Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 1. С. 39–50.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.314.2:531.384
MSC 2010: 70H03, 70F25

Об уравнениях Лагранжа в неголономной механике

А. С. Сумбатов

Рассматривается вопрос о возможности записи уравнений движения неголономных систем в форме уравнений Лагранжа второго рода в обобщенных координатах для минимального числа параметров. Обсуждаются соответствующие результаты Ж. Адамара и А. Бегена. Доказывается, что в классической задаче с тремя степенями свободы о качении твердого тела по неподвижной плоскости без скольжения не существует случаев, когда все три уравнения Чаплыгина вырождаются в уравнения Лагранжа. Для той же задачи с двумя степенями свободы установлен самый общий вид неголономных линейных связей, когда уравнения Лагранжа второго рода оказываются применимыми для минимального числа параметров. Приведены примеры.

Ключевые слова: неголономные связи, уравнения Лагранжа первого и второго рода, множители связей, качение твердого тела без скольжения, возможные перемещения системы

Встречаются иногда незаслуженно забытые имена ученых, заслуги и достижения которых оценены неполно и даже ошибочно. Это происходит, как правило, по недосмотру или неаккуратности современников и историков науки, однако порой, как в случае с Робертом Гуком, и умышленно [1]. Восстановление исторической справедливости не только важно в моральном аспекте, но и позволяет лучше и точнее понять внутреннюю логику развития самой науки.

1. История задачи. В механике неинтегрируемые связи появились в задаче о катании твердого тела по поверхности без скольжения. По-видимому, впервые непригодность уравнений Лагранжа второго рода для описания движения таких систем («неголономных»

Получено 6 ноября 2012 года
После доработки 15 января 2013 года

Сумбатов Александр Сумбатович
sumbatow@ccas.ru
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына, РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

по терминологии Герца) была обнаружена Феррерсом[1] в работе 1872 года [2][2]. Он эту особенность открыл существенно раньше остальных ученых: только через 20 лет к этому же выводу пришел Фиркандт [3], и почти через четверть века после выхода работы Феррерса появились уравнения Чаплыгина [5] (хотя все необходимое для их получения, в том числе и само понятие «чаплыгинские системы», в работе Феррерса уже имелось).

В первом издании трактата Аппеля по механике [6] были приведены уравнения движения тела вращения по плоскости без проскальзывания в форме уравнений Лагранжа второго рода. Эта ошибка повторилась в работе Линделёфа [4], на которую обратил внимание Чаплыгин [5]. Аппель, по-видимому, быстро обнаружил ошибку, и уже во втором издании его трактата она была исправлена. Более того, Аппель опубликовал обстоятельный мемуар на тему о качении тела по поверхности [7] и впоследствии много внимания уделил формам уравнений движения неголономных систем.

Начиная со 2-го издания своего трактата по механике (1900–1904 гг.), а затем в 3-ем издании (1909–1911 гг.) и в последнем 4-ом прижизненном авторском издании второго тома (1923 г.) Аппель ссылался на работу [2], но неполно: по Аппелю, в цитируемой работе обнаружено, что уравнение качения тяжелого обруча по горизонтальной плоскости без скольжения, соответствующее обобщенной координате угла наклона плоскости обруча к горизонту, имеет вид уравнения Лагранжа второго рода. Больше ни слова. На самом же деле это была только иллюстрация Феррерсом основного результата его работы, в частности, утверждения, что уравнения Лагранжа, если и появляются в неголономных системах, то как исключение, а не правило.

Безусловно, Аппель должен был знать работу Феррерса. Во-первых, краткое описание работы [2] имеется в подстрочном примечании в монографии Рауса [8][3], в котором Раус мягко упрекает Аппеля, что тот в § 462 своего трактата ограничился только ссылками на зарубежные работы, посвященные данной теме, не раньше 1888 года. Во-вторых, во французском расширенном издании Энциклопедии Клейна – Мюллера по математическим наукам [9] четвертый том «Механика» редактировал Аппель. Раздел IV-1 этого тома был написан Фоссом и дополнен братьями Эженом и Франсуа Коссера. В нем на с. 140–141 дана точная ссылка на работу [2] (она стоит первой по хронологии в списке работ разных авторов в связи с утверждением в тексте, что лагранжева форма уравнений движения некорректна для неголономных систем).

Не повезло работе Феррерса [2] и в русскоязычной литературе. Неадекватно описана эта работа в некоторых исторических обзорах по механике. Так, в книге [10] на с. 143 утверждается, что в работе [2] решена задача о чистом качении однородного круглого тяжелого диска по горизонтальной плоскости. На самом деле данная задача была решена значительно позже Аппелем и Кортевегом. В книге [11] на с. 107–108 без ссылки на работу [2] утверждается, что Феррерс вывел уравнения Лагранжа первого рода с множителями связей и «этот вывод Феррерса почти дословно повторяет вывод Лагранжа». В указанной работе Фер-

[1]Шотландец по матери Норман Маклеод Феррерс (1829–1903) в русскоязычной литературе встречается, кроме того, под фамилиями «Ферре» «Феррер» и «Ферер». Например, в 1-ом томе русского перевода монографии Рауса [8] он «Феррерс», а во 2-ом «Феррер».

[2]В электронном виде работу [2] можно найти в Интернете по адресу
http://dfg-viewer.de/v2/?set[image]=13&set[zoom]=default&set[debug]=0 &set[double]=0&set[mets]=
http%3A%2F%2Fwww.zvdd.de%2Fdms%2Fmetsresolver% 2F%3FPPN%3DPPN600494829_0012 (в браузерной строке вводить символы подряд без пробелов).

[3]Раус Э. Дж. Динамика систем твердых тел: В 2-х тт. Москва: Наука, 1983. 464 с.; 544 с. *См.* т. I, с. 369.

рерса уравнений с множителями нет вообще. Кстати, в ряде современных работ уравнения Лагранжа первого рода совершенно необоснованно называются уравнениями Феррерса.

Но вернемся к задаче о возможностях появления уравнений Лагранжа второго рода в неголономной механике. Ж. Адамар, ученик Аппеля, посвятил изучению этого вопроса обширную работу [12], которую Аппель включил в качестве приложения в свой мемуар [7].

Адамар изучает вопрос о том, можно ли при составлении уравнений движения системы с линейными дифференциальными связями принять во внимание эти связи еще до дифференцирований кинетической энергии T системы (то есть исключив часть обобщенных скоростей с помощью уравнений связей в выражении энергии T, которая приводится в результате такого исключения к минимальному числу параметров). В случае, когда уравнения связей представляют полные производные по времени конечных уравнений, связывающих обобщенные координаты системы, так можно поступать всегда. Но в случае неголономных связей это не так (приведена ссылка на работу [3]).

Решающее утверждение, на которое опирается Адамар, состоит в следующем. Пусть

$$A_k = \sum_{h=1}^{m} a_h^k \dot{q}_h - \dot{q}_k = 0 \quad (k = m+1, \ldots, m+p)$$

— уравнения наложенных на систему идеальных связей,

$$\sum_{h=1}^{m} a_h^k \delta q_h - \delta q_k = 0 \quad (k = m+1, \ldots, m+p)$$

— уравнения возможных перемещений системы,

$$\sum_{i=1}^{m+p} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (L = T + U) \tag{1}$$

— основное уравнение динамики. Адамар утверждает, что если описанное выше приведение к минимальному числу параметров справедливо, то подстановка

$$T = \sum_{k=m+1}^{m+p} \lambda_k A_k, \quad U = 0$$

в уравнение (1) должна приводить к тождественному равенству нулю. Здесь λ_k — любые функции от q и $\dot{q}$, линейные по $\dot{q}$, поскольку T — квадратичная форма последних. Данное утверждение Адамар не доказывает, а на с. 56 [7] даже называет его гипотезой.

Рассмотрим подробнее самый простой случай $m = 2$, $p = 2$, с которого начинает Адамар. Уравнения связей имеют вид

$$A_3 = a_1^3 \dot{q}_1 + a_2^3 \dot{q}_2 - \dot{q}_3 = 0, \quad A_4 = a_1^4 \dot{q}_1 + a_2^4 \dot{q}_2 - \dot{q}_4 = 0. \tag{2}$$

Подставив $\lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$ вместо T и $U = 0$ в уравнение (1), в котором величины δq_i представляют возможные перемещения системы, убеждаемся, что производные $d\lambda_3/dt$ и $d\lambda_4/dt$ пропадают, и с учетом (2) получаются два соотношения

$$\dot{q}_2 \left(\lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4 \right) = 0, \quad \dot{q}_1 \left(\lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4 \right) = 0,$$

откуда следует, что необходимо

$$\lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4 = 0, \tag{3}$$

где

$$H_3 = \frac{\partial a_1^3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2^3}{\partial q_1} + a_2^3 \frac{\partial a_1^3}{\partial q_3} - a_1^3 \frac{\partial a_2^3}{\partial q_3} + a_2^4 \frac{\partial a_1^3}{\partial q_4} - a_1^4 \frac{\partial a_2^3}{\partial q_4},$$

$$H_4 = \frac{\partial a_1^4}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2^4}{\partial q_1} + a_2^3 \frac{\partial a_1^4}{\partial q_3} - a_1^3 \frac{\partial a_2^4}{\partial q_3} + a_2^4 \frac{\partial a_1^4}{\partial q_4} - a_1^4 \frac{\partial a_2^4}{\partial q_4}.$$

Условия $H_3 = 0$, $H_4 = 0$ означают интегрируемость уравнений (2) связей.

В этом месте Адамар пишет (переводим дословно [7, с. 52]): «Когда уравнения (2) образуют интегрируемую систему, и только в этом случае, можно принять во внимание эти уравнения сразу при вычислении T».

Приведенное заключение неверно. Рассмотрим пример неголономной системы с двумя степенями свободы. Однородный круглый диск катается по инерции без скольжения по горизонтальной плоскости, оставаясь постоянно в вертикальной плоскости (такую связь нетрудно реализовать механически). Примем, что масса и радиус диска равны единице. Пусть x, y — координаты центра диска, ρ — радиус инерции диска относительно его диаметра, φ, ψ — углы поворота относительно, соответственно, горизонтальной оси симметрии и вертикального диаметра диска.

Кинетическая энергия диска может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2\right) + \rho^2\dot{\varphi}^2.$$

Уравнения связей имеют вид

$$\dot{x} = \dot{\varphi}\cos\psi, \quad \dot{y} = \dot{\varphi}\sin\psi. \tag{4}$$

Возможные перемещения определяются равенствами

$$\delta x = \delta\varphi\cos\psi, \quad \delta y = \delta\varphi\sin\psi.$$

Из принципа Даламбера–Лагранжа (1) получаем, что

$$\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi + 2\rho^2\ddot{\varphi} = 0, \quad \rho^2\ddot{\psi} = 0,$$

откуда с учетом (4) следуют уравнения

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\psi} = 0. \tag{5}$$

Однако если учесть уравнения связей (4) с самого начала и подставить $\dot{x}$, $\dot{y}$ в выражение для кинетической энергии, то получим

$$T^* = \frac{1}{2}\,\rho^2\dot{\psi}^2 + \left(\frac{1}{2} + \rho^2\right)\dot{\varphi}^2.$$

Составленные для этой функции уравнения Лагранжа второго рода приводят к корректным уравнениям (5), при этом уравнения (4) связей неинтегрируемые. Таким образом, приведенное выше заключение в части «и только в этом случае» неверно, а для голономных связей оно очевидно.

В оставшейся части работы Адамар выводит уравнения типа (3) для случая линейных связей общего вида, не разрешенных относительно каких-либо обобщенных скоростей, и конкретизирует их для следующих задач механики: качение без скольжения одного тела по поверхности другого, качение тела без скольжения и верчения. Во второй задаче условия типа (3) приводят к заключению, что обе соприкасающиеся поверхности тел должны иметь одинаковую и постоянную кривизну, а три уравнения связей при этом становятся интегрируемыми. Рассмотрены также задачи об обкатывании материальной плоскостью и материальной прямой произвольной неподвижной поверхности.

Исследования Адамара продолжил А. Беген, основоположник теории сервосистем [13]. В работе [14], рассматривая задачу о качении без скольжения одного тела по другому, он указывает некоторые случаи, когда применимы уравнения Лагранжа второго рода.

Во-первых, это все случаи, когда траектории движения точки контакта по поверхностям тел известны заранее, до проведения каких-либо динамических исследований. Например, если имеются соотношения

$$u = \varphi(v), \quad u_1 = \varphi_1(v_1), \quad \theta = \psi(u, u_1), \quad s(u) - s_1(u_1) = C.$$

Здесь (u, v) и (u_1, v_1) — гауссовы координаты точки контакта I на поверхности S первого тела и, соответственно, S_1 второго, θ — угол между линиями $u = \mathrm{const}$ и $u_1 = \mathrm{const}$ в точке I, s и s_1 — длины дуг траектории точки I на поверхностях S и, соответственно, S_1, C — постоянная. Пять параметров u, v, u_1, v_1, θ выражаются через один, и уравнения связей становятся интегрируемыми.

Во-вторых, уравнения Лагранжа применимы, когда одно тело катается по другому, неподвижному, касаясь его двумя точками. Тогда траектории этих точек получаются из чисто кинематических соображений. Беген привел любопытный пример: шар катается по плоскости, касаясь одновременно поверхности кругового цилиндра, образующие которого ортогональны плоскости. Если цилиндр неподвижен, уравнения Лагранжа без множителей применимы. Но если цилиндр вращается вокруг своей оси по заданному закону, траектории точек контакта на плоскости и цилиндрической поверхности остаются по-прежнему априори известными, а вот траектории этих точек на сферической поверхности без анализа динамики системы определить нельзя, и воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода невозможно.

В-третьих, когда тело S ограничено острым краем (ребром) и заранее известны соотношения

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \quad \theta = \psi(u, u_1), \quad s(u) - s_1(u_1) = C,$$

где u — параметр, который фиксирует положение точки касания I на ребре, u_1 и v_1 — криволинейные координаты точки I на поверхности S_1, θ — угол между касательной к ребру и линией $u_1 = \mathrm{const}$, α — угол между плоскостями, касательными к ребру и поверхности S_1 в точке I. С помощью указанных соотношений пять параметров выражаются через два, например, через u и α, уравнения связей становятся интегрируемыми, и уравнения Лагранжа второго рода оказываются применимыми к минимальному числу параметров.

Беген отмечает, что если поверхности тел S и S_1 можно параметризовать так, что в каждый момент времени выполняются условия

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad \theta = 0,$$

то первые два уравнения гарантируют отсутствие взаимного проскальзывания тел, а третье — отсутствие верчения. Все три уравнения интегрируемые, и уравнения Лагранжа второго рода применимы к минимальному числу параметров. Примером такой ситуации является качение одного тела вращения по точно такому же другому, когда в начальный момент времени тела сопоставлены так, что симметричны относительно общей касательной плоскости, и эта симметрия сохраняется в процессе движения.

Отметим, что данный случай означает, что поверхности S и S_1 являются наложимыми одна на другую, первая квадратичная форма поверхностей одна и та же.

Беген доказал, что только в указанных двух случаях (заранее известны траектории точки касания на поверхностях или поверхности наложимы друг на друга) уравнения, выражающие отсутствие взаимного скольжения тел, являются вполне интегрируемыми.

Обращает на себя внимание тот факт, что более или менее содержательные утверждения относительно применимости уравнений Лагранжа Адамару и Бегену удалось сделать, когда число степеней свободы механической системы меньше трех (наложение дополнительной связи об отсутствии верчения в точке соприкосновения тел, априорное задание траектории точки контакта тел). Далее обнаруживается, что это неслучайно.

2. Задача о качении твердого тела по плоскости без скольжения. Пусть твердое тело катается без скольжения по плоскости, касаясь ее в каждое мгновение не более чем в одной точке. Кинетическая энергия тела имеет вид

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^T I(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}, \tag{6}$$

где m — масса тела, (x, y, z) — декартовы координаты центра масс, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ — вектор обобщенных координат тела (обычно это углы), описывающих вращение тела вокруг центра масс, $I(\mathbf{q})$ — центральный тензор инерции. Уравнения связей, которые выражают равенство нулю скорости той точки тела, которой оно касается опорной плоскости в рассматриваемое мгновение, имеют такую структуру [15]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2 + a_3\dot{q}_3, \\ \dot{y} &= b_1\dot{q}_1 + b_2\dot{q}_2 + b_3\dot{q}_3, \\ z &= f(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь коэффициенты a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$ суть функции только переменных q_1, q_2, q_3, то есть система чаплыгинская. Неинтегрируемость уравнений связей (7) означает, что среди шести различных кососимметрических символов

$$\gamma_{ij}^a = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}, \quad \gamma_{ij}^b = \frac{\partial b_i}{\partial q_j} - \frac{\partial b_j}{\partial q_i}, \quad (i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1), \tag{8}$$

есть ненулевые.

Обозначим через T^* результат подстановки в функцию T выражений $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ из уравнений связей (7). В уравнениях движения тела в форме Чаплыгина (Q_i — обобщенные силы)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} - Q_i = mR_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{9}$$

члены R_i имеют вид [16]

$$R_i = \dot{x}L_i(\dot{x}) + \dot{y}L_i(\dot{y}) + \dot{z}L_i(\dot{z}), \text{ где оператор } L_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

При помощи подстановки (7) в выражения для R_i получим три однородные квадратичные относительно обобщенных скоростей $\dot q_1$, $\dot q_2$, $\dot q_3$ формы. В случае, если они тождественно по скоростям обращаются в нуль, уравнения (9) становятся уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

число которых равно числу степеней свободы рассматриваемой механической системы.

Приравняв нулю коэффициенты форм R_1, R_2, R_3, получим 9 однородных алгебраических уравнений, линейных относительно шести величин (8). Матрица этой системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ -a_3 & 0 & a_2 & -b_3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & b_3 \\ a_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ -a_3 & a_1 & 0 & -b_3 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & -a_1 & a_2 & 0 & -b_1 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Последняя строка этой матрицы получается вычитанием шестой строки из третьей, поэтому ее в A можно отбросить. Полученную матрицу 8×6 обозначим через B.

Для совместности упомянутой системы линейных уравнений в случае ненулевых значений хотя бы некоторых из величин (8) необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank} B < 6. \tag{12}$$

Оказывается, проверка одного этого условия дает ответ на вопрос, возможно ли в рассматриваемой неголономной системе записать уравнения движения в виде (10).

Будем обозначать миноры 6-го порядка, составленные из строк матрицы B, буквой M с номерами выбранных строк в скобках. Так,

$$M(1, 5, 7, 8, 2, 4) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_1 b_3 - a_3 b_1).$$

Следовательно, по условию (12) и в силу произвола нумерации компонент вектора $\mathbf{q}$ имеем

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \tag{13}$$

Если $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, то первые два уравнения связей (7) дают

$$b_3 \dot x - a_3 \dot y = 0, \quad a_3 b_3 \neq 0. \tag{14}$$

Если $(a_1)^2 + (a_2)^2 \neq 0$, то из (13) следует, что

$$b_1 = \lambda(\mathbf{q}) a_1, \quad b_2 = \lambda(\mathbf{q}) a_2. \tag{15}$$

После подстановки (15) в матрицу B находим, что

$$M(1,2,3,4,6,8) = -(a_1)^3\,[b_3 - \lambda(\mathbf{q})a_3]^3$$

и

$$M(3,4,5,6,7,8) = (a_2)^3\,[b_3 - \lambda(\mathbf{q})a_3]^3\,.$$

Следовательно,

$$b_3 = \lambda(\mathbf{q})a_3,$$

и с учетом (15) получаем из (7) необходимое условие

$$\lambda(\mathbf{q})\dot{x} - \dot{y} = 0. \tag{16}$$

Соотношение (14) содержится в (16). Важно подчеркнуть, что равенство (16) должно выполняться постоянно во время движения, независимо от значений компонент угловой скорости тела, при этом функция $\lambda(\mathbf{q})$ определяется только положением тела относительно его центра масс.

Пусть $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — координаты радиус-вектора, проведенного из точки контакта тела с опорной плоскостью в центр масс, ω — мгновенная угловая скорость тела. Так как

$$\dot{x} = \omega_y z - \omega_z y, \quad \dot{y} = \omega_z x - \omega_x z,$$

равенство (16) запишется в виде

$$z\omega_x + \lambda(\mathbf{q})z\omega_y - [x + \lambda(\mathbf{q})y]\omega_z = 0,$$

откуда вытекает, что во время движения должны тождественно выполняться условия

$$x + \lambda(\mathbf{q})y = 0, \tag{17}$$

$$z = 0. \tag{18}$$

Первое ограничение означает, что тело имеет острый край (ребро), точками которого при движении касается опорной плоскости. А вот второму ограничению (18) удовлетворить нельзя: оно означает, что постоянно $\dot{z} = 0$, и, следовательно, поскольку случай сферы $f(q_1, q_2, q_3) \equiv \mathrm{const}$ (см. (7)) при одновременном выполнении условия (17) невозможен, число степеней свободы должно быть на единицу меньше. Это противоречие доказывает, что

в классической задаче с тремя степенями свободы о качении твердого тела по неподвижной плоскости без скольжения не существует случаев, когда все три уравнения Чаплыгина (9) *становятся уравнениями Лагранжа* (10).

Заметим, что одно из трех уравнений Чаплыгина может не содержать членов неголономности и, следовательно, принять вид уравнения Лагранжа, как это имеет место для уравнения, соответствующего углу нутации тяжелого круглого диска, который катается по плоскости без скольжения [2].

Посмотрим, как обстоят дела с уравнениями Чаплыгина в системах с двумя степенями свободы. Также будем рассматривать чаплыгинскую неголономную систему, представляющую собой тело, которое катается без скольжения по плоскости, но высота его центра масс над опорной плоскостью не меняется (например, наклон тела фиксируется подвижной подставкой с двумя ножками, которые скользят по плоскости без трения, а третья точка опоры — это точка соприкосновения тела с плоскостью).

Уравнения связей такой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(q_1, q_2)\,\dot{q}_1 + a_2(q_1, q_2)\,\dot{q}_2, \\ \dot{y} &= b_1(q_1, q_2)\,\dot{q}_1 + b_2(q_1, q_2)\,\dot{q}_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Условия тождественного равенства нулю членов неголономности mR_1, mR_2 в уравнениях Чаплыгина имеют вид [17]

$$a_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\right) + b_1\left(\frac{\partial b_1}{\partial q_2} - \frac{\partial b_2}{\partial q_1}\right) = 0, \tag{20}$$

$$a_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\right) + b_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial q_2} - \frac{\partial b_2}{\partial q_1}\right) = 0. \tag{21}$$

В локальных координатах дифференциальные 1-формы с двумя переменными можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_1\,dq_1 + a_2\,dq_2 &= G(q_1, q_2)\,du(q_1, q_2), \qquad G \neq 0, \\ b_1\,dq_1 + b_2\,dq_2 &= H(q_1, q_2)\,dv(q_1, q_2), \qquad H \neq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Возможны два случая: якобиан

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial q_1} & \dfrac{\partial u}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial q_1} & \dfrac{\partial v}{\partial q_2} \end{vmatrix}$$

локально не равен или равен нулю.

В первом случае вместо q_1, q_2 можно взять координаты u, v, и уравнения связей (19) примут вид

$$\dot{x} = g(u, v)\dot{u}, \quad \dot{y} = h(u, v)\dot{v}. \tag{23}$$

При этом условия, соответствующие (20) и (21), будут такими:

$$g\frac{\partial g}{\partial v} = 0, \quad -h\frac{\partial h}{\partial u} = 0;$$

то есть связи (23) голономные.

Во втором случае уравнения связей (19) запишем в виде

$$\dot{x} = \dot{u}\,l(u, w), \quad \dot{y} = \dot{u}\,p(u, w), \tag{24}$$

где $w(q_1, q_2)$ — любая функция, для которой $J(u, w) \neq 0$. Условие, соответствующее (21), удовлетворяется автоматически, а условие (20)

$$l\frac{\partial l}{\partial w} + p\frac{\partial p}{\partial w} = 0$$

сводится к виду

$$l^2 + p^2 = F(u).$$

В общем случае связи (24) *остаются неголономными.*

Именно этот случай реализуется выше, в примере п. 1.

3. Несколько замечаний. Выше обсуждались условия, при которых уравнения движения неголономной системы принимают вид уравнений Лагранжа второгого рода для минимального числа параметров, то есть когда число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы системы.

Возможен случай, когда уравнения Лагранжа второго рода справедливы для всех координат («зависимых» и «независимых») неголономной системы. Следуя Воронцу [18], в качестве связей можно рассматривать общие интегралы уравнений движения голономной системы с фиксированными (обычно нулевыми) значениями постоянных интегрирования. Эти связи являются идеальными, поскольку их реакции равны нулю. Уравнения Лагранжа первого рода с множителями связей становятся обычными уравнениями Лагранжа второго рода, потому что множители связей равны нулю.

Пример такой неголономной системы дает задача о катании по инерции однородного шара по горизонтальной плоскости $z = 0$ без скольжения. Кинетическая энергия шара имеет вид (6), а уравнения неголономных связей, выражающих равенство нулю скорости точки шара, которой он касается опорной плоскости,

$$\dot{x} - \omega_y a = 0, \quad \dot{y} + \omega_x a = 0 \quad (a \text{ — радиус шара})$$

являются общими интегралами дифференциальных уравнений $L_i(T) = 0$, $i = 1 \div 5$. Поэтому множители связей $\mu_1 \equiv 0$, $\mu_2 \equiv 0$, и уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа T справедливы для всех обобщенных координат системы x, y, q_1, q_2, q_3.

В силу структуры (6) кинетической энергии последние три из этих уравнений принимают вид [16]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = 0, \text{ где } \Theta = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^T I(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

хотя при $\Theta = T^*$ эти уравнения не имеют места.

И второе. Мы рассмотрели задачу о качении одного твердого тела по плоскости. Можно рассматривать составные системы тел с неголономными связями. В таких системах иногда тоже появляются уравнения Лагранжа второго рода, но редко. Пример: два одинаковых колеса насажены на общую ось, вокруг которой они могут свободно поворачиваться, и катаются без скольжения по плоскости [19–21]. Кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad T_1 = \frac{M}{2}(v_\parallel^2 + v_\perp^2 + \frac{2}{3}s^2\dot{\psi}^2),$$

$$T_2 = \frac{m}{2}\left[v_\parallel^2 + (v_\perp + s\dot{\psi})^2 + \frac{\rho^2}{2}\dot{\psi}^2 + \rho^2\dot{\varphi_1}^2\right], \quad T_3 = \frac{m}{2}\left[v_\parallel^2 + (v_\perp - s\dot{\psi})^2 + \frac{\rho^2}{2}\dot{\psi}^2 + \rho^2\dot{\varphi_2}^2\right],$$

где $v_\perp = -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi$, $\quad v_\parallel = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi$.

Здесь m — масса колеса, M — масса оси, $2s$ — длина оси, ρ — радиус инерции колеса. Обобщенные координаты: (x, y) — плоские координаты середины оси, φ_1, φ_2 — углы поворота колес, ψ — угол между положительной полуосью Ox и осью колесной пары.

Уравнения связей имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi &= 0, \\ v_\perp + s\dot{\psi} + r\dot{\varphi}_1 &= 0, \\ v_\perp - s\dot{\psi} + r\dot{\varphi}_2 &= 0 \end{aligned}$$

(r — геометрический радиус колес). Из двух последних уравнений получаем, что

$$2s\dot{\psi} + r(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 0, \text{ то есть } \psi = A + B(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(A, B — фиксированные постоянные).

Система имеет две степени свободы, и ее уравнения связей можно переписать так:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}r\,(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\sin\psi,$$
$$\dot{y} = -\frac{1}{2}r\,(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\cos\psi.$$

Дополнительные члены в обоих уравнениях Чаплыгина, которые возникают вследствие неинтегрируемости связей, тождественно равны нулю. Достаточно это проверить для одного уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}L_1(\dot{x}) + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}L_1(\dot{y}) = (M+2m)v_\perp r\left[(-\sin\psi)(-B\dot{\varphi}_2\cos\psi) + \cos\psi(-B\dot{\varphi}_2\sin\psi)\right] \equiv 0. \quad (25)$$

Итак, случаи появления уравнений Лагранжа второго рода в неголономных системах редки и являются исключительными. Нашей целью было подчеркнуть, что, тем не менее, *условие интегрируемости уравнений связей не является необходимым для того, чтобы уравнения движения неголономной системы в форме Чаплыгина принимали вид уравнений Лагранжа.*

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук: Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. Москва: Наука, 1989. 96 с.

[2] Ferrers N. M. Extension of Lagrange's equations // Q. J. Pure Appl. Math., №45[4] (March, 1872), pp. 1–5.

[3] Vierkandt A. Über gleitende und rollende Bewegung // Monatsh. Math. Phys., 1892, vol. 3, pp. 31–54, 97–134.

[4] Lindelöf E. Sur les mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal // Acta Soc. Sci. Fenn., 1895, vol. 20, no. 10, pp. 3–18.

[5] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Исследования по динамике неголономных систем / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. С. 9–27. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 57–75.)

[6] Appell P. Traité de Mécanique rationelle: T. 2: Dinamique des systèmes; Mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars, 1896. 538 pp.

[7] Appell P. Les mouvements de roulement en dynamique (avec deux notes de M. Hadamard). (Scientia, Série physico-mathématique, vol. 4.) Paris: Carré et Naud, 1899. 70 pp.

[8] Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies: In 2 vols. 6th ed. London: Macmillan, 1905.

[9] Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées: T. 4. Mécanique. Fasc. 4-1. Principes de la mécanique rationelle / A. Voss, E. Cosserat, F. Cosserat. Paris–Leipzig: Gauthier-Villars, Teubner, 1915. P. 1–187.

[4]Указанный журнал издавался отдельными тетрадями раз в квартал. Они позже по несколько штук сшивались в один том, который печатался заново. Вот почему в ссылках на указанную работу разнятся годы: том 12, в который вошла тетрадь №45, вышел в 1873 году.

[10] Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н. История механики твердого тела. Москва: Наука, 1982. 293 с.
[11] Меркин Д. Р. Краткая история классической механики Галилея – Ньютона. Москва: Физматлит, 1994. 160 с.
[12] Hadamard J. Sur les mouvements de roulement // Mém. Soc. sci. phys. nat. Bordeaux. 4e sér., 1895, vol. 5, pp. 397–417.
[13] Беген А. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. Москва: Наука, 1967. 171 с. [Béghin H. Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperri: Thése. Paris: Faculté des Sciences de Paris, 1922. 132 pp.]
[14] Béghin H. Sur les conditions d'application des équations de Lagrange à un système non holonome // Bull. Soc. Math. France, 1929, vol. 57, pp. 118–124.
[15] Аппель П. Теоретическая механика: Т. 2. Москва: Физматгиз, 1960. 487 с.
[16] Новосёлов В. С. Вариационные методы в механике. Ленинград: ЛГУ, 1966. 72 с.
[17] Сумбатов А. С. О принципе Гамильтона для неголономных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1970, № 1, с. 98–101.
[18] Воронец П. В. Преобразование уравнений движения с помощью линейных интегралов движения (с приложением к задаче об n телах) // Изв. Киевск. ун-та, 1907, т. 47, № 1, с. IV.1–IV.82, № 2, с. IV.83–IV.180.
[19] Синг Дж. Л. Классическая динамика. Москва: Физматгиз, 1963. 448 с. [Synge J. L. Classical dynamics // Handbuch der Physik: Vol. III/1 / S. Flügge. Berlin: Springer, 1960. P. 1–225.]
[20] Kane T. R. Dynamics of nonholonomic systems // J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, no. 4, pp. 574–578.
[21] Шаги-Султан И. З. Метод кинематических характеристик в аналитической механике. Алма-Ата: Наука, 1966. 85 с.

Lagrange's equations in nonholonomic mechanics

Alexandr S. Sumbatov

A. A. Dorodnitsyn Computing Center of RAS
Vavilov str. 40, Moscow, 119991, Russia
sumbatow@ccas.ru

The question on possibility of writing the equations of motion of a nonholonomic system in the form of Lagrange's equations of the 2nd kind for the minimal number of parameters is considered. The corresponding results of J. Hadamard and H. Beghin are discussed. It is proved that in the classic problem on rolling of a rigid body along a fixed plane without sliding the case when all three Chaplygin's equations become Lagrange's equations does not exist. For the same problem with two degrees of freedom the most general kind of nonholonomic constraints that provides the correct using Lagrange's equations without multipliers, is established. Examples are given.

MSC 2010: 70H03, 70F25
Keywords: constraints, the Lagrange equations of the 1st and 2nd kind, multipliers of constraints, rolling of a rigid body without sliding, possible displacements of a system

Received November 6, 2012, accepted January 15, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 39–50 (Russian)