Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 2. С. 247–255.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 70H20; 70H06; 37K10

Разделение переменных для одного обобщения волчка Ковалевской

В. А. Худобахшов, А. П. Созонов

Данная работа посвящена исследованию одной интегрируемой деформации волчка Ковалевской методами бигамильтоновой геометрии. Получены переменные разделения для данной системы, найдены выражения для исходных переменных через переменные разделения и построены квадратуры в дифференциальной и интегральной формах.

Ключевые слова: бигамильтонова геометрия, разделение переменных

1. Введение

В работе [9] была найдена новая интегрируемая деформация волчка Ковалевской при нулевом значении интеграла площадей. Используя современные методы бигамильтоновой геометрии [3, 6–8], в данной работе построены переменные разделения и разделенные уравнения для этой динамической системы.

Фазовым пространством для изучаемой нами динамической системы являются симплектические листы алгебры Ли $e^*(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. В качестве исходных физических координат мы будем использовать вектор углового момента $J = (J_1, J_2, J_3)$ и вектор Пуассона $x = (x_1, x_2, x_3)$ в подвижной системе координат, связанной с главными осями инерции. В этих координатах скобка Ли – Пуассона имеет вид

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k, \quad \{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \tag{1.1}$$

Получено 26 апреля 2013 года
После доработки 20 мая 2013 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00061.

Худобахшов Виталий Алибахшович
vitaly.khudobakhshov@gmail.com
Созонов Алексей Петрович
sozonov.alexey@yandex.ru
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор Леви-Чевиты. Эта скобка Пуассона обладает функциями Казимира

$$C_1 = |x|^2 \equiv \sum_{k=1}^{3} x_k^2, \quad C_2 = \langle x, J\rangle \equiv \sum_{k=1}^{3} x_k J_k. \tag{1.2}$$

Если интеграл площадей $C_2 = 0$, то соответствующие четырехмерные симплектические листы симплектоморфны кокасательному расслоению двумерной сферы $T^*\mathbb{S}^2$. Так как с помощью канонического преобразования $x \to \alpha x$ всегда можно добиться случая $C_1 = 1$, далее под фазовым пространством понимается единичная сфера.

Рассмотрим интегрируемую деформацию волчка Ковалевской, найденую в работе [9]. Она определяется функцией Гамильтона вида

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2ax_1 - \frac{\lambda C_1}{x_3^2} + \frac{c}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{2C_1 - x_3^2}{x_2^2}\left(d + \frac{ex_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right). \tag{1.3}$$

При $\lambda = c = d = e = 0$ данная функция Гамильтона — это просто гамильтониан волчка Ковалевской [1, 4].

Если $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, то гамильтониан обобщенного волчка Ковалевской (1.3) коммутирует относительно скобки Пуассона (1.1) с интегралом движения

$$\begin{aligned} H_2 = {} & \left(J_1^2 - J_2^2 - 2ax_1 + \frac{\lambda(x_1^2 - x_2^2)}{x_3^2}\right)^2 + \left(2J_1J_2 - 2ax_2 + \frac{2\lambda x_1 x_2}{x_3^2}\right)^2 + \\ & + \frac{1}{x_2^4}\left(dx_3^2 + \frac{cx_2^2 + ex_3^2 x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)\left(2x_2^2(J_1^2+J_2^2) + dx_3^2 + \frac{cx_2^2 + ex_3^2x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) - \\ & - \frac{4ax_3^2(dx_1 + e\sqrt{x_1^2+x_2^2})}{x_2^2} - \frac{2\lambda}{x_2^2}\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}(cx_2^2 - ex_3^2x_1)}{x_3^2} - dx_1^2\right) - 4a^2. \end{aligned}$$

Данные интегралы движения H_1 и H_2 были найдены в работе [9]. Легко проверить, что переменные Ковалевской [1, 4] не являются переменными разделения, если одна из констант λ, c, d или e не равна нулю.

Для нахождения соответствующих переменных разделения воспользуемся фактом, что класс интегрируемых систем, которые допускают разделение переменных для уравнения Гамильтона – Якоби, практически совпадает с классом бигамильтоновых систем. Если найти дополнительный бивектор Пуассона P', совместимый с каноническим бивектором Пуассона

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

который невырожден, можно найти оператор рекурсии $N = P'P^{-1}$, а затем с его помощью найти переменные разделения для соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби. Как и в [3, 6], искомый бивектор Пуассона P' будем искать в форме

$$P' = \mathcal{L}_Y\, P, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{L}_Y$ является производной Ли от канонического бивектора P вдоль некоторого векторного поля Лиувилля Y:

$$\Big(\mathcal{L}_Y P\Big)_{ij} = \sum_{k=1}^{dimM} \left(Y_k \frac{\partial P_{ij}}{\partial z_k} - P_{kj} \frac{\partial Y_i}{\partial z_k} - P_{ik} \frac{\partial Y_j}{\partial z_k} \right).$$

Этого достаточно, для того чтобы обеспечить совместимость бивекторов P и P', то есть

$$[P, P'] = 0.$$

Только в этом случае оператор рекурсии N имеет нулевое кручение Нийенхейса, что, в свою очередь, является необходимым условием для построения переменных разделения [5]. Также потребуем, чтобы

$$[P', P'] = 0,$$

где $[\cdot, \cdot]$ — скобки Схоутена, которые в локальных координатах z на многообразии M имеют вид

$$[A, B]_{ijk} = - \sum_{m=1}^{dim\,M} \left(B_{mk} \frac{\partial A_{ij}}{\partial z_m} + A_{mk} \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_m} + \mathrm{cycle}(i, j, k) \right).$$

Последнее условие гарантирует, что P' является бивектором Пуассона, то есть что для скобки, порожденной бивектором P', выполняется тождество Якоби.

Для нахождения векторного поля Y (1.5) нам необходимо решить уравнения

$$[\mathcal{L}_Y P, \mathcal{L}_Y P] = 0, \quad \{H_1, H_2\}' = \langle dH_1, \mathcal{L}_Y P dH_2 \rangle = 0, \tag{1.6}$$

которые означают, что $P' = \mathcal{L}_Y P$ является бивектором Пуассона, совместным с каноническим, и интегралы движения находятся в инволюции относительно соответствующих скобок Пуассона. Всюду далее мы будем предполагать, что элементы искомого векторного поля Y являются неоднородными полиномами по импульсам не более чем второго порядка.

2. Построение переменных разделения

Перейдем от исходного пуассонова многообразия $M = e^*(3)$ к симплектическому $M = T^*\mathbb{S}^2$. Для этого используем сферические координаты и соответствующие им импульсы

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin\varphi \sin\theta, \quad J_1 = \frac{\sin\varphi\, \cos\theta}{\sin\theta}\, p_\varphi - \cos\varphi\, p_\theta, \\ x_2 &= \cos\varphi \sin\theta, \quad J_2 = \frac{\cos\varphi\, \cos\theta}{\sin\theta}\, p_\varphi + \sin\varphi\, p_\theta, \\ x_3 &= \cos\theta, \quad J_3 = -p_\varphi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

такие, что

$$\{\varphi, p_\varphi\} = \{\theta, p_\theta\} = 1, \quad \{\varphi, \theta\} = \{p_\varphi, p_\theta\} = \{\varphi, p_\theta\} = \{\theta, p_\varphi\} = 0. \tag{2.2}$$

Это соответствует каноническому бивектору Пуассона в форме (1.4). В этом случае

$$C_1 = \langle x, x \rangle = 1, \quad C_2 = \langle x, J \rangle = 0,$$

и собственные числа оператора рекурсии $N = P'P^{-1}$ представляют собой искомые переменные разделения[1].

[1]Такие переменные иногда называют переменными Дарбу – Нийенхейса.

2.1. Случай $\lambda = 0$

Решая уравнения (1.6) с помощью квадратичного по импульсам p_φ и p_θ анзаца для компонент векторного поля Y, мы получим, что при $\lambda = 0$ искомое векторное поле Y (1.5) представимо в виде прямой суммы кинетического и потенциального слагаемых

$$Y = \begin{pmatrix} Y_T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_T \\ Y_V \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где

$$Y_T = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{\cos\theta} + \ln\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) p_\varphi p_\theta \\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\, p_\varphi^2 + \dfrac{1}{2\cos\theta} p_\theta^2 \end{pmatrix}$$

и

$$Y_V = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} \sin\varphi\, p_\varphi + \cos\varphi\tan\theta\, p_\theta \\ -\cos\varphi\cot\theta\, p_\varphi - \sin\varphi\, p_\theta \end{pmatrix} - \frac{d\, p_\theta}{\cos^2\varphi}\begin{pmatrix} \dfrac{\tan\varphi}{\cos\theta} \\ -\dfrac{1}{2\sin\theta} \end{pmatrix} + \frac{e\, p_\theta}{\cos^2\varphi}\begin{pmatrix} \dfrac{cos^2\varphi - 2}{\cos\varphi\cos\theta} \\ \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \end{pmatrix}.$$

Соответствующие деформации канонических скобок Пуассона $\{.\,,.\}$ (2.2) имеют вид

$$\{\varphi,\theta\}' = \frac{p_\varphi}{\cos\theta}, \quad \{\varphi, p_\varphi\}' = -\frac{a\sin\phi}{2}, \quad \{\varphi, p_\theta\}' = \frac{a\cos\phi\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{p_\varphi\, p_\theta}{\cos^2\theta\sin\theta},$$

$$\{\theta, p_\varphi\}' = \frac{a\cos\varphi\sin\theta}{2\cos\theta} + \frac{(2d\sin\varphi - e\cos^2\varphi + 2e)}{2\cos^3\varphi\cos\theta},$$

$$\{\theta, p_\theta\}' = \frac{a\sin\varphi}{2} - \frac{p_\varphi^2}{2\sin\theta} - \frac{\sin\theta\, p_\theta^2}{2\cos^2\theta} - \frac{d + e\sin\varphi}{2\sin\theta\cos^2\varphi},$$

$$\{p_\varphi, p_\theta\}' = \frac{a}{2}\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta\, p_\varphi}{\sin\theta} + \frac{\cos\varphi\sin^2\theta\, p_\theta}{\cos^2\theta}\right) + \frac{(2d\sin\varphi - e\cos^2\varphi + 2e)\, p_\theta}{2\sin\theta\cos^2\theta\cos^3\varphi^3}.$$

Корни характеристического полинома $\det(N - \mu I) = B^2(\mu)$, где

$$B(\mu) = (\mu - q_1)(\mu - q_2) = \mu^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(J_1^2 + J_2^2)}{x_3^2} + \frac{e x_1 + d\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_2^2}\right)\mu - \\ - \frac{a(a x_3^2 + 2x_1 J_1^2 - 2x_1 J_2^2 + 4x_2 J_1 J_2)}{2x_3^2} - \frac{a\left(d x_1 + e\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)}{x_2^2}, \tag{2.4}$$

являются переменными разделения. Областью определения координат $q_{1,2}$ является интервал

$$q_1 > a > q_2,$$

аналогично стандартным эллиптическим координатам на сфере.

Следуя [3], введем вспомогательный полином

$$A(\mu) = \frac{(\mu - q_1)p_2(q_2^2 - a^2)}{q_2 - q_1} + \frac{(\mu - q_2)p_1(q_1^2 - b^2)}{q_1 - q_2} = -\frac{x_1 J_2 - x_2 J_1}{x_3}\mu - \frac{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, J_2}{x_3}, \tag{2.5}$$

такой, что при любых ν и μ

$$\{B(\nu), A(\mu)\} = \frac{1}{\mu - \nu}\Big((\mu^2 - b^2)B(\nu) - (\nu^2 - b^2)B(\mu)\Big), \quad \{A(\nu), A(\mu)\} = 0.$$

Значения этого полинома при $\mu = q_{1,2}$

$$p_j = \frac{1}{q_j^2 - b^2}\, A(\mu = q_j), \quad j = 1, 2, \tag{2.6}$$

являются канонически сопряженными импульсами к координатам $q_{1,2}$:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_1, q_2\} = \{p_1, p_2\} = 0.$$

Для нахождения выражений для исходных переменных необходимо решить систему из уравнений $B(q_{1,2}) = 0$ и соответствующих уравнений для $p_{1,2}$ (2.6) относительно сферических координат. Подставив полученный результат в формулы (2.1), получаем выражения для исходных переменных через переменные разделения:

$$\begin{aligned}
J_3 &= -\frac{x_1J_1 + x_2J_2}{x_3}, \qquad x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2},\\
J_1 &= \frac{(a^2 - q_1^2)\Big(a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1q_2\Big)x_3p_1}{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(q_2 - q_1)x_2} + \frac{(q_2^2 - a^2)\Big(a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1q_1\Big)x_3p_2}{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(q_2 - q_1)x_2},\\
J_2 &= \frac{\big((a^2 - q_1^2)q_2p_1 + (q_2^2 - a^2)q_1p_2\big)x_3}{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(q_2 - q_1)}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

и

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{(a^2 - q_1^2)(a^2 - q_1q_2)p_1^2}{a(q_2 - q_1)^2} - \frac{2(a^2 - q_2^2)(a^2 - q_1^2)p_1p_2}{a(q_2 - q_1)^2} + \frac{(a^2 - q_2^2)(a^2 - q_1q_2)p_2^2}{a(q_2 - q_1)^2} -\\
&\quad - \frac{a\Big(d(q_1q_2 + a^2) - ae(q_1 + q_2)\Big)}{(a^2 - q_1^2)(q_2^2 - a^2)},\\
x_2 &= \frac{1}{a(q_2 - q_1)^2}\sqrt{\frac{z_1z_2}{(a^2 - q_1^2)(q_2^2 - a^2)}},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
z_1 &= \big((a - q_1)p_1 + (q_2 - a)p_2\big)^2(a + q_2)^2(a + q_1)^2 + a^2(q_2 - q_1)^2(d + e),\\
z_2 &= \big((a + q_1)p_1 - (q_2 + a)p_2\big)^2(a - q_2)^2(a - q_1)^2 + a^2(q_2 - q_1)^2(d - e).
\end{aligned}$$

Пары переменных разделения (q_1, p_1) (q_2, p_2) удовлетворяют разделенным уравнениям

$$\begin{aligned}
\Phi(q, p) = &\left(2(q^2 - a^2)p^2 + H_1 + \sqrt{H_2} + 2a\frac{da - eq}{u^2 - a^2}\right) \times\\
&\times \left(2(q^2 - a^2)p^2 + H_1 - \sqrt{H_2} + 2a\frac{da - eq}{u^2 - a^2}\right) - 4q^2 + 4cq = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

при $q = q_{1,2}$ и $p = p_{1,2}$. Уравнение $\Phi(q,p) = 0$ с вещественными коэффициентами определяет гиперэллиптическую кривую рода три со стандартным базисом голоморфных дифференциалов:

$$\Omega_1 = \frac{dq}{p\left((a^2-q^2)\big(2(q^2-a^2)p^2+H_1\big)-2a(ad-eq)\right)},$$
$$\Omega_2 = \frac{qdq}{p\left((a^2-q^2)\big(2(q^2-a^2)p^2+H_1\big)-2a(ad-eq)\right)},$$
$$\Omega_3 = \frac{\Big(a(ad-eq)+\big(a^2-q^2\big)^2p^2\Big)\,dq}{(a^2-q^2)p\left((a^2-q^2)\big(2(q^2-a^2)p^2+H_1\big)-2a(ad-eq)\right)}.$$

В переменных разделения уравнения движения имеют вид

$$\frac{\dot q_1}{p_1\left((a^2-q_1^2)\big(2(q_1^2-a^2)p_1^2+H_1\big)-2a(ad-eq_1)\right)}+$$
$$+\frac{\dot q_2}{p_2\left((a^2-q_2^2)\big(2(q_2^2-a^2)p_2^2+H_1\big)-2a(ad-eq_2)\right)}=0,$$
$$\frac{\Big(a(ad-eq_1)+\big(a^2-q_1^2\big)^2p_1^2\Big)\,\dot q_1}{p_1(a^2-q_1^2)\left((a^2-q_1^2)\big(2(q_1^2-a^2)p_1^2+H_1\big)-2a(ad-eq_1)\right)}+$$
$$+\frac{\Big(a(ad-eq_2)+\big(a^2-q_2^2\big)^2p_2^2\Big)\,\dot q_2}{p_2(a^2-q_2^2)\left((a^2-q_2^2)\big(2(q_2^2-a^2)p_2^2+H_2\big)-2a(ad-eq_2)\right)}=-2.$$

Эти квадратуры в интегральной форме

$$\int_{q_0}^{q_1}\Omega_1+\int_{q_0}^{q_2}\Omega_1=\beta_1,\quad \int_{q_0}^{q_1}\Omega_3+\int_{q_0}^{q_2}\Omega_3=-2t+\beta_2 \tag{2.9}$$

представляют собой отображение Абеля – Якоби на гиперэллиптической кривой, определяемой уравнением $\Phi(q,p) = 0$. В частности, это означает, что вместо p в выражения для дифференциалов $\Omega_{1,3}$ (2.9) мы должны подставить функцию $p(q)$ от q и интегралов движения, полученную из уравнения (2.8).

2.2. Случай $\lambda \neq 0$

При $\lambda \neq 0$ из векторного поля Y (2.3) необходимо вычесть поле

$$Y_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\ln(\tan\theta)\right)p_\varphi \\ \dfrac{\sqrt{\lambda}\,p_\theta}{2\cos^2\theta} \\ \dfrac{\sqrt{\lambda}\,\zeta}{2\cos^2\theta} \\ -\dfrac{\lambda\sin\theta\,p_\theta}{\cos^4\theta}. \end{pmatrix},$$

где

$$\zeta = a\cos\varphi\Big(\cos^2\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) - \sin\theta\Big) - \frac{(2d\sin\varphi - e\cos^2\varphi + 2e)\big(1+\ln(\tan\theta)\cos^2\theta\big)}{\cos^3\varphi}.$$

Легко проверить, что при $\lambda \neq 0$ соответствующие переменные разделения связаны с переменными (2.4), (2.6) каноническим преобразованием

$$p_\theta \to p_\theta + \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos\theta}.$$

Естественно, что это преобразование можно непосредственно применить и к интегралам движения. Действительно, подставим переменные разделения (2.4) и (2.6) в разделенные уравнения:

$$\begin{gathered}\widetilde{\Phi}(q,p) = \left(2(q^2-a^2)p^2 + H_1 + \sqrt{H_2} + 2a\frac{da-eq}{u^2-a^2}\right)\times \\ \times\left(2(q^2-a^2)p^2 + H_1 - \sqrt{H_2} + 2a\frac{da-eq}{q^2-a^2}\right) - 4q^2 + 4cq - 8\sqrt{\lambda}(q^2-a^2)p = 0.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Решая полученные алгебраические уравнения относительно интегралов движения, мы получим гамильтониан

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2ax_1 - \frac{2(x_2J_1 - x_1J_2)\sqrt{\lambda}}{x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{c}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{2C_1 - x_3^2}{x_2^2}\left(d + \frac{ex_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right),$$

который после канонического преобразования

$$J_1 = J_1 + \frac{\sqrt{\lambda}\,x_2}{x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \qquad J_2 = J_2 - \frac{\sqrt{\lambda}\,x_1}{x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

совпадет с исходным гамильтонианом (1.3). Как и ранее, разделенные уравнения (2.10) определяют гиперэллиптическую кривую рода три с базисом голоморфных дифференциалов:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{dq}{p\left((a^2-q^2)\big(2(q^2-a^2)p^2+H_1\big) - 2a(ad-eq)\right) - \sqrt{\lambda}(a^2-q^2)},\\ \Omega_2 &= \frac{qdq}{p\left((a^2-q^2)\big(2(q^2-a^2)p^2+H_1\big) - 2a(ad-eq)\right) - \sqrt{\lambda}(a^2-q^2)},\\ \Omega_3 &= \frac{\Big(a(ad-eq) + \big(a^2-q^2\big)^2p^2\Big)\,dq}{(a^2-q^2)\left[p\left((a^2-q^2)\big(2(q^2-a^2)p^2+H_1\big) - 2a(ad-eq)\right) - \sqrt{\lambda}(a^2-q^2)\right]}.\end{aligned}$$

Соответствующие квадратуры в интегральной форме имеют вид

$$\int_{q_0}^{q_1}\Omega_1 + \int_{q_0}^{q_2}\Omega_1 = \beta_1, \quad \int_{q_0}^{q_1}\Omega_3 + \int_{q_0}^{q_2}\Omega_3 = -2t + \beta_2.$$

Тем самым мы получили переменные разделения и разделенные уравнения для интегрируемой деформации волчка Ковалевской, найденной в работе [9].

3. Заключение

Данная работа продолжает исследования, начатые в работах [3, 6], но уже применительно к интегрируемой системе, описанной в [9]. Для данной системы построен дополнительный бивектор Пуассона, совместный с канононическим, получены квадратуры в интегральной форме. Таким образом показано, насколько эффективно могут применяться методы бигамильтоновой геометрии для анализа интегрируемых систем. Как в ряде работ, использующих те же методы, здесь активно применялись системы компьютерной алгебры для решения систем уравнений, возникающих при нахождении переменных разделения. Как и в случае [3, 6], разделенные уравнения приводят к кривой рода три, что представляет большой интерес для дальнейших исследований. В работе [2] можно найти глубокое аналитическое исследование для аналогичной системы, где получено обращение отображения Абеля – Якоби на стратах якобиана кривой рода три в терминах σ-функций.

По сравнению с исходным волчком Ковалевской, описанная в работе деформация волчка Ковалевской имеет более сложную структуру, что приводит к гораздо большему объему вычислений, которые тем не менее можно провести с помощью современных средств компьютерной алгебры. При этом вопрос описания всего семейства возможных деформаций гамильтониана Ковалевской остается открытым.

Список литературы

[1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[2] Braden H. W., Enol'ski V. Z., Fedorov Yu. N. Dynamics on strata of trigonal Jacobians and some integrable problems of rigid body motion. arXiv:1210.3596 (2012).

[3] Khudobakhshov V. A., Tsiganov A. V. Integrable systems on the sphere associated with genus three algebraic curves // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 3–4, pp. 396–414.

[4] Kowalevski S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math., 1889, vol. 12, pp. 177–232.

[5] Magri F., Casati P., Falqui G., Pedroni M. Eight lectures on integrable systems // Integrability of nonlinear systems / Y. Kosmann-Schwarzbach, K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos (Eds.). (Lecture Notes in Phys., vol. 495.) Berlin: Springer, 1997. P. 256–296.

[6] Tsiganov A. V. New variables of separation for particular case of the Kowalevski top // Regul. Chaotic Dyn., 2010, vol. 15, no. 6, pp. 657–667.

[7] Tsiganov A. V. On bi-integrable natural hamiltonian systems on Riemannian manifolds // J. Nonlinear Math. Phys., 2011, vol. 18, no. 2, pp. 245–268.

[8] Tsiganov A. V. On natural Poisson bivectors on the sphere // J. Phys. A, 2011, vol. 44, 105203, 15 pp.

[9] Yehia H. M. The master integrable two-dimensional system with a quartic second integral // J. Phys. A, 2006, vol. 39, pp. 5807–5824.

Separation of variables for some generalisation of the Kowalevski top

Vitaly A. Khudobakhshov[1], Alexey P. Sozonov[2]

[1,2]Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia

[1]vitaly.khudobakhshov@gmail.com, [2]sozonov.alexey@yandex.ru

One integrable deformation of the Kowalevski top is studied in framework of the bi-hamiltonian geometry. The main result is the calculation of the variables of separation and of the corresponding quadratures in differential and integral forms.

MSC 2010: 70H20; 70H06; 37K10
Keywords: bi-hamiltonian geometry, separation of variables

Received April 26, 2013, accepted May 20, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 247–255 (Russian)