от конструкции приводов и заканчивая программным обеспечением, реализующим алгоритм управления. Действительно, планирование движения и управление неголономными системами является существенно более трудной задачей, чем управление системами голономными. Сам факт, что число доступных для управления степеней свободы у неголономных систем меньше, чем общее число координат, описывающих систему, означает, что стандартная техника планирования движения не может быть непосредственно использована для таких систем. С точки зрения теории управления, неголономные системы являются, по существу, нелинейными системами (в том смысле, что они не могут быть непосредственно линеаризованы для последующего управления по методу обратной связи). Кроме того, линейное приближение неголономных систем не сохраняет фундаментальные характеристики такой системы, например управляемость. Простые, непрерывные законы управления по методу обратной связи не могут быть применены для стабилизации движения неголономных несингулярных систем [9].

Важным классом неголономных систем, для которого за последнее время было получено удовлетворительное понимание законов управления, являются системы, которые приводятся к нильпотентным системам с двумя управлениями. Эти системы при помощи преобразования с обратной связью могут быть представлены в так называемой цепной форме. Полное описание таких систем (т. е. необходимые и достаточные условия существования преобразования, приводящего систему к цепному виду) было впервые сделано в [10], а алгоритм для нахождения нужного преобразования в координатной форме был опубликован в работе [11]. Примером системы, приводимой к цепному виду, является автомобиль, к которому присоединено произвольное число прицепов. Эта система была описана в работе [12]. Алгоритмы планирования движения цепных систем в пространстве были описаны многими авторами [13, 14]. Методы авторов работ [15–17] используют кусочно-постоянные управления в разных вариациях и достигают довольно точного планирования движения цепных систем, поскольку кусочно-постоянные управления хорошо применимы к таким системам. Но в общем случае получены лишь приближенные, итеративные схемы планирования движения. Более того, цепные системы являются *дифференциально плоскими*, и потому к ним хорошо применима техника, предложенная авторами работы [18].

К сожалению, система двух твердых тел, катящихся одно по другому без проскальзывания, которая рассматривается в данной работе, существенно отличается от класса цепных систем. Рассмотрим, например, случай системы, называемой *шар между плоскостями*, которая является классической задачей теоретической механики. Внимание сообщества специалистов по теории управления к этой задаче было привлечено после публикации [13]. Система «шар между плоскостями» является пятимерной неголономной системой с двумя управлениями, которая не является дифференциально плоской [19] и может рассматриваться как частный случай известной задачи Картана с пятью переменными. Монтана [20] определил дифференциально-геометрическую модель неголономной связи между телами общего вида и обсуждал ее возможное применение в динамике манипуляторов. Авторы работы [21] показали, что система «шар между плоскостями» является управляемой и что управляемость имеет место для двух сфер разного радиуса, катящихся одна по другой. Автор [22] изучал проблему нахождения траектории, которая минимизирует длину кривой — следа точки касания сферы с неподвижной плоскостью. В его работе было отмечено, что оптимальные траектории минимизируют интеграл своей геодезической кривизны, и поэтому решение данной задачи будет таким же, как решение классической задачи об эластичах Эйлера. В [23] даны явные формулы для нахождения конечной конфигурации шара после круговых движений плоскости.

Данная работа состоит из четырех основных частей. Во второй части работы мы составляем полную математическую модель качения одной произвольной поверхности по другой. В третьей части приводятся основные теоремы, касающиеся доказательства сформулированной выше гипотезы, и изучается структура многообразия достижимости для системы катящихся тел. Наконец, в последней, четвертой части, мы описываем алгоритм планирования движения при манипулировании объектом произвольной формы, катящимся между двумя плоскостями.

2. Кинематическая модель качения двух тел

В этой части мы описываем вывод математической модели качения двух тел с регулярными поверхностями (раздел 2.1) и обсуждаем ограничения, связанные со взаимным непрониканием твердых тел при допустимом контакте (раздел 2.2). Кинематическая мо-

дель, описываемая в разделе 2.1, не является полностью новой; можно сравнивать наши результаты с теми, что были получены ранее в работах [20, 24], однако следует сказать, что мы использовали совершенно другой подход. Наш подход позволяет получить также те результаты, которые обсуждаются ниже, в разделе 2.2 (в частности, расчленение уравнений Монтаны на (2.10) и (2.16) позволяет выполнить анализ допустимости качения, который приводится в параграфе 2.2.2).

2.1. Кинематика катящихся поверхностей

Рассмотрим две произвольные регулярные поверхности S_1, S_2 , касающиеся друг друга в одной точке c , как показано на рисунке 3. В окрестности точки контакта данные поверхности описываются ортогональными координатами

$$\begin{aligned} \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)), \\ \mathbf{h}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{h}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y), h_3(x, y)). \end{aligned}$$

Используя эти параметризации, введем две гауссовы системы координат $G_1(u, v)$ и $G_2(x, y)$, определенные в каждой точке окрестности точки контакта, с осями $\hat{\mathbf{f}}_u = (\mathbf{f}_u^T / \|\mathbf{f}_u\|)$, $\hat{\mathbf{f}}_v = (\mathbf{f}_v^T / \|\mathbf{f}_v\|)$, $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v / \|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{f}_v\|)$ и $\mathbf{h}_x = (\mathbf{h}_x^T / \|\mathbf{h}_x\|)$, $\mathbf{h}_y = (\mathbf{h}_y^T / \|\mathbf{h}_y\|)$, $\mathbf{n}_2 = (\mathbf{h}_x \times \mathbf{h}_y / \|\mathbf{h}_x\| \|\mathbf{h}_y\|)$ соответственно. Здесь и далее мы будем использовать для краткости обозначения $\mathbf{f}_u = (\partial \mathbf{f} / \partial u)$ и т. д.

Для того чтобы учесть движение наших поверхностей как твердых тел, мы введем зависящие от времени аналоги тех геометрических объектов, которые были введены выше. Определим отображения: $\mathcal{G}'_i: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow SE(3) \times \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, по формуле $\mathcal{G}'_i = g_i(t) \circ \mathcal{G}_i$, где $g_i(t) = (\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i) \in SE(3)$. Слегка злоупотребляя краткими обозначениями, введем $\mathbf{f}(u, v, t) = g_1(t) \circ \mathbf{f}(u, v)$ и $\mathbf{h}(x, y, t) = g_2(t) \circ \mathbf{h}(x, y)$. Обозначим через $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega}) \in se(3)$ элементы касательного пространства к $SE(3)$.

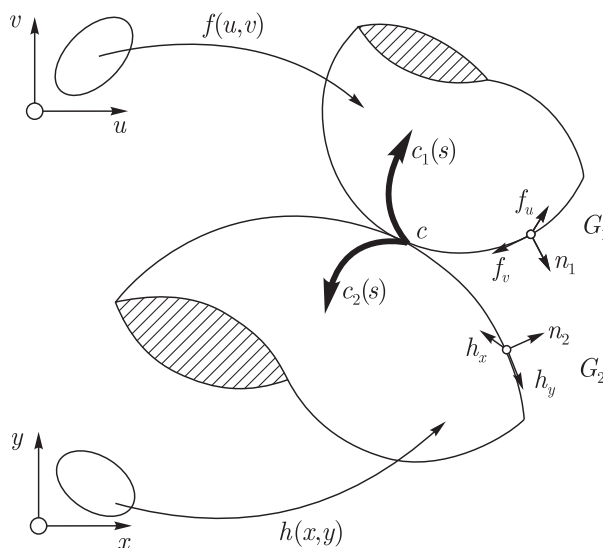


Рис. 3. Пара гладких поверхностей, катящихся одна по другой.

В точке контакта $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, а первые оси двух гауссовых систем координат образуют угол

$$\psi = -\arccos \hat{\mathbf{f}}_u^T \hat{\mathbf{h}}_x. \quad (2.1)$$

Локально конфигурационное пространство системы может быть представлено как 5-мерное многообразие M с координатами $\mathbf{q} = [u, v, x, y, \psi]^T$ на нем. Такой выбор параметризации прямо исключает очевидную голономную связь, выражающую условие, что компонента скорости точки касания, направленная вдоль общего вектора нормали к обеим поверхностям, равна нулю (другими словами, поверхности не проникают друг в друга).

Пусть при движении поверхностей точка контакта описывает на них две гладкие кривые $\mathbf{c}_1 = \mathbf{f}(u(s_1), v(s_1), t)$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{h}(x(s_2), y(s_2), t)$ (см. рис. 3), и пусть эти кривые параметризованы двумя натуральными параметрами s_1 и s_2 соответственно. Рассмотрим семейство жестких движений поверхности S_1 как твердого тела относительно поверхности S_2 , то есть будем считать S_2 фиксированной в пространстве. Точка контакта описывает кривые на обеих поверхностях с различными скоростями. Говорят, что поверхности катятся одна по другой без проскальзывания, если пути, пройденные точкой касания на одной поверхности и на другой за одно и то же время, равны: $s_1(t) \equiv s_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} s(t)$. Кроме того, точки поверхностей, пришедшие в данный момент в контакт, имеют нулевую относительную скорость:

$$\dot{\mathbf{c}}_1 = \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial s} \dot{s} = \dot{\mathbf{c}}_2 = \frac{\partial \mathbf{c}_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{c}_2}{\partial s} \dot{s}. \quad (2.2)$$

Это уравнение должно выполняться, в частности, и при $\dot{s} = 0$, а из предположения, что $g_2(t) \equiv Id$, следует легко переносная скорость поверхности S_1 , $\mathbf{t}_1(t) = (\partial \mathbf{f}(u, v, t) / \partial t)$ должна быть равна нулю, откуда следует, что $(\partial \mathbf{c}_1 / \partial t) = (\partial \mathbf{c}_2 / \partial t) = 0$. Поэтому из (2.2) мы получаем, что

$$\frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial s} = (\mathbf{f}_u u_s + \mathbf{f}_v v_s) = \frac{\partial \mathbf{c}_2}{\partial s} = (\mathbf{h}_x x_s + \mathbf{h}_y y_s). \quad (2.3)$$

Умножая обе части (2.3) на \mathbf{f}_u^T (т.е. рассматривая скалярное произведение), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_u\|^2 u_s &= \mathbf{f}_u^T \mathbf{h}_x x_s + \mathbf{f}_u^T \mathbf{h}_y y_s = \\ &= \|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{h}_x\| \cos(\psi) x_s - \|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{h}_y\| \sin(\psi) y_s. \end{aligned}$$

Аналогично, умножая обе части (2.3) на \mathbf{f}_v^T , получаем

$$\|\mathbf{f}_v\|^2 v_s = -\|\mathbf{f}_v\| \|\mathbf{h}_x\| \sin(\psi) x_s - \|\mathbf{f}_v\| \|\mathbf{h}_y\| \cos(\psi) y_s.$$

Разделим обе части полученных уравнений на \mathbf{f}_u и \mathbf{f}_v соответственно и обозначим $M_1 = \text{diag}(\|\mathbf{f}_u\|, \|\mathbf{f}_v\|)$, $M_2 = \text{diag}(\|\mathbf{h}_x\|, \|\mathbf{h}_y\|)$, тогда эти уравнения запишутся более компактно:

$$M_1 \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} - R_\psi M_2 \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

где матрица

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix}$$

учитывает взаимную ориентацию осей двух гауссовых систем координат в касательной плоскости. Заметим, что $R_\psi = R_\psi^{-1}$. Заметим также, что матрицы M_i являются симметричными, положительно определенными квадратными корнями первой квадратичной формы



соответствующей поверхности, то есть $M_i^T M_i = \mathcal{I}_i$ (т. е. римановой метрике i -ой поверхности $i = 1, 2$). Пфаффовая форма условия качения без проскальзывания (2.4) имеет вид

$$[M_1 \quad -R_\psi M_2 \quad 0] \dot{q} = 0. \quad (2.5)$$

Следует отметить, что взаимное вращение двух поверхностей вокруг вектора общей нормали возможно даже при наложенных связях (2.4). Этот тип вращательного движения очень тяжело реализовать в большинстве практических приложений, связанных с работой манипуляторов. Кроме того, зачастую трение и микродеформации в окрестности точки контакта приводят к тому, что угловая скорость такого вращения равна нулю. Поэтому и мы в дальнейшем исследовании будем считать, что проекция относительной угловой скорости ω на вектор общей нормали в точке касания равна нулю, то есть

$$n^T \omega = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (2.6)$$

Так как точка касания движется по обеим кривым $c_1(s)$, $c_2(s)$, то, дифференцируя (2.1) и замечая, что для любого единичного вектора z справедливо равенство $((d/ds)z)^T z = 0$, а также с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \hat{h}_x &= \hat{f}_u \cos \psi - \hat{f}_v \sin \psi, \\ \hat{f}_u &= \hat{h}_x \cos \psi - \hat{h}_y \sin \psi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\left(\frac{d}{ds} \hat{f}_u \right)^T (\hat{f}_v) + \left(\frac{d}{ds} \hat{h}_x \right)^T (\hat{h}_y) \right) \dot{s}. \quad (2.8)$$

Производя дифференцирование в явном виде и вводя обозначения для картановых форм кручения

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{f_v^T f_{uu}}{\|f_u\|^2 \|f_v\|} & \frac{f_v^T f_{uv}}{\|f_u\| \|f_v\|^2} \end{bmatrix}$$

и

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{h_y^T h_{xx}}{\|h_x\|^2 \|h_y\|} & \frac{h_y^T h_{xy}}{\|h_x\| \|h_y\|^2} \end{bmatrix},$$

можно переписать условие качения без вращения (2.8) вместе со связью (2.4) в пфаффовой форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} M_1 & -R_\psi M_2 & 0 \\ T_1 M_1 & T_2 M_2 & -1 \end{bmatrix} \dot{q} = 0. \quad (2.9)$$

Движение, подчиненное векторной связи (2.9), будем называть *чистым качением*.

Управляемая форма кинематической модели катящихся тел при условии качения без проскальзывания может быть получена вычислением аннулирующего распределения для связи (2.5) в виде

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ M_2^{-1} R_\psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

тогда как в случае чистого качения, вычисляя аннулирующее распределение для (2.9), имеем

$$\dot{q} = G(q)w = \begin{bmatrix} M_1^{-1} \\ M_2^{-1}R_\psi \\ T_1 + T_2R_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Выражения переменных, имеющих простой физический смысл, например компонент относительной угловой скорости ω двух тел, через псевдоскорости w (которые, как мы помним, играют роль управлений) могут быть получены следующим образом. Для любого единичного вектора z , фиксированного в твердом теле, движущемся с $\eta = (0, \omega) \in se(3)$, справедливо уравнение $\dot{z} = \omega \times z$. Решая это уравнение относительно ω , находим $\omega = z \times \dot{z} + \lambda z$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — неопределенный множитель. Применяя эти рассуждения к векторам n_1 , \hat{f}_u , фиксированным в S_1 , и n_2 , \hat{h}_x , фиксированным в S_2 , и выражая движение тел по отношению к неподвижному наблюдателю, связанному с общей касательной плоскостью в точке касания, получим условия

$$\omega_1 = n_1 \times \dot{n}_1 + \lambda_1 n_1 = \quad (2.12)$$

$$= \hat{f}_u \times \dot{\hat{f}}_u + \gamma_1 \hat{f}_u \quad (2.13)$$

$$\omega_2 = n_2 \times \dot{n}_2 + \lambda_2 n_2 = \quad (2.14)$$

$$= \hat{h}_x \times \dot{\hat{h}}_x + \gamma_2 \hat{h}_x. \quad (2.15)$$

Компоненты векторов ω_1 и ω_2 в проекции на оси гауссовых систем координат \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 соответственно, с учетом условий (2.12)–(2.15), имеют вид

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_1^T \hat{f}_u \\ \omega_1^T \hat{f}_v \\ \omega_1^T \hat{n}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{f}_v^T \dot{n}_1 \\ \hat{f}_u^T \dot{n}_1 \\ \hat{f}_v^T \dot{\hat{f}}_u \end{bmatrix},$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_2^T \hat{h}_x \\ \omega_2^T \hat{h}_y \\ \omega_2^T \hat{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{h}_y^T \dot{n}_2 \\ \hat{h}_u^T \dot{n}_2 \\ \hat{h}_y^T \dot{\hat{h}}_x \end{bmatrix}.$$

Относительная угловая скорость ω , выраженная в системе координат \mathcal{G}_1 имеет вид

$$\omega = \omega_1 + \left[\begin{array}{c|c} R_\psi & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \omega_2.$$

Записывая в явном виде производные векторов n_1 , n_2 , \hat{f}_u и \hat{h}_x и учитывая уравнения (2.10), находим

$$\omega = S \left[\begin{array}{c|c} -M_1^{-1}II_1M_1^{-1} - R_\psi M_2^{-1}II_2M_2^{-1}R_\psi & 0 \\ \hline -T_1 - T_2R_\psi & 1 \end{array} \right] w,$$

где $\mathcal{I}\mathcal{I}_i$ — это вторая квадратичная форма поверхности S_i , и

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Замечая, что

$$-M_1^{-1}\mathcal{I}\mathcal{I}_1M_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{f}_u^T \mathbf{n}_{1u}}{\|\mathbf{f}_u\|^2} & \frac{\mathbf{f}_u^T \mathbf{n}_{1v}}{\|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{f}_v\|} \\ \frac{\mathbf{f}_v^T \mathbf{n}_{1u}}{\|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{f}_v\|} & \frac{\mathbf{f}_v^T \mathbf{n}_{1v}}{\|\mathbf{f}_v\|^2} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1,$$

$$-M_2^{-1}\mathcal{I}\mathcal{I}_2M_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{h}_x^T \mathbf{n}_{2x}}{\|\mathbf{h}_x\|^2} & \frac{\mathbf{h}_x^T \mathbf{n}_{2y}}{\|\mathbf{h}_x\| \|\mathbf{h}_y\|} \\ \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{n}_{2x}}{\|\mathbf{h}_x\| \|\mathbf{h}_y\|} & \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{n}_{2y}}{\|\mathbf{h}_y\|^2} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2,$$

где \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 — формы кривизны двух поверхностей, и вводя относительную форму кривизны

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_1 + \mathbf{R}_\psi \mathbf{K}_2 \mathbf{R}_\psi,$$

запишем связь между $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{w} в более компактной форме:

$$\boldsymbol{\omega} = S \begin{bmatrix} \mathbf{K}_R & 0 \\ -\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 \mathbf{R}_\psi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Если используется модель, в которой отсутствует взаимное вращение, то достаточно в (2.16) положить $w_3 = 0$ (см. (2.6)).

2.2. Допустимость контакта качения

Контакт качения двух непроницаемых твердых тел накладывает некоторые дополнительные связи, отличные от тех, которые были рассмотрены в предыдущем разделе для геометрических поверхностей. В дальнейшем мы будем моделировать движущиеся объекты как замкнутые подмножества пространства \mathbb{R}^3 , нормальный вектор к которым, по договоренности, будет направлен во внешнюю сторону. Впоследствии мы будем различать условия контакта *per se* и условия качения и иметь дело и с теми, и с другими.

2.2.1. Допустимость контакта

Определение 3. Контакт является локально допустимым, если пересечение внутренних частей объектов в окрестности B_c точки контакта $\mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{h}(\bar{x}, \bar{y})$ — пустое множество.

Простейшие условия допустимости контакта могут быть сформулированы следующим образом.



Лемма 1. Если контакт между двумя поверхностями в точке $\mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{h}(\bar{x}, \bar{y})$ с относительно ориентацией ψ локально допустим, то относительная форма кривизны \mathbf{K}_R является неотрицательно определенной. Если форма \mathbf{K}_R положительно определена, то контакт является локально допустимым.

Доказательство. Локальная допустимость эквивалентна следующему утверждению: для любых двух точек $\mathbf{f}(u, v)$, $\mathbf{h}(x, y)$ на $S_1 \cap B_c$ и $S_2 \cap B_c$, для которых вектор $\mathbf{f}(u, v) - \mathbf{h}(x, y)$ параллелен нормали к точке контакта, выполняется условие

$$(\mathbf{f}(u, v) - \mathbf{h}(x, y))^T \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1^T \mathbf{f}(u, v) + \mathbf{n}_2^T \mathbf{h}(x, y) \leq 0. \quad (2.17)$$

Рассмотрим разложение функции $\mathbf{f}(u, v)$ в ряд около точки контакта. Расстояние до касательной плоскости, построенной в точке контакта, определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1^T \mathbf{f}(u, v) &\approx \mathbf{n}_1^T \mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{1u}^T \mathbf{f}_u(\delta u)^2 + \mathbf{n}_{1u}^T \mathbf{f}_v(\delta u)(\delta v) + \\ &\quad + \mathbf{n}_{1v}^T \mathbf{f}_u(\delta u)(\delta v) + \mathbf{n}_{1v}^T \mathbf{f}_v(\delta v)^2] = \\ &= \mathbf{n}_1^T \mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v}) - \frac{1}{2} [\delta u \quad \delta v] \mathbf{M}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\delta u = (u - \bar{u})$ и $\delta v = (v - \bar{v})$. При получении этого соотношения мы использовали условие ортогональности между \mathbf{n}_1 , $\hat{\mathbf{f}}_u$ и $\hat{\mathbf{f}}_v$. Аналогично для второй поверхности имеем

$$\mathbf{n}_2^T \mathbf{h}(x, y) \approx \mathbf{n}_2^T \mathbf{h}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{1}{2} [\delta x \quad \delta y] \mathbf{M}_2 \mathbf{K}_2 \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}.$$

Точки $\mathbf{f}(u, v)$, $\mathbf{h}(x, y)$, в которых вектор $\mathbf{f}(u, v) - \mathbf{h}(x, y)$ параллелен \mathbf{n}_1 , имеют одни и те же координаты ζ, ξ в проекции на касательную плоскость. Следовательно, их координаты относительно точки контакта могут быть найдены по формулам

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1^{-1} \begin{bmatrix} \delta \zeta \\ \delta \xi \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{R}_\psi \begin{bmatrix} \delta \zeta \\ \delta \xi \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем

$$\mathbf{n}_2^T \mathbf{h}(x, y) \approx \mathbf{n}_2^T \mathbf{h}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{1}{2} [\delta u \quad \delta v] \mathbf{M}_1^T \mathbf{R}_\psi \mathbf{K}_2 \mathbf{R}_\psi \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}.$$

Условие допустимости контакта (2.17) в окрестности точки контакта с учетом этих условий может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2} [\delta u \quad \delta v] \mathbf{M}_1 \mathbf{K}_R \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} \geq 0.$$

Необходимое условие, что \mathbf{K}_R должна быть неотрицательно определенной формой, непосредственно следует из полученного неравенства. С другой стороны, если \mathbf{K}_R — положительно определенная форма, то найдется такая окрестность B_c , в которой контакт



будет допустимым. Тем самым доказана достаточность сформулированных условий. Более того, точка контакта является изолированной в этой окрестности. Пара поверхностей, расположенных так, что \mathbf{K}_R является положительно определенной, называется *относительно строго выпуклой*. Если $\text{rank}(\mathbf{K}_R) = 1$ и \mathbf{K}_R неотрицательно определена, то контакт может быть не допустим. Если же он допустим, то существует одномерное многообразие точек контакта (касательным слоением к этому многообразию является множество $\ker(\mathbf{K}_R)$). Пара поверхностей, находящихся в такой конфигурации, называется *относительно слабо выпуклой*. Если $\text{rank}(\mathbf{K}_R) = 0$, то контакт может быть не допустим. Если же он допустим, то существует двумерное многообразие точек контакта. Такая пара поверхностей называется *относительно плоской*, или *конформальной*. Заметим, что такое представление является строго локальным. Если \mathbf{K}_R не определена или неположительно определена, контакт не является допустимым.

2.2.2. Допустимость качения

Определение 4. Взаимное качение двух поверхностей, находящихся в допустимом контакте, допустимо по отношению к неголономным связям (2.5) (соответственно, (2.9)), если существует некоторая ненулевая относительная угловая скорость, такая, что связи (2.5) [(2.9)] удовлетворяются в каждой точке контакта. Про допустимое качение говорят, что оно имеет p степеней свободы, если существует p -мерное линейное пространство угловых скоростей, удовлетворяющих (2.5) [(2.9)].

Лемма 2. Локально в окрестности конфигурации с допустимым контактом возможны степени свободы допустимого качения (представлены в табл. 1).

Случай $\text{rank} \mathbf{K}_R = 1$, $p = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда контактное многообразие линейно.

Доказательство. Вернемся к соотношению (2.16) между относительной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и квазискоростью \mathbf{w} . Напомним также, что при условиях (2.9) имеем $w_3 = 0$. Отсюда сразу следуют два случая с $\text{rank} \mathbf{K}_R = 2$ и $\text{rank} \mathbf{K}_R = 0$ при условиях (2.9).

Когда контактное многообразие не является изолированной точкой, условие (2.5) должно выполняться в каждой точке контактного многообразия. Поскольку при наличии вращения $\omega_3 = w_3$ может существовать только одна неподвижная ось и эта ось нормальна к обеим поверхностям, то w_3 должна обращаться в нуль, чтобы исключить скольжение в некоторых точках контактного многообразия. Следовательно, выполнения условия (2.4) достаточно для одновременного выполнения двух условий — (2.4) и (2.8). Отсюда следует случай $\text{rank} \mathbf{K}_R = 0$ при условии (2.5).

Если $\text{rank} \mathbf{K}_R = 1$, то, используя тот факт, что левый верхний блок размером 2×2 матрицы \mathbf{S} кососимметричен и что $\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_R^T$, получаем

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \in \text{range}(\mathbf{K}_R) \Rightarrow \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \in \ker(\mathbf{K}_R). \quad (2.18)$$

Из условия, что для всех точек твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ является одним и тем же, а также учитывая, что $\ker(\mathbf{K}_R)$ является касательным слоением к контактному многообразию и оно одномерно, можно сделать вывод, что контактное многообразие представляет собой отрезок. Качение в этом случае возможно вдоль оси, включающей в себя этот отрезок (например, в случае качения по горизонтальной плоскости цилиндра или конуса).

Таблица 1. Степени свободы допустимых качений

	Связи (2.5)	Связи (2.9)
$\text{rank}(\mathbf{K}_R) = 2$	$p = 3$	$p = 2$
$\text{rank}(\mathbf{K}_R) = 1$	$p \leq 1$	$p \leq 1$
$\text{rank}(\mathbf{K}_R) = 0$	$p = 0$	$p = 0$

Основываясь на двух предыдущих леммах, мы произвели классификацию всевозможных допустимых пар катящихся тел. Эта классификация содержится в приложении А.

3. Изучение многообразия достижимости

В этой части мы исследуем гипотезу, сформулированную во введении, и более подробно изучим степень неголономности связей (2.5) и (2.9) путем анализа структуры многообразия достижимости для управляемых систем (2.10) и (2.11) соответственно. Прежде всего, сосредоточим наше внимание на случае, когда на систему наложены неголономные связи (2.9), то есть имеет место случай чистого качения. Другими словами, в первую очередь будем изучать управляемую форму (2.11) кинематики чистого качения.

Заметим, что в (2.11) управления \mathbf{w} могут быть подчинены ограничениям, вызванным (в силу (2.16)) ограничениями на допустимые угловые скорости $\boldsymbol{\omega}$, как это описывалось в разделе 2.2. Например, для двух конформальных поверхностей, имеющих $\text{rank}(\mathbf{K}_R) = 0$ и нулевое число степеней свободы (см. табл. 1), уравнение (2.11) вырождается в тривиальное уравнение $\dot{\mathbf{q}} = 0$ в силу того, что $\mathbf{w} = 0$.

3.1. Относительно слабо выпуклые тела

Рассмотрим допустимый контакт пары относительно слабо выпуклых тел, которые в данный момент времени имеют одну степень свободы. В силу уравнений (2.16) и (2.18), $\boldsymbol{\omega} \in \ker(\mathbf{K}_R) \Rightarrow \mathbf{w} \in \text{range}(\mathbf{K}_R)$, следовательно, управляемая форма (2.11) имеет только одно независимое управление в такой конфигурации.

Если множество конфигураций, для которых $\text{rank} \mathbf{K}_R = 1$ является открытым множеством в конфигурационном многообразии \mathcal{M} , управляемая система (2.11) имеет единственное неособенное управляемое векторное поле, которое, очевидно, является инволютивным. Поэтому многообразие достижимости является в данном случае одномерным подмногообразием конфигурационного многообразия \mathcal{M} . Примером такой ситуации может быть движение цилиндра (или конуса) по горизонтальной плоскости, для которого допустимая угловая скорость всегда перпендикулярна линии контакта.

Если, с другой стороны, $\text{rank} \mathbf{K}_R = 1$ на подмногообразии \mathcal{M} , включающем конфигурацию контакта $\bar{\mathbf{q}}$, управляемая система (2.11) имеет особенность в $\bar{\mathbf{q}}$. В силу аналитичности многообразия и уравнений, описывающих управление, для движения системы будут существовать максимальные интегральные подмногообразия [25]. Однако размерность этих подмногообразий меняется от единицы (как в случае двух цилиндров, катящихся один по другому с сонаправленными осями) до пяти. Примером последнего случая может служить конус, катящийся по цилиндру и имеющий в начале качения ось, сонаправленную с осью



цилиндра. Тогда всякое бесконечно малое качение конуса переводит относительную конфигурацию из особого случая (в котором $\text{rank } \mathbf{K}_R = 1$) в случай относительно выпуклых тел ($\text{rank } \mathbf{K}_R = 2$). Максимальная неголономность в этом случае будет следовать из теоремы 11, сформулированной в следующем разделе.

3.2. Относительно выпуклые тела

Рассмотрим теперь подлинный случай трехмерного качения, когда точка контакта изолирована, матрица \mathbf{K}_R имеет полный ранг и система имеет две степени свободы. Основным результатом этой работы можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. *Условия чистого качения (2.9) между двумя относительно строго выпуклыми поверхностями являются*

- a) голономными связями — в том случае, если тела представляют собой зеркальное отражение друг друга (относительно общей касательной плоскости, проходящей через точку контакта),
- b) максимально неголономными связями — в противном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В терминах теории нелинейного управления это утверждение может быть переформулировано так:

- a) $\dim \langle \mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) | \mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \rangle = 2$ для зеркального отражения,
- b) $\dim \langle \mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) | \mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \rangle = 5$ — в противном случае,

где $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ обозначают векторные поля, образующие столбцы матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ в уравнении (2.11), а $\langle \cdot | \cdot \rangle$ обозначает наименьшее распределение, содержащее второй аргумент и инвариантное под действием скобки Ли с первым аргументом.

Грубо говоря, два тела называются зеркальными, если локально в окрестности точки контакта одно тело есть зеркальное отражение другого. Математическое определение зеркальности формулируется следующим образом. Напомним, что образ поверхности $\mathbf{h}(x, y)$, движущейся как твердое тело, движение которого описывается элементом $g = (\mathbf{R}, \mathbf{z}) \in SE(3)$, определяется как $g \circ \mathbf{h}(x, y) = \mathbf{R}\mathbf{h}(x, y) + \mathbf{z}$. Пусть $s = (\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbf{t}})$, где $\widehat{\Sigma} \in O(3)$, $\det(\widehat{\Sigma}) = -1$, и $\widehat{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^3$ обозначает симметрию. В частности, если взять $\widehat{\Sigma} = \widehat{\mathbf{R}}\Sigma\widehat{\mathbf{R}}^T$, где

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{R}} &= \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}_u(\bar{u}, \bar{v}) & \widehat{\mathbf{f}}_v(\bar{u}, \bar{v}) & \widehat{\mathbf{f}}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times \widehat{\mathbf{f}}_v(\bar{u}, \bar{v}) \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{t}} &= -\widehat{\mathbf{R}}(\Sigma - Id)\widehat{\mathbf{R}}^T \mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

то поверхность $s \circ \mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \widehat{\Sigma}\mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v}) + \widehat{\mathbf{t}}$ является поверхностью, симметричной к поверхности $\mathbf{f}(u, v)$ относительно плоскости, касательной к $\mathbf{f}(u, v)$ и проходящей через точку контакта $\mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v})$.

Определение 5. Поверхность $\mathbf{h}(x, y)$ считается зеркальным отображением поверхности $\mathbf{f}(u, v)$ в точке $\mathbf{f}(\bar{u}, \bar{v})$, если существуют твердотельное движение $g = (\mathbf{R}, \mathbf{z})$, симметрия $s = (\widehat{\mathbf{R}}\Sigma\widehat{\mathbf{R}}^T, \widehat{\mathbf{t}})$, определяемая по (3.1), и диффеоморфизм $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi: (x, y) \mapsto (u, v)$, такой, что $g \circ \mathbf{h}(x, y) = s \circ \mathbf{f} \circ \Phi(x, y)$.

Еще раз явно укажем здесь, что поверхность и ее зеркальный образ имеют единственную общую точку, а роль зеркала играет касательная плоскость, построенная в этой точке контакта.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Если две поверхности являются зеркальными, то замена координат $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, упоминаемая в определении 5, является отображением, якобиан которого \mathbf{J}_Φ имеет одну из двух форм, указанных ниже:*

$$\mathbf{J}_\Phi = \pm \begin{bmatrix} \frac{\|\mathbf{h}_x\|}{\|\mathbf{f}_u\|} & 0 \\ 0 & -\frac{\|\mathbf{h}_y\|}{\|\mathbf{f}_v\|} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{J}_\Phi = \pm \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|\mathbf{h}_x\|}{\|\mathbf{f}_v\|} \\ \frac{\|\mathbf{h}_y\|}{\|\mathbf{f}_u\|} & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Предположим, что $g \circ \mathbf{h}(x, y) = s \circ \mathbf{f} \circ \Phi(x, y)$, тогда

$$\begin{aligned} (g \circ \mathbf{h})_x &= (s \circ \mathbf{f} \circ \Phi)_x \Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{h}_x = \widehat{\Sigma}\mathbf{f}_u u_x + \widehat{\Sigma}\mathbf{f}_v v_x, \\ (g \circ \mathbf{h})_y &= (s \circ \mathbf{f} \circ \Phi)_y \Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{h}_y = \widehat{\Sigma}\mathbf{f}_u u_y + \widehat{\Sigma}\mathbf{f}_v v_y. \end{aligned}$$

Из условия ортогональности локальных координат следует, что скалярное произведение $(\mathbf{R}\mathbf{h}_x)^T(\mathbf{R}\mathbf{h}_y) = \|\mathbf{f}_u\|^2 u_x u_y + \|\mathbf{f}_v\|^2 v_x v_y$ равно нулю. Следовательно, одновременное выполнение трех условий $u_x u_y = 0$, $v_x v_y = 0$ и $\text{rank } \mathbf{J}_\Phi = 2$ означает, что или $u_x, v_y \neq 0$, $u_y = v_x = 0$, или $u_x = v_y = 0$, $u_y, v_x \neq 0$. Предположим, что имеет место первый случай. Вычисляя скалярное и векторное произведения обеих частей и вспоминая, что $\det(\widehat{\Sigma}) = -1$, получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}_x\|^2 &= \|\mathbf{f}_u\|^2 u_x^2, \\ \|\mathbf{h}_y\|^2 &= \|\mathbf{f}_v\|^2 v_y^2, \\ \mathbf{R}(\mathbf{h}_x \times \mathbf{h}_y) &= -u_x v_y \widehat{\Sigma}(\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v), \end{aligned}$$

откуда

$$|u_x| = \frac{\|\mathbf{h}_x\|}{\|\mathbf{f}_u\|}; \quad |v_y| = \frac{\|\mathbf{h}_y\|}{\|\mathbf{f}_v\|}. \quad (3.2)$$

Знак компонент якобиана \mathbf{J}_Φ получается из договоренности о внешней направленности векторов нормали к поверхностям. Отсюда следует, что $-1 = (\widehat{\mathbf{f}}_u \times \widehat{\mathbf{f}}_v)^T \mathbf{R}(\widehat{\mathbf{h}}_x \times \widehat{\mathbf{h}}_y) = -(\widehat{\mathbf{f}}_u \times \widehat{\mathbf{f}}_v)^T \widehat{\Sigma}(\widehat{\mathbf{f}}_u \times \widehat{\mathbf{f}}_v)(u_x v_y / |u_x| |v_y|)$. Используя соотношение $(\widehat{\mathbf{f}}_u \times \widehat{\mathbf{f}}_v)^T \widehat{\Sigma}(\widehat{\mathbf{f}}_u \times \widehat{\mathbf{f}}_v) = -1$, мы получаем $(u_x v_y / |u_x| |v_y|) = -1$, следовательно, u_x и v_y имеют противоположные знаки, и определитель Якоби \mathbf{J}_Φ имеет первую из двух представленных в утверждении леммы форм.

Если считать теперь, что выполняется вторая возможность $u_x = v_y = 0$, $u_y, v_x \neq 0$, то, рассуждая аналогично, получим, что якобиан \mathbf{J}_Φ имеет вторую форму.

Переходим теперь к доказательству теоремы 1. Доказательство будет состоять из нескольких частей.

Доказательство.

Часть 1. Докажем, что из зеркальности следует голономность.



Управляемые векторные поля из (2.11) в явном виде записываются следующим образом:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{f}_u\|} \\ 0 \\ \frac{\cos \psi}{\|\mathbf{h}_x\|} \\ -\frac{\sin \psi}{\|\mathbf{h}_y\|} \\ \hat{t}_1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\|\mathbf{f}_v\|} \\ -\frac{\sin \psi}{\|\mathbf{h}_x\|} \\ -\frac{\cos \psi}{\|\mathbf{h}_y\|} \\ \hat{t}_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\hat{t}_1 = t_1 + \cos \psi \tilde{t}_1 - \sin \psi \tilde{t}_2,$$

$$\hat{t}_2 = t_2 - \sin \psi \tilde{t}_1 - \cos \psi \tilde{t}_2,$$

$$t_1 = \frac{\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uu}}{\|\mathbf{f}_u\|^2 \|\mathbf{f}_v\|},$$

$$t_2 = \frac{\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uv}}{\|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{f}_v\|^2},$$

$$\tilde{t}_1 = \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{h}_{xx}}{\|\mathbf{h}_x\|^2 \|\mathbf{h}_y\|},$$

$$\tilde{t}_2 = \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{h}_{xy}}{\|\mathbf{h}_x\| \|\mathbf{h}_y\|^2}.$$

Скобка Ли $\mathbf{g}_3 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ определяется в соответствии с формулой (3.3), где t_{iz} обозначает производную t_i по переменной z . Как будет показано ниже, в зеркальной конфигурации $\mathbf{g}_3 = -t_1 \mathbf{g}_1 - t_2 \mathbf{g}_2$ можно записать в виде

$$\mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{t_1}{\|\mathbf{f}_u\|} \\ -\frac{t_2}{\|\mathbf{f}_v\|} \\ \frac{1}{\|\mathbf{h}_x\|} (\tilde{t}_1 - \cos \psi \hat{t}_1 + \sin \psi \hat{t}_2) \\ \frac{1}{\|\mathbf{h}_y\|} (\tilde{t}_2 + \sin \psi \hat{t}_1 + \cos \psi \hat{t}_2) \\ \frac{t_{2u}}{\|\mathbf{f}_u\|} - \frac{t_{1v}}{\|\mathbf{f}_v\|} - \frac{t_{2x}}{\|\mathbf{h}_x\|} + \frac{t_{1y}}{\|\mathbf{h}_y\|} - \hat{t}_1 (\hat{t}_1 - t_1) - \hat{t}_2 (\hat{t}_2 - t_2) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Действительно, первые две компоненты вектора \mathbf{g}_3 очевидно удовлетворяют этому соотношению. Третья и четвертая компоненты также удовлетворяют этому условию. Это легко доказывается, если заметить, что

$$\tilde{t}_1 - \hat{t}_1 \cos \psi + \hat{t}_2 \sin \psi = -t_1 \cos \psi + t_2 \sin \psi$$

и

$$\tilde{t}_2 - \hat{t}_1 \sin \psi + \hat{t}_2 \cos \psi = +t_1 \sin \psi + t_2 \cos \psi.$$

Последняя компонента вектора \mathbf{g}_3 удовлетворяет написанному выше условию, только если поверхности являются зеркальными. Как нам уже известно, в этом случае существует замена координат Φ , такая, что $g \circ \mathbf{h}(x, y) = s \circ \mathbf{f} \circ \Phi(x, y)$, с якобианом \mathbf{J}_Φ , вид которого определяется из леммы 3. Если

$$\mathbf{J}_\Phi = \pm \begin{bmatrix} \frac{\|\mathbf{h}_x\|}{\|\mathbf{f}_u\|} & 0 \\ 0 & -\frac{\|\mathbf{h}_y\|}{\|\mathbf{f}_v\|} \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} R\mathbf{h}_x &= \frac{\|\mathbf{h}_x\|}{\|\mathbf{f}_u\|} \widehat{\Sigma} \mathbf{f}_u = \|\mathbf{h}_x\| \widehat{\Sigma} \widehat{\mathbf{f}}_u, \\ R\mathbf{h}_x &= -\frac{\|\mathbf{h}_y\|}{\|\mathbf{f}_v\|} \widehat{\Sigma} \mathbf{f}_v = -\|\mathbf{h}_y\| \widehat{\Sigma} \widehat{\mathbf{f}}_v \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (g \circ \mathbf{h})_{xx} &= \widehat{\Sigma} \widehat{\mathbf{f}}_u \frac{\partial \|\mathbf{h}_x\|}{\partial x} + \|\mathbf{h}_x\| \widehat{\Sigma} \frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}_u}{\partial u}, \\ (g \circ \mathbf{h})_{xy} &= \widehat{\Sigma} \widehat{\mathbf{f}}_u \frac{\partial \|\mathbf{h}_x\|}{\partial y} + \|\mathbf{h}_x\| \widehat{\Sigma} \frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}_u}{\partial v}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1 &= \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{h}_{xx}}{\|\mathbf{h}_y\| \|\mathbf{h}_x\|^2} = -\frac{\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uu}}{\|\mathbf{f}_v\| \|\mathbf{f}_u\|^2} = -t_1, \\ \tilde{t}_2 &= \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{h}_{xy}}{\|\mathbf{h}_y\|^2 \|\mathbf{h}_x\|} = \frac{\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uv}}{\|\mathbf{f}_v\|^2 \|\mathbf{f}_u\|} = t_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{t_{1v}}{\|\mathbf{f}_v\|} &= \frac{\tilde{t}_{1y}}{\|\mathbf{h}_y\|}, \\ \frac{t_{2u}}{\|\mathbf{f}_u\|} &= \frac{\tilde{t}_{2x}}{\|\mathbf{h}_x\|}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если, с другой стороны, \mathbf{J}_Φ имеет второй вид, указанный в лемме 3, то, проводя аналогичные вычисления и учитывая, что в силу ортогональности выбранной параметризации справедливы соотношения $\mathbf{f}_u^T \mathbf{f}_{vv} = -\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uv}$ и $\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uv} = -\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uu}$, получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1 &= \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{h}_{xx}}{\|\mathbf{h}_y\| \|\mathbf{h}_x\|^2} = \frac{-\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uv}}{\|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{f}_v\|^2} = -t_2, \\ \tilde{t}_2 &= \frac{\mathbf{h}_y^T \mathbf{h}_{xy}}{\|\mathbf{h}_y\|^2 \|\mathbf{h}_x\|} = \frac{-\mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_{uu}}{\|\mathbf{f}_u\|^2 \|\mathbf{f}_v\|} = -t_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$



и

$$\begin{aligned}\frac{t_{1v}}{\|\mathbf{f}_v\|} &= -\frac{\tilde{t}_{2x}}{\|\mathbf{h}_x\|}, \\ \frac{t_{2u}}{\|\mathbf{f}_u\|} &= -\frac{\tilde{t}_{1y}}{\|\mathbf{h}_y\|}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Следует отметить, что как (3.4) и (3.5), так и (3.6) и (3.7) справедливы во всех точках окрестности точки контакта, где выполняется условие зеркальности. Для того чтобы проверить теперь, что последняя компонента вектора \mathbf{g}_3 в (3.3) равна $-t_1\hat{t}_1 - t_2\hat{t}_2$, достаточно заметить, что, в соответствии с (3.4) или (3.6), имеет место равенство

$$-\hat{t}_1(\hat{t}_1 - t_1) - \hat{t}_2(\hat{t}_2 - t_2) = -t_1\hat{t}_1 - t_2\hat{t}_2.$$

(Конец доказательства *части 1.*)

Часть 2. Докажем, что из голономности следует зеркальность.

По предположению, уравнения связи (2.9) являются интегрируемыми, то есть существует двумерное подмногообразие, описываемое формулой $\mathbf{q} \in \mathcal{M}: \mathbf{F}(\mathbf{q}) = 0$, где \mathbf{F} — C^∞ -отображение $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$, такое, что его якобиан ранга 3 имеет вид

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & -\mathbf{R}_\psi \mathbf{M}_2 & 0 \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{M}_1 & \mathbf{T}_2 \mathbf{M}_2 & -1 \end{bmatrix}.$$

По теореме о неявной функции, существует локальное отображение класса C^∞ , такое, что $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (u, v, \psi)$ и $F(x, y, \hat{\Phi}(x, y)) = 0$. Пусть $\hat{\Phi}$ обозначает тривиальное ограничение $\hat{\Phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \hat{\Phi}(x, y) = (u, v)$.

Рассмотрим поверхность $\tilde{\mathbf{f}}(x, y) = s \circ f \circ \hat{\Phi}(x, y)$, которая является зеркальным образом поверхности $\mathbf{f}(u, v)$ в точке $(\bar{u}, \bar{v}) = \hat{\Phi}(\bar{x}, \bar{y})$. Докажем теперь, что поверхности $\tilde{\mathbf{f}}(x, y)$ и $\mathbf{h}(x, y)$ эквивалентны (то есть получаются одна из другой при помощи движения), — таким образом мы докажем вторую часть теоремы.

Элементы первой квадратичной формы поверхности $\tilde{\mathbf{f}}$ определяются как

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_x &= \hat{\Sigma} \mathbf{f}_u \frac{\|\mathbf{h}_x\| \cos \psi}{\|\mathbf{f}_u\|} - \hat{\Sigma} \mathbf{f}_v \frac{\|\mathbf{h}_x\| \sin \psi}{\|\mathbf{f}_v\|}, \\ \tilde{\mathbf{f}}_y &= -\hat{\Sigma} \mathbf{f}_u \frac{\|\mathbf{h}_y\| \sin \psi}{\|\mathbf{f}_u\|} - \hat{\Sigma} \mathbf{f}_v \frac{\|\mathbf{h}_y\| \cos \psi}{\|\mathbf{f}_v\|}, \\ \tilde{\mathbf{n}} &= \hat{\Sigma} \frac{\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v}{\|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{f}_v\|},\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{f}}_x\| &= \|\mathbf{h}_x\|, \\ \|\tilde{\mathbf{f}}_y\| &= \|\mathbf{h}_y\|.\end{aligned}$$

Следовательно, первые квадратичные формы поверхностей $\tilde{\mathbf{f}}(x, y)$ и $\mathbf{h}(x, y)$ совпадают, то есть

$$\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I}_2.\tag{3.8}$$



Далее, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{n}}_x &= \widehat{\Sigma} \mathbf{n}_u \frac{\|\mathbf{h}_x\| \cos \psi}{\|\mathbf{f}_u\|} - \widehat{\Sigma} \mathbf{n}_v \frac{\|\mathbf{h}_x\| \sin \psi}{\|\mathbf{f}_v\|}, \\ \tilde{\mathbf{n}}_y &= -\widehat{\Sigma} \mathbf{n}_u \frac{\|\mathbf{h}_y\| \sin \psi}{\|\mathbf{f}_u\|} - \widehat{\Sigma} \mathbf{n}_v \frac{\|\mathbf{h}_y\| \cos \psi}{\|\mathbf{f}_v\|}.\end{aligned}$$

Элементы второй квадратичной формы поверхности $\tilde{\mathbf{f}}$ определяются как

$$\begin{aligned}-\tilde{\mathbf{n}}^T \tilde{\mathbf{f}}_{xx} &= \tilde{\mathbf{n}}_x^T \tilde{\mathbf{f}}_x, \\ -\tilde{\mathbf{n}}^T \tilde{\mathbf{f}}_{yx} &= \tilde{\mathbf{n}}_x^T \tilde{\mathbf{f}}_y, \\ -\tilde{\mathbf{n}}^T \tilde{\mathbf{f}}_{xy} &= \tilde{\mathbf{n}}_y^T \tilde{\mathbf{f}}_x, \\ -\tilde{\mathbf{n}}^T \tilde{\mathbf{f}}_{yy} &= \tilde{\mathbf{n}}_y^T \tilde{\mathbf{f}}_y,\end{aligned}$$

и после некоторых вычислений связь между вторыми квадратичными формами поверхностей $\tilde{\mathbf{f}}(x, y)$ и $\mathbf{f}(u, v)$ может быть найдена в виде

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{-1} \widetilde{\mathcal{I}} \widetilde{\mathbf{M}}^{-1} = \mathbf{R}_\psi \mathbf{M}_1^{-1} \mathcal{I} \mathcal{I}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{R}_\psi, \quad (3.9)$$

где $\widetilde{\mathbf{M}} = \sqrt{\widetilde{\mathcal{I}}}$.

Первая и вторая квадратичные формы \mathcal{I}_2 , $\mathcal{I} \mathcal{I}_2$ поверхности $\mathbf{h}(x, y)$, голономно катящейся по поверхности $\mathbf{f}(u, v)$, выводятся опять-таки из рассмотрения условий качения без проскальзывания (2.5), записанных в форме (2.3), которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_u \cos \psi - \tilde{\mathbf{f}}_v \sin \psi &= \tilde{\mathbf{h}}_x, \\ -\tilde{\mathbf{f}}_u \sin \psi - \tilde{\mathbf{f}}_v \cos \psi &= \tilde{\mathbf{h}}_y.\end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1$. Далее заметим, что

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}}_1^T (\widehat{\mathbf{f}}_u \cos \psi - \widehat{\mathbf{f}}_v \sin \psi) &= \dot{\mathbf{n}}_2^T \widehat{\mathbf{h}}_x, \\ \dot{\mathbf{n}}_1^T (-\widehat{\mathbf{f}}_u \sin \psi - \widehat{\mathbf{f}}_v \cos \psi) &= \dot{\mathbf{n}}_2^T \widehat{\mathbf{h}}_y,\end{aligned}$$

и после некоторых вычислений получим

$$\mathbf{M}_2^{-1} \mathcal{I} \mathcal{I}_2 \mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{R}_\psi \mathbf{M}_1^{-1} \mathcal{I} \mathcal{I}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{R}_\psi,$$

где $\mathbf{M}_2 = \sqrt{\mathcal{I}_2}$. Поэтому с учетом (3.8) имеем $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_2$ и

$$\widetilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \mathcal{I}_2. \quad (3.10)$$

Напомним, что, в соответствии с теоремой Бонне [26], если две поверхности имеют одинаковые квадратичные формы, то эти поверхности совпадают с точностью до движения в $SE(3)$. Таким образом, мы доказали тот факт, что поверхность S_2 , голономно катящаяся по S_1 , должна быть зеркальна к S_1 в окрестности точки контакта.

(Конец доказательства *части 2.*)

Часть 3. Докажем, что если две поверхности не являются зеркальными, то из этого следует максимальная неголономность связей. По теореме Чжоу¹, нам только нужно доказать, что $\dim\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \mid \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle = 5$ в окрестности незеркальной конфигурации. В соответствии с (3.3), векторное поле $\mathbf{g}_3 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ в конфигурации общего вида может быть записано следующим образом: $\mathbf{g}_3 = -t_1\mathbf{g}_1 - t_2\mathbf{g}_2 + \widehat{\mathbf{g}}_3$, причем $\widehat{\mathbf{g}}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \widehat{t}_3]^T$ и $\widehat{t}_3 = (t_{2u}/\|\mathbf{f}_u\|) - (t_{1v}/\|\mathbf{f}_v\|) - (\widehat{t}_{2x}/\|\mathbf{h}_x\|) + (\widehat{t}_{1y}/\|\mathbf{h}_y\|) - \widehat{t}_1(\widehat{t}_1 - 2t_1) - \widehat{t}_2(\widehat{t}_2 - 2t_2)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \mid \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle &\supseteq \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3], [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]\} = \\ &= \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \widehat{\mathbf{g}}_3, [\mathbf{g}_1, \widehat{\mathbf{g}}_3], [\mathbf{g}_2, \widehat{\mathbf{g}}_3]\} = \\ &= \text{span} \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{f}_u\|} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\mathbf{f}_v\|} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \psi}{\|\mathbf{h}_x\|} & -\frac{\sin \psi}{\|\mathbf{h}_x\|} & 0 & \frac{\sin \psi \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_x\|} & \frac{\cos \psi \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_x\|} \\ -\frac{\sin \psi}{\|\mathbf{h}_y\|} & -\frac{\cos \psi}{\|\mathbf{h}_y\|} & 0 & \frac{\cos \psi \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_y\|} & -\frac{\sin \psi \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_y\|} \\ \widehat{t}_1 & \widehat{t}_2 & \widehat{t}_3 & \widehat{t}_4 & \widehat{t}_5 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{t}_4 &= (\widehat{t}_{3u}/\|\mathbf{f}_u\|) + (\widehat{t}_{3x} \cos \psi / \|\mathbf{h}_x\|) - (\widehat{t}_{3y} \sin \psi / \|\mathbf{h}_y\|) - \widehat{t}_{1\psi} \widehat{t}_3 \text{ и} \\ \widehat{t}_5 &= (\widehat{t}_{3v}/\|\mathbf{f}_v\|) - (\widehat{t}_{3x} \sin \psi / \|\mathbf{h}_x\|) - (\widehat{t}_{3y} \cos \psi / \|\mathbf{h}_y\|) - \widehat{t}_{2\psi} \widehat{t}_3. \end{aligned}$$

Тогда для всех ψ матрица, стоящая в правой части уравнения (3.11), может быть приведена к диагональному виду при помощи простейших операций над строками и столбцами. Ее характеристические значения могут быть выражены

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{\|\mathbf{f}_u\|}, \frac{1}{\|\mathbf{f}_v\|}, \frac{\sin \psi \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_x\|}, \frac{-\widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_y\|}, \widehat{t}_3 \right\}; \quad \psi \neq \frac{k\pi}{2} \\ &\left\{ \frac{1}{\|\mathbf{f}_u\|}, \frac{1}{\|\mathbf{f}_v\|}, \frac{\pm \widehat{t}_3 \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_x\|}, \frac{\pm \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_y\|}, \widehat{t}_3 \right\}; \quad \psi = k\pi \\ &\left\{ \frac{1}{\|\mathbf{f}_u\|}, \frac{1}{\|\mathbf{f}_v\|}, \frac{\mp \widehat{t}_3 \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_x\|}, \frac{\pm \widehat{t}_3}{\|\mathbf{h}_y\|}, \widehat{t}_3 \right\}; \quad \psi = \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

Матрица всегда будет иметь максимальный ранг, если $\widehat{t}_3 \neq 0$ (в случае $\widehat{t}_3 = 0$ матрица имеет ранг 2). Напомним, что из частей 1 и 2 данного доказательства следует, что условие $\widehat{t}_3 \equiv 0$ эквивалентно условию зеркальности поверхностей в окрестности точки контакта. Это и доказывает последнее утверждение теоремы.

Основываясь на полученных выше результатах, структуру многообразия достижимости для системы двух относительно строго выпуклых тел можно описать в рамках одного из трех случаев, указанных ниже.

¹В отечественной литературе она называется теоремой Рашевского или теоремой Чжоу–Рашевского. — *Прим. перев.*

Случай i) $\dim\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \mid \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle = 5, \forall \mathbf{q} \in \mathcal{M}$: все многообразие \mathcal{M} является достижимым. Данный случай имеет место для почти всех пар относительно строго выпуклых тел.

Случай ii) $\dim\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \mid \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle = 2, \forall \mathbf{q} \in \mathcal{M}$: конфигурационное многообразие расслаивается на двумерные максимальные интегральные подмногообразия. Примером такого случая могут служить две сферы одинакового радиуса, катящиеся одна по другой.

Случай iii) $\dim\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \mid \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle$ изменяется на \mathcal{M} : имеются связные двумерные подмногообразия $\mathcal{M}'_l \subset \mathcal{M}$ зеркальных конфигураций, которые являются максимальными интегральными подмногообразиями. Другими словами, каждая конфигурация $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{M}'_l$ может быть получена из \mathbf{q}_0 тогда и только тогда, когда $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{M}'_l$. Дополнение по $\mathcal{M} \setminus \bigcup_l \mathcal{M}'_l$ состоит из (возможно, нескольких, несвязных) пятимерных максимальных интегральных подмногообразий.

ПРИМЕР. Система двух одинаковых мячей для игры в регби обладает ∞^2 числом двумерных и одним пятимерным максимальными интегральными подмногообразиями. Действительно, пусть мячи в исходном положении соприкасаются в некоторой точке своей средней окружности, а их оси симметрии параллельны. Такая конфигурация является зеркальной, и очевидно, что семейство таких конфигураций диффеоморфно $S^1 \times S^1$. В самом деле, любая другая подобная конфигурация может быть получена следующим образом: отделим мячи друг от друга, повернем каждый из них вокруг его оси симметрии и снова приведем в контакт по средней оси. Произвольным образом вращая мячи, но каждый раз приводя их в конфигурацию, когда касание происходит по средней линии, а оси симметрии мячей параллельны, мы будем сохранять зеркальность конфигурации, а интегральные кривые, образующие интегральное многообразие, не пересекаются с кривыми, получающимися при других начальных условиях из того же семейства конфигураций. Если же движение начинается из незеркальной конфигурации, то в этом случае, несмотря на гарантированную управляемость, зеркальная конфигурация никогда не может быть достигнута.

Окончательно, ради полноты проведенного исследования, запишем теорему следующим образом.

Теорема 2. *Условия качения без проскальзывания (2.5) между двумя относительно строго выпуклыми поверхностями обладают максимальной неголономностью.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы получается непосредственным вычислением алгебры Ли, образованной векторными полями (2.10), и не приводится здесь.

4. Алгоритм планирования движения

В начале этой части заметим, что в частном случае теоремы 1, когда строго выпуклое твердое тело движется по плоской поверхности (т. е. по плоскости), система будет управляемой. Следовательно, возможность достижения гибкого робототехнического манипулирования произвольными выпуклыми объектами посредством руки, управляемой только лишь тремя моторами и имеющей плоские пальцы, принципиально гарантирована. Принцип реализации такого манипулирования заключается в следующем. Необходимо, чтобы механизм для руки робота был сконструирован таким образом, чтобы объекту манипулирования можно было придать угловую скорость, направленную произвольно и имеющую произвольную величину. Два примера таких механизмов представлены на рисунках 1 и 2. Заметим, что на практике может понадобиться четвертый мотор для того, чтобы держать манипулируемый объект и создавать силы трения надлежащей величины, обеспечивающие качение.

Чтобы реализовать теперь неголономное гибкое манипулирование, нам остается решить несколько задач технологической и теоретической природы. Среди сложностей теоретического характера, которые предстоит преодолеть, наибольшую важность имеют две. Первая заключается в том, чтобы найти эффективный алгоритм управления, переводящий систему из одной конфигурации в другую (задача планирования движения). Вторая сложность состоит в том, чтобы подобрать законы управления, действующие по методу обратной связи и стабилизирующие программное движение в условиях неопределенности. В этой работе мы ограничиваемся описанием алгоритма планирования движения, а вопрос о выборе управления оставляем открытым.

Общая задача планирования движения для управляемой системы вида

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{w}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

состоит в том, чтобы на множестве достижимости W для каждой пары $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f)$ найти функцию управления (или, иначе, управляющее воздействие) $\mathbf{w}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \mathbf{w}(t)$, такую, что для решения $\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{w})$, с начальными условиями в точке \mathbf{q}_0 , выполняется равенство $\mathbf{q}(1, \mathbf{q}_0, \mathbf{w}) = \mathbf{q}_f$. В грубом приближении сформулированную задачу можно решить следующим образом:

- 1) решаем уравнение (4.1) для обобщенных управляющих воздействий $\mathbf{w}(\mathbf{p}, t)$, принадлежащих достаточно широкому множеству $\overline{W} \subset W$, параметризованному с помощью координат $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$ и
- 2) решаем систему n нелинейных уравнений $\mathbf{q}(1, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}) = \mathbf{q}_f$ относительно \mathbf{p} .

Очевидно, оба шага могут представлять значительные трудности, такие как решение обыкновенных дифференциальных уравнений в замкнутой форме (что редко бывает возможно) или решение системы нелинейных алгебраических уравнений, сложность которого печально известна всем. Математически интересной задачей, которую можно сформулировать в рамках проблемы планирования движения, является задача о том, как, не выполняя указанных выше шагов 1 и 2, найти эквивалентную замену переменных \mathbf{q} и замену псевдоскоростей \mathbf{w} , такую, чтобы оба шага были бы выполнимы.

Как уже упоминалось во введении, что для систем, имеющих цепной вид, или эквивалентных им, существуют эффективные алгоритмы планирования движения, в то время как для неголономных систем общего вида существуют только итеративные схемы планирования движения (такие, как метод петель [27] или метод непрерывного продолжения [28]). В силу большой общности данные схемы сильно ограничивают работу вычислительных средств. Поэтому более эффективные алгоритмы должны строиться с учетом специфики той системы, для которой они предложены.

Кинематика катящихся твердых тел (2.11) не попадает в категорию цепных систем, упомянутых выше, для которых существуют эффективные алгоритмы управления движением, однако у системы (2.11) имеется одно интересное свойство, справедливое, когда одно из тел имеет плоскую поверхность (как, например, в случае схватов-манипуляторов, представленных на рис. 1 и 2); в соответствии с [29], справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Кинематические уравнения (2.11) в случае строго выпуклого твердого тела, движущегося по плоскости, путем замены координат и квазискоростей могут быть приведены к треугольному виду.*

Другими словами, если в (2.11), скажем, поверхность с индексом 2 представляет собой плоскость (т. е. $\mathbf{M}_2 = \mathbf{I}_{2 \times 2}$, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}_{1 \times 2}$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}_{2 \times 2}$), то существует регулярная замена квазискоростей $\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\hat{\mathbf{w}}$ и диффеоморфизм $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{q})$ (в действительности заключающийся

только в переупорядочении существующих координат $z = [u, v, \psi, x, y]^T$, такие, что

$$\dot{z} = (\Phi_*GA)|_{q=\Phi^{-1}(z)}\hat{w} = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ T_1 M_1 \\ R_\psi M_1 \end{bmatrix} \hat{w}. \quad (4.2)$$

Важность строго треугольной формы в теории планирования движения трудно переоценить. Прежде всего, система обыкновенных дифференциальных уравнений, записанная в треугольной форме, легко может быть решена при помощи квадратур, то есть поток управляемых векторных полей может быть найден последовательным интегрированием его компонент по времени. Более того, строгая треугольность позволяет разбить решение системы n нелинейных алгебраических уравнений из второго шага общего алгоритма, изложенного выше, на решение множества систем, состоящих из небольшого числа уравнений.

Эти преимущества формы (4.2) кинематических связей (2.11) используются для построения следующего алгоритма. Мы будем применять его к задаче о движении строго выпуклого твердого тела по плоскости. В сферических координатах параметрическое уравнение поверхности движущегося твердого тела записывается в виде $f: [-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} \rho(u, v) \cos u \cos v \\ \rho(u, v) \sin u \cos v \\ \rho(u, v) \sin v \end{bmatrix}.$$

Для объектов, имеющих ось симметрии, движение которых для простоты мы и будем далее изучать, сферические координаты могут быть выбраны таким образом, что они будут всюду ортогональны (кроме особенностей, имеющих место для северного и южного полюса сферы) и одновременно будет выполняться условие $\rho_u \equiv 0$. В этом случае строго треугольная форма (4.2) приводится к виду

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\rho \sin v - \rho_v \cos v}{\sqrt{\rho^2 + \rho_v^2}} & 0 \\ \rho \cos v \cos \psi & -\sqrt{\rho^2 + \rho_v^2} \sin \psi \\ \rho \cos v \sin \psi & -\sqrt{\rho^2 + \rho_v^2} \sin \psi \end{bmatrix} \hat{w}. \quad (4.3)$$

В качестве возможного выбора множества допустимых управлений U мы рассмотрим кусочно-постоянные на интервале времени T управления чередующегося вида

$$\hat{w}(kT + t) = \hat{w}_k = \begin{cases} [\lambda_k, 0]^T & k - \text{четное} \\ [0, \lambda_k]^T & k - \text{нечетное} \end{cases} \quad 0 \leq t < T,$$



так что потоки $\Phi_{g_i}^{\lambda_k T}$ двух управляемых векторных полей последовательно сменяют друг друга N раз ($k = 0, 1, \dots, N - 1$). Потоки могут быть проинтегрированы в явном виде с начальными условиями $z_k = z(kT)$, где k — четное:

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_k T + u_k \\ v_k \\ \Gamma(v_k) \lambda_k T + \psi_k \\ \frac{\rho \cos v_k}{\Gamma(v_k)} (\sin \psi_{k+1} - \sin \psi_k) + x_k \\ \frac{\rho \cos v_k}{\Gamma(v_k)} (\cos \psi_{k+1} - \cos \psi_k) + y_k \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Здесь обозначено

$$\Gamma(v_k) = \frac{\rho \sin v - \rho_v \cos v}{\sqrt{\rho^2 + \rho_v^2}} \Big|_{v_k}.$$

Для нечетного k будем иметь

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} u_k \\ \lambda_k T + v_k \\ \psi_k \\ -\lambda_k \sin \psi_k \Delta_k + x_k \\ -\lambda_k \cos \psi_k \Delta_k + y_k \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

где

$$\Delta_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \sqrt{\rho^2 + \rho_v^2} dt.$$

С учетом этих формул задачу планирования движения для данной системы можно переформулировать следующим образом.

Задача 1. Дана пара (z_0, z_f) — начальное и конечное положение системы. Найти целое число N и N -элементную последовательность действительных чисел $(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$, таких, что для нелинейной системы с дискретным временем (4.4), (4.5) и с начальными условиями $z(0) = z_0$ выполнялось бы условие $z(N) = z_f$.

Решение этой задачи получается при помощи алгоритма, который существенно использует треугольную структуру матрицы из (4.3).

Алгоритм

Шаг 1. Применяем первые два управления так, чтобы привести две первые переменные из числа переменных z к желаемым величинам: полагаем $\lambda_0 = \mu_0 = (u_f - u_0)/T$, $\lambda_1 = \mu_1 = (v_f - v_0)/T$, так что $z(2T) = [u_f, v_f, \psi_2, x_2, y_2]$.

Шаг 2. Применяем последовательность из пяти управлений так, чтобы две первые переменные не изменили своих значений, то есть $(\lambda_2 = 0, \lambda_3 = \mu_2, \lambda_4 = \mu_3, \lambda_5 = -\mu_2, \lambda_6 = -\mu_3)$.

При этом нулевое управление $\lambda_2 = 0$ включено в последовательность для сохранения порядка индексов в соответствии с (4.4), (4.5). Разумеется, ожидать наступления следующего интервала времени T , чтобы применить следующее управление λ_3 , не нужно. Полагая

$$\mu_3 = \frac{\psi_f - \psi_2}{(\Gamma(v_4) - \Gamma(v_6))T}$$

и выбирая μ_2 произвольным (но таким, чтобы $\Gamma(v_4) \neq \Gamma(v_6)$), получаем, что третья переменная достигает своего желаемого значения: $z(6T) = [u_f, v_f, \psi_f, x_6, y_6]$.

Шаг 3. Применяем последовательность из 15 управлений, которые не меняют значений трех первых переменных, а именно: ($\lambda_7 = 0, \lambda_8 = \mu_4, \lambda_9 = \mu_5, \lambda_{10} = -\mu_4, \lambda_{11} = -\mu_5 + \mu_6, \lambda_{12} = \mu_7, \lambda_{13} = -\mu_6, \lambda_{14} = -\mu_7, \lambda_{15} = \mu_5, \lambda_{16} = \mu_4, \lambda_{17} = -\mu_5, \lambda_{18} = -\mu_4 + \mu_7, \lambda_{19} = \mu_6, \lambda_{20} = -\mu_7, \lambda_{21} = -\mu_6$). Для того чтобы при помощи такой последовательности привести две последние переменные к желаемым значениям, достаточно подобрать любую четверку чисел $(\mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7)$, являющуюся решением системы двух нелинейных алгебраических уравнений $x_{22}(z_6, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7) = x_f, y_{22}(z_6, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7) = y_f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Описание алгоритма подчеркивает роль последовательности вида $ABA^{-1}B^{-1}$ (A^{-1} — управление, обратное управлению $A: [0, T_A] \rightarrow \mathbb{R}_m$, определяется здесь как $A^{-1} = -A(T_A - t)$) при формировании управлений (простое переключение используется на шаге 2, а переключение переключений — на шаге 3). Финальная последовательность шагов может быть записана, однако, в более компактной форме, если наложить дополнительные условия, снижающие сложность решений на шаге 3, но не уменьшающие их общности:

- А) Если $v_f \neq v_0$, то положим $\mu_2 = -\mu_1, \mu_4 = \mu_3$ и $\mu_5 = \mu_6$, и управляющая последовательность имеет вид $(\mu_0 + \mu_3, \mu_1 + \mu_5, -\mu_3 + \mu_7, -\mu_5, -\mu_7, \mu_5, \mu_3, -\mu_5, -\mu_3 + \mu_7, \mu_5, -\mu_7, -\mu_5)$, где $\mu_0 = (u_f - u_0)/T, \mu_1 = (v_f - v_0)/T, \mu_3 = (\psi_f - \psi_0 - \Gamma(v_0)\mu_0 / (\Gamma(v_0) - \Gamma(v_0 + \mu_1 T)) / T$, а μ_5 и μ_7 являются решениями системы двух нелинейных алгебраических уравнений $x_{12}(z_0, \mu_5, \mu_7) = x_f, y_{12}(z_0, \mu_5, \mu_7) = y_f$. При этом система переходит из начального состояния z_0 в конечное z_f всего лишь за $12 T$.
- В) С другой стороны, если $v_f = v_0$, то управляющей последовательностью будет последовательность $(\nu_0 + \nu_1, \nu_2, -\nu_1 + \nu_3, -\nu_2 + \nu_4, -\nu_3, -\nu_4, \nu_3, \nu_2, -\nu_3, -\nu_2 + \nu_4, \nu_3, -\nu_4, -\nu_3)$, где $\nu_0 = (u_f - u_0)/T, \nu_1 = (\psi_f - \psi_0 - \Gamma(v_0)\nu_0 / (\Gamma(v_0) - \Gamma(v_2)) / T$, ν_2 выбирается произвольно, но так, чтобы $\Gamma(v_0) \neq \Gamma(v_2)$, ν_3 и ν_4 являются решениями системы двух нелинейных алгебраических уравнений $x_{13}(z_0, \nu_3, \nu_4) = x_f, y_{13}(z_0, \nu_3, \nu_4) = y_f$. Система переходит из начального состояния в конечное за $13 T$.

ПРИМЕР. В качестве примера приложения предложенного алгоритма планирования движения рассмотрим задачу о качении объекта произвольной формы, описываемого в сферических координатах взвешенной суммой подходящих базисных функций. Напомним, в частности, что тригонометрические функции образуют полный ортогональный базис в пространстве L_2 функций, определенных в сферической области. Поэтому мы можем написать

$$\rho(v) = \sum_{l=0}^n \sum_{s=-l}^l f_{ls} Y_{ls}(v), \tag{4.6}$$

где f_{ls} — постоянные коэффициенты (веса) и

$$\begin{aligned} Y_{ls}(u, v) &= U_{ls} \cos(us) P_l^s(\sin v), & 0 < s \leq l, \\ &= U_{ls} \sin(us) P_l^{|s|}(\sin v), & -l \leq s < 0, \\ &= U_{l0} P_l(\sin v), & s = 0, \end{aligned}$$



$l = 0, 1, \dots$ Здесь

$$U_{ls} = \begin{cases} \sqrt{2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|s|)!}{(l+|s|)!}}, & s \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, & s = 0, \end{cases}$$

P_l , $l = 0, 1, \dots$, — полиномы Лежандра, а P_l^s — функции Лежандра

$$P_l^s(z) = (1-z^2)^{s/2} \frac{\partial^s}{\partial z^s}(z).$$

Заметим, что объекты, имеющие ось симметрии, определяются уравнением (4.6), в котором положено $f_{l,s} = 0$, $\forall s \neq 0$.

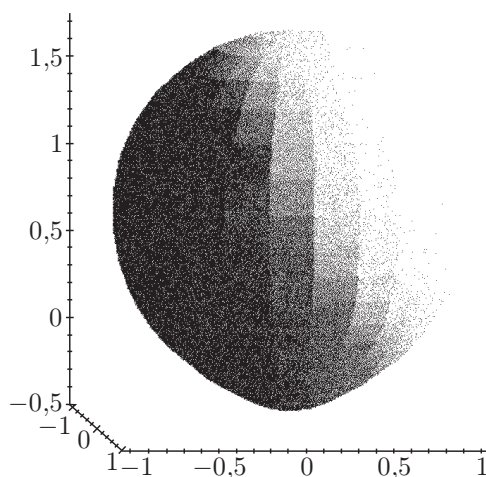


Рис. 4. Форма выпуклого объекта, используемого в качестве примера.

На рисунке 4 изображена поверхность тела, полученная в виде суммы трех слагаемых с $f_{0,0} = 1$, $f_{1,0} = 0,4$, $f_{2,0} = 0,1$. Управления, необходимые для применения предложенного алгоритма, модифицированного с учетом замечания 2А, с начальной конфигурацией $\mathbf{z}_0 = (-\pi/4, \pi/4, 0, 0, 0)$ и конечной конфигурацией $\mathbf{z}_f = (\pi/4, -\pi/4, 0, 2, 1)$, вычисляются в виде $\mu_0 = \pi/2$, $\mu_1 = -\pi/2$, $\mu_3 = -0,40$, $\mu_5 = 3,03$, $\mu_7 = 1,07$. Решение системы нелинейных уравнений, о которой шла речь при выполнении последнего шага алгоритма, осуществлялось численно. Параметрические графики траекторий на плоскости (x, y) и в пространстве (u, v, ψ) представлены на рисунках 5 и 6.

5. Выводы

Мы показали, что почти все пары тел, обладающих регулярной поверхностью, могут быть приведены в произвольную относительную конфигурацию, если катить их одно по другому. Это доказывает выдвинутую нами гипотезу и оправдывает построение гибких манипуляторов со сниженной сложностью конструкции. Кроме того, нами предложен алгоритм планирования движения, применимый к широкому классу тел, катящихся по плоскости.



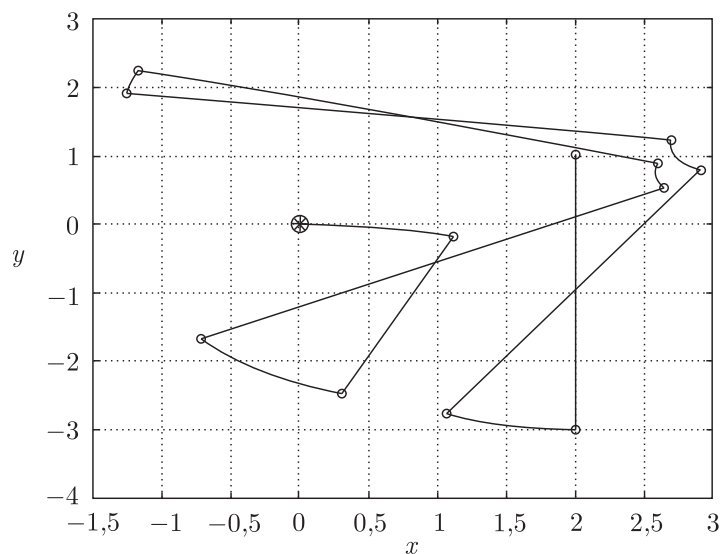


Рис. 5. Траектория точки контакта на плоскости в случае рассматриваемого примера программного движения. Кружки обозначают положения в конце каждого интервала переключения, звездочка обозначает начальное положение.

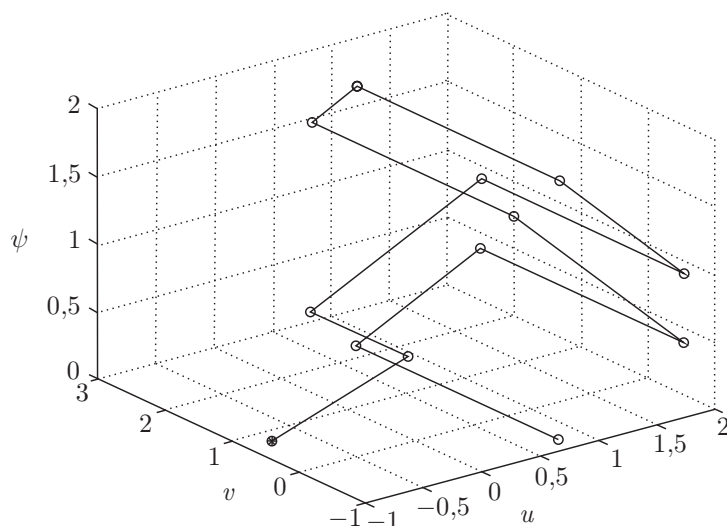


Рис. 6. График переменных состояния u , v , ψ для рассматриваемого примера.

Некоторые обобщения задачи, рассматриваемой в данной работе, имеют практическую значимость и открывают возможности для новых исследований. Часть из них мы уже кратко упоминали: прежде всего, траектории, получающиеся при применении нашего алгоритма, могут оказаться довольно длинными и сложными для некоторых объектов и конфигураций. Эффективные алгоритмы нахождения оптимальных управлений для реализации кратчайших путей, обобщающие работу [22] на случай произвольных выпуклых поверхностей, катящихся по плоскости, были бы очень полезны. Работа в этом направлении была начата в [30], где были получены условия управляемости, эквивалентные нашим, в элегантной постановке, не зависящей от выбора координат. Во-вторых, если поверхность объекта не известна заранее, необходима техника для идентификации поверхности объекта, основан-

ная на данных, полученных от сенсоров, расположенных на руке мобильного робота (см. по этому поводу [31]). Необходимы также специальные механизмы, осуществляющие перепланирование движения в зависимости от данных, получаемых от сенсоров. В-третьих, если объект манипулирования не обладает регулярной поверхностью, то результаты, полученные в данной работе, не применимы к такому случаю. В самом деле, если тело не обладает регулярной поверхностью, то его поведение при движении может быть совершенно иным, чем у тела с регулярной поверхностью: например, множество достижимости может быть не всюду плотным. Подобные вопросы изучались в [32]. Наконец, стабилизация по методу обратной связи остается открытой задачей, которая в силу негладкости системы является весьма сложной для будущего решения.

Приложение

Классификация допустимых пар катящихся тел

Приведем формы кривизны к диагональному виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T, \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{Q}_2 \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2^T, \\ \mathbf{Q}_1^T \mathbf{R}_\psi \mathbf{Q}_2 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, h_1, h_2 — главные кривизны первой и второй поверхности. Допустим, что собственные значения упорядочены таким образом, что $k_1 \geq k_2, h_1 \geq h_2, k_1 \geq h_1$. Тогда относительная форма кривизны \mathbf{K}_R запишется в виде

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{Q}_1 \left(\begin{bmatrix} k_1 + h_1 & 0 \\ 0 & k_2 + h_2 \end{bmatrix} - b(h_1 - h_2) \begin{bmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{bmatrix} \right) \mathbf{Q}_1^T.$$

Возможны следующие случаи:

А) Поверхности имеют изолированную точку контакта и две степени свободы, если

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K}_R &= (k_1 + h_1)(k_2 + h_2) + b^2(k_1 - k_2)(h_1 - h_2) > 0, \\ \mathbf{K}_R^{11} &= (k_1 + h_1) - b^2(h_1 - h_2) > 0, \\ \mathbf{K}_R^{22} &= (k_2 + h_2) + b^2(h_1 - h_2) > 0, \end{aligned}$$

где \mathbf{K}_R^{ij} обозначает элемент матрицы \mathbf{K}_R , стоящий в i -й строке и j -м столбце. Эти условия справедливы $\forall \psi$, если $-h_1 \leq -h_2 < k_2 \leq k_1$. Они выполняются для некоторых значений ψ при $-h_1 < k_2 \leq -h_2 < k_1$.



Таблица 2. Классификация приемлемых контактов качения

Знак главной кривизны				Пример	Число степеней свободы
h_2	h_1	k_2	k_1		
				$\forall \psi$	
-	-	+	+	сфера внутри полой сферы	2
-	0	+	+	сфера внутри полого цилиндра	2
-	+	+	+	сфера на однополостном гиперboloиде	2
0	+	+	+	сфера на цилиндре	2
+	+	+	+	сфера на сфере	2
				$\exists \psi$	
-	-	+	+	эллипсоид внутри полого эллипсоида	2
-	0	+	+	эллипсоид внутри полого цилиндра	2
-	+	-	+	однополостный гиперboloид на однополостном гиперboloиде	2
-	+	0	+	цилиндр на однополостном гиперboloиде	2
-	+	+	+	эллипсоид на однополостном гиперboloиде	2
0	+	0	+	цилиндр на цилиндре	2
0	+	-	+	однополостный гиперboloид на цилиндре	2
+	+	-	+	однополостный гиперboloид на эллипсоиде	2
				$\forall \psi$	
0	0	0	+	цилиндр на плоскости	1
				$\exists \psi$	
-	0	0	+	цилиндр внутри полого цилиндра	1
-	+	-	+	гиперболический параболоид на гиперболическом параболоиде	1
-	+	0	+	цилиндр на гиперболическом параболоиде	1
0	+	-	+	гиперболический параболоид на цилиндре	1
0	+	0	+	цилиндр на цилиндре	1

В) Поверхности имеют одномерное контактное многообразие, если

i)

$$\det \mathbf{K}_R = (k_1 + h_1)(k_2 + h_2) + b^2(k_1 - k_2)(h_1 - h_2) = 0,$$

$$\mathbf{K}_R^{11} = (k_1 + h_1) - b^2(h_1 - h_2) > 0,$$

$$\mathbf{K}_R^{22} = (k_2 + h_2) + b^2(h_1 - h_2) \geq 0$$

или если



ii)

$$\begin{aligned}\det \mathbf{K}_R &= (k_1 + h_1)(k_2 + h_2) + b^2(k_1 - k_2)(h_1 - h_2) = 0, \\ \mathbf{K}_R^{11} &= (k_1 + h_1) - b^2(h_1 - h_2) = 0, \\ \mathbf{K}_R^{22} &= (k_2 + h_2) + b^2(h_1 - h_2) > 0.\end{aligned}$$

Случай В-і имеет место $\forall \psi$, если $-h_1 = -h_2 = k_2 < k_1$, $\forall \psi \neq \pm(\pi/2)$, если $-h_1 < -h_2 = k_2 = k_1$, и для $\psi = \{0, \pi\}$, если $-h_1 < -h_2 = k_2 < k_1$. Случай В-ii имеет место для $\psi = \pm(\pi/2)$, если $-h_1 < k_2 \leq -h_2 = k_1$. Более того, если поверхности имеют одну степень свободы, то $h_1 h_2 \leq 0$ и $k_1 k_2 \leq 0$ (точки контакта должны быть гиперболическими или параболическими).

Все возможные случаи и типичные примеры перечислены в таблице 2, где число степеней свободы определяется с учетом наложенных связей (2.4) и (2.8).

Благодарность

Авторы выражают благодарность И. Читтуру и С. С. Састри за совместную работу по данной теме на начальном этапе, а также за многочисленные плодотворные обсуждения. Мы также выражаем признательность Р. Брокетту за предложение проводить данное исследование с учетом возможного приложения его результатов к динамике гибких манипуляторов.

Список литературы

- [1] Baillieul J. Open-loop control using oscillatory inputs // The control systems handbook / W. S. Levine (Ed.). 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. P. 967–980.
- [2] Kolmanovsky I., McClamroch N. H. Developments in nonholonomic control problems // IEEE Contr. Syst. Mag., 1995, vol. 15, no. 6, pp. 20–36.
- [3] Brockett R. W. On the rectification of vibratory motion // Sensors and Actuators A, 1989, vol. 20, pp. 91–96.
- [4] Nakamura Y., Mukherjee R. Exploiting nonholonomic redundancy of free flying space robots // IEEE Trans. Robot. Automat., 1993, vol. 9, no. 4, pp. 499–506.
- [5] Ostrowski J., Burdick J. Geometric perspectives on the mechanics and control of robotic locomotion // Robotics Research: Proc. of the 7th Internat. Symp. / G. Giralt, G. Hirzinger (Eds.). New York: Springer, 1996. P. 536–547.
- [6] Sordalen O. J., Nakamura Y. Design of a nonholonomic manipulator // Proc. of the Internat. Conf. on Robotics and Automation, 1994, pp. 8–13.
- [7] Bicchi A., Sorrentino R. Dexterous manipulation through rolling // Proc. of the Internat. Conf. Robotics and Automation, 1995, pp. 452–457.
- [8] Cole A., Hauser J., Sastry S. S. Kinematics and control of a multi-fingered robot hand with rolling contact // IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, vol. 34, no. 4, pp. 398–404.
- [9] Brockett R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential geometric control theory / R. W. Brockett, G. A. Millmann, H. Sussmann (Eds.). Boston: Birkhäuser, 1982. P. 181–191.
- [10] Murray R. M. Nilpotent bases for a class of nonintegrable distributions with applications to trajectory generation for nonholonomic systems // Math. Control Signals Systems, 1994, vol. 7, pp. 58–75.
- [11] Tilbury D., Murray R. M., Sastry S. S. Trajectory generation for the n -trailer problem using Goursat normal form // IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, vol. 40, no. 5, pp. 802–819.



- [12] Sørдален O. J. Conversion of the kinematics of a car with n trailers into a chained form // Proc. of the Internat. Conf. on Robotics and Automation, 1993, pp. 382–387.
- [13] Brockett R., Dai L. Nonholonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability // Nonholonomic motion planning / Z. Li, J. F. Canny (Eds.). Norwell, MA: Kluwer, 1993. P. 1–21.
- [14] Murray R. M., Sastry S. S. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids // IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, vol. 38, pp. 700–716.
- [15] Lafferriere G., Sussmann H. Motion planning for controllable systems without drift // Proc. of the Internat. Conf. on Robotics and Automation, 1991, pp. 1148–1153.
- [16] Monaco S., Normand-Cyrot D. An introduction to motion planning under multirate digital control // Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control, 1992, pp. 1780–1785.
- [17] Jacobs G. Motion planning by piecewise constant or polynomial inputs // Proc. IFAC Nonlinear Control Systems Symp. (NOLCOS), 1992, pp. 628–633.
- [18] Rouchon P., Fliess M., Lèvine J., Martin P. Flatness, motion planning and traile systems // Proc. 32nd IEEE Conf. on Decision and Control, 1993, pp. 2700–2705.
- [19] Chelouah A. Extensions of differentially flat fields and Liouvillian systems // Proc. 36th IEEE Conf. on Decision and Control, 1997, pp. 4268–4273.
- [20] Montana D. J. The kinematics of contact and grasp // Int. J. Robot. Res., 1988, vol. 7, no. 3, pp. 17–32.
- [21] Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint // IEEE Trans. Robot. Automat., 1990, vol. 6, no. 1, pp. 62–72.
- [22] Jurdjevic V. The geometry of the plate-ball problem // Arch. Ration. Mech. Anal., 1993, vol. 124, no. 4, pp. 305–328.
- [23] Levi M. Geometric phases in the motion of rigid bodies // Arch. Ration. Mech. Anal., 1993, vol. 122, no. 3, pp. 213–229.
- [24] Murray R., Li Z., Sastry S. S. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994. 456 pp.
- [25] Sussmann H. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc., 1973, vol. 180, pp. 171–188.
- [26] do Carmo M. P. Differential geometry of curves and surfaces. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976. 503 pp.
- [27] Sontag E. Control of systems without drift via generic loops // IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, vol. 40, no. 7, pp. 1210–1219.
- [28] Sussmann H., Chitour Y. A continuation method for nonholonomic path-finding problems // IMA Workshop on Robotics, 1993.
- [29] Bicchi A., Prattichizzo D., Sastry S. S. Planning motions of rolling surfaces // Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, 1995, pp. 2812–2817.
- [30] Agrachev A. A., Sachkov Y. L. An intrinsic approach to the control of rolling bodies // ISAS: Internat. School for Advanced Studies: Tech. Rep. SISSA 114/99/M, Sept 1999.
- [31] Bicchi A., Marigo A., Prattichizzo D. Dexterity through rolling: Manipulation of unknown objects // Proc. of the Internat. Conf. on Robotics and Automation, 1998, pp. 1583–1568.
- [32] Ceccarelli M., Marigo A., Piccinocchi S., Bicchi A. Planning motions of polyhedral parts by rolling // Algorithmica, 2000, vol. 26, nos. 3–4, pp. 560–576.
- [33] Arai H., Tachi S. Dynamic control of a manipulator with passive joints in an operational coordinate space // Proc. IEEE Internat. Conf. Robotics and Automation, 1991, pp. 1188–1195.

Rolling bodies with regular surface: controllability theory and applications

Alessia Marigo¹, Antonio Bicchi²

¹School for Advanced Studies (SISSA-ISAS),
Trieste, Italy

²Department of Electrical Systems and Automation, University of Pisa

^{1,2}Interdept. Research Center “Enrico Piaggio», University of Pisa

¹marigo@piaggio.cci.unipi.it, ²bicchi@ing.unipi.it

Pairs of bodies with regular rigid surfaces rolling onto each other in space form a nonholonomic system of a rather general type, posing several interesting control problems of which not much is known. The nonholonomy of such systems can be exploited in practical devices, which is very useful in robotic applications. In order to achieve all potential benefits, a deeper understanding of these types of systems and more practical algorithms for planning and controlling their motions are necessary. In this paper, we study the controllability aspect of this problem, giving a complete description of the reachable manifold for general pairs of bodies, and a constructive controllability algorithm for planning rolling motions for dexterous robot hands.

Keywords: nonholonomic systems, nonlinear controllability theory, robotic manipulation

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 101–132 (Russian)

Originally published in: *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 45, no. 9, September 2000.
© 2000 IEEE.

