



УДК: 517.9

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

Об одном бифуркационном сценарии рождения аттрактора типа Смейла – Вильямса

О. Б. Исаева, С. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев, А. Пиковский

Описан один из возможных сценариев рождения или разрушения странных гиперболических аттракторов на примере соленоида Смейла – Вильямса. Механизм перехода, наблюдаемого при изменении управляющего параметра, заключается в слиянии орбит, принадлежащих аттрактору с находящимися с ними в однозначном соответствии орбитами, принадлежащими неустойчивому инвариантному множеству на границе бассейна притяжения,

Получено 10 января 2013 года

После доработки 27 февраля 2013 года

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-02-31342 (О. Б. И.), РФФИ-ННИО № 11-02-91334 (С. П. К., А. П.) и РФФИ № 12-02-00342 (И. Р. С.).

Исаева Ольга Борисовна

isaevao@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кузнецов Сергей Петрович

spkuz@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Institute of Physics and Astronomy, University of Potsdam
14476, Germany, Potsdam-Golm, Karl-Liebknecht-Strasse 24/25

Сатаев Игорь Рустамович

sataevir@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Пиковский Аркадий

pikovsky@uni-potsdam.de

Institute of Physics and Astronomy, University of Potsdam
14476, Germany, Potsdam-Golm, Karl-Liebknecht-Strasse 24/25

через бифуркации седло-узлового типа. Переход происходит не одновременно, а занимает интервал конечной ширины по управляющему параметру. В расширенном пространстве переменных состояния и управляющего параметра это можно рассматривать как трансформацию устойчивого и неустойчивого соленоида друг в друга. Обсуждается ряд модельных систем, демонстрирующих указанный сценарий, — это специально сконструированные дискретные отображения и физически реализуемая система связанных поочередно возбуждаемых неавтономных осцилляторов ван дер Поля. Проведен подробный анализ присущих сценарию свойств, указаны связанные с ним статистические и скейлинговые закономерности.

Ключевые слова: странный аттрактор, хаос, бифуркация, автоколебательная система, гиперболический хаос

Введение

В последние годы активно изучается проблема физической реализации абстрактных феноменов нелинейной динамики [1–8]. В частности, это относится к хаосу, связанному со структурно устойчивыми гиперболическими аттракторами, такими как соленоид Смейла–Вильямса [3–5]. В учебниках нелинейной динамики встречается пример такого аттрактора в системе с дискретным временем — отображение, записанное в цилиндрических координатах в виде

$$r_{n+1} = 1 + \alpha(r_n - 1) + \beta \cos \varphi_n, \quad (1)$$

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n, \quad (2)$$

$$h_{n+1} = \alpha h_n + \beta \sin \varphi_n, \quad (3)$$

где $0 < \alpha < 1/2$, $\beta < 1$, например для $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.3$. Существенный момент состоит в том, что угловая координата подчиняется растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли.

Действие отображения (1)–(3) можно описать следующим образом. Рассмотрим в фазовом пространстве область в виде тора: $r = 1 + (1/2) \cos u$, $\varphi = v$, $h = (1/2) \sin u$, $0 < u, v < 2\pi$. За одну итерацию отображения (1)–(3) эта область трансформируется в двойную петлю, вложенную внутрь исходного тора, как на рисунке 1. При этом фазовый объем уменьшается, то есть речь идет о диссипативной системе. При многократных итерациях отображения формируется соленоид — аттрактор, образованный из множества петель, с фрактальной поперечной структурой.



Рис. 1. Тороидальная область и два шага построения соленоида Смейла–Вильямса.

Как представитель класса равномерно гиперболических хаотических аттракторов, аттрактор Смейла–Вильямса характеризуется свойствами, интересными для возможных экспериментальных и технических приложений [9–12]. Гиперболическая природа аттрактора

выражается в том, что все принадлежащие ему траектории седловые. Размерности устойчивых и неустойчивых многообразий одинаковы для всех траекторий, а устойчивые многообразия пересекают неустойчивые лишь трансверсально, без касаний. Это влечет структурную устойчивость, или грубость: характеристики динамики не чувствительны к малым «шевелениям» параметров и другим возмущениям системы (в отличие, например, от фейгенбаумовского хаоса).

До последнего времени соленоид Смейла – Вильямса и другие гиперболические аттракторы были представлены в литературе только абстрактными математическими моделями [9–11], и лишь сравнительно недавно предложены первые допускающие физическую реализацию примеры систем с такими аттракторами [3, 4]. Условия гиперболичности были проверены численно на основе статистики распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями [3], с применением критерия инвариантности сжимающихся и расширяющихся конусов [13, 14], а также в рамках исследования, выполненного на уровне доказательных вычислений [15]. Было также изучено влияние шума [16]. Был разработан ряд модификаций системы [5, 17–20], описаны модели, реализующие аттрактор Плыкина [21] и некоторые другие, казавшиеся совершенно абстрактными классические феномены нелинейной динамики [6–8].

Открытым остается вопрос о путях перехода к гиперболической хаотической динамике при изменении параметров системы. Бифуркационный анализ такого рода по существу отсутствует, за исключением ситуации, рассмотренной Тураевым и Шильниковым, так называемой «катастрофы голубого неба» [22].

В настоящей работе предложен и изучен один из возможных сценариев рождения аттрактора типа Смейла – Вильямса, в какой-то мере аналогичный феномену кризиса аттрактора, описанному в [23]. Переход занимает конечный по ширине интервал управляющего параметра и включает множество седло-узловых бифуркаций пар неустойчивых циклов, принадлежащих аттрактору и инвариантному множеству, представляющему собой границу бассейна притяжения. В первом разделе введено в рассмотрение модельное отображение с комплексной переменной (не аналитическое), удобное для анализа и объяснения сценария, имеющее хаотический аттрактор, эквивалентный плоской проекции соленоида. Во втором разделе показана возможность перейти к обратимому отображению более высокой размерности с аналогичными свойствами, которое могло бы служить отображением Пуанкаре потоковой системы. В третьем разделе тот же сценарий выявлен и проиллюстрирован для реалистичной потоковой системы в виде связанных неавтономных автоколебательных систем с поочередным возбуждением [3].

1. Седло-узловой сценарий рождения аттрактора Смейла – Вильямса в модельном отображении

1.1. Модельное отображение с одной комплексной переменной

Для анализа сценария рождения или разрушения гиперболического аттрактора желательно иметь простую модельную систему с дискретным временем. Использовать непосредственно отображение (1)–(3) неудобно по целому ряду причин.¹

¹Одна из причин состоит в том, что реализующийся в отображении (1)–(3) аттрактор не соответствует в топологическом смысле тому, который мог бы возникнуть в отображении Пуанкаре потоковой системы. Геометрическая конструкция, реально связанная с отображением (1)–(3), такова. Возьмем замкнутую трубку, представляющую поверхность тора, разрежем ее в каком-то

Начнем с отображения для комплексной переменной z вида

$$z_{n+1} = \frac{Rz_n^2}{\sqrt{1 + |z_n|^4}}, \quad (1.1)$$

где R — параметр, который считаем действительным. Полагая $z = re^{i\varphi}$, можно представить (1.1) через вещественные переменные в виде нелинейного отображения для амплитуды и отображения Бернулли для угловой переменной (фазы):

$$r_{n+1} = \frac{Rr_n^2}{\sqrt{1 + r_n^4}}, \quad \varphi_{n+1} = 2\varphi_n \pmod{2\pi}. \quad (1.2)$$

При малых значениях R отображение для радиальной переменной r имеет устойчивую неподвижную точку в нуле O (см. рис. 2а). С ростом параметра R в некоторый момент, а именно, $R = \sqrt{2}$, имеет место касательная бифуркация, когда при $r = 1$ «из воздуха» рождается пара неподвижных точек — устойчивая и неустойчивая, $r_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}R^4 - 1}}$.

Применительно к отображению (1.1) устойчивая точка r_2 ассоциируется с аттрактором A , расположенным на окружности, угловая координата на которой подчиняется отображению Бернулли (рис. 2б). Неустойчивая точка r_1 соответствует неустойчивой инвариантной

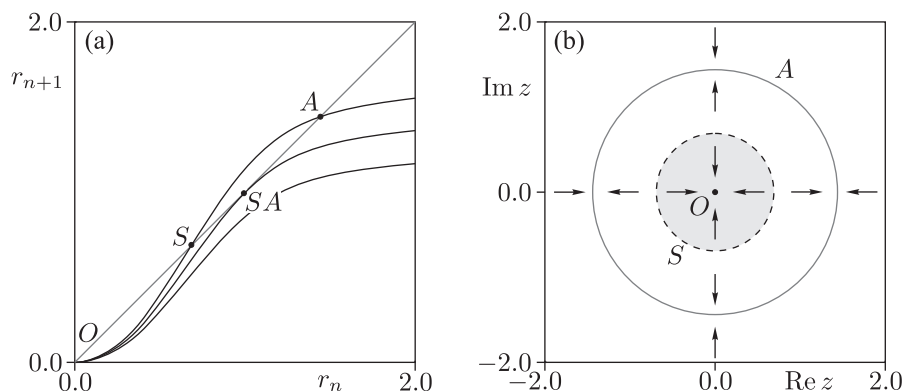


Рис. 2. (а) Итерационная диаграмма для радиальной составляющей комплексной переменной отображения (1.1) и (б) устройство фазовой плоскости этого отображения. O — притягивающая неподвижная точка, A — притягивающая точка (на рис. а) или соответствующий ей аттрактор в виде окружности (на рис. б), S — отталкивающая неподвижная точка (на рис. а) и репеллер в виде окружности (на рис. б). Репеллер S является границей между бассейнами притяжения аттракторов O (серый цвет) и A (белый цвет).

месте меридиональной плоскостью, затем растянем по длине вдвое, сожмем по толщине, сложим двойной петлей и склеим края точно на месте сделанного ранее разреза. Если попытаться выполнить деформацию тора непрерывно, без разрезания (например, с реальной резиновой трубкой), то можно заметить, что трубка неизбежно претерпевает дополнительное азимутальное *кручение*, так что склеивать края надо бы не напрямую, а выполнив их относительный поворот на угол 2π . Следовательно, отображение (1)–(3) *не годится* в качестве отправной точки для построения физической потоковой системы, доставляющей надстройку аттрактора Смейла–Вильямса, и для этой цели надо развить какие-то иные подходы.

кривой в виде окружности, где динамика угловой переменной также следует отображению Бернулли. Она выступает как граница между бассейнами притяжения двух сосуществующих аттракторов — неподвижной точки O и хаотического аттрактора A .

Модифицируем отображение (1.1), введя дополнительный параметр ε ,

$$z_{n+1} = \frac{Rz_n(z_n + \varepsilon)}{\sqrt{1 + |z_n(z_n + \varepsilon)|^2}}, \quad (1.3)$$

и посмотрим, как изменится динамика для ненулевых ε . При малых значениях R единственным аттрактором по-прежнему будет точка O в начале координат. При больших R присутствует второй аттрактор A в области больших $|z|$ (рис. 3). Дополнительный член в отображении (1.3) приводит к некоторой модификации динамики на аттракторе, но фазовая переменная подчиняется отображению того же типа, как отображение Бернулли. Инвариантное множество A теперь не совпадает с окружностью, а приобретает расщепленную (фрактальную) поперечную структуру. Граница раздела между бассейнами притяжения неподвижной точки O (серая область на рис. 3) и аттрактора A также отличается от окружности: это неустойчивое хаотическое инвариантное множество S , обладающее фрактальной поперечной структурой.

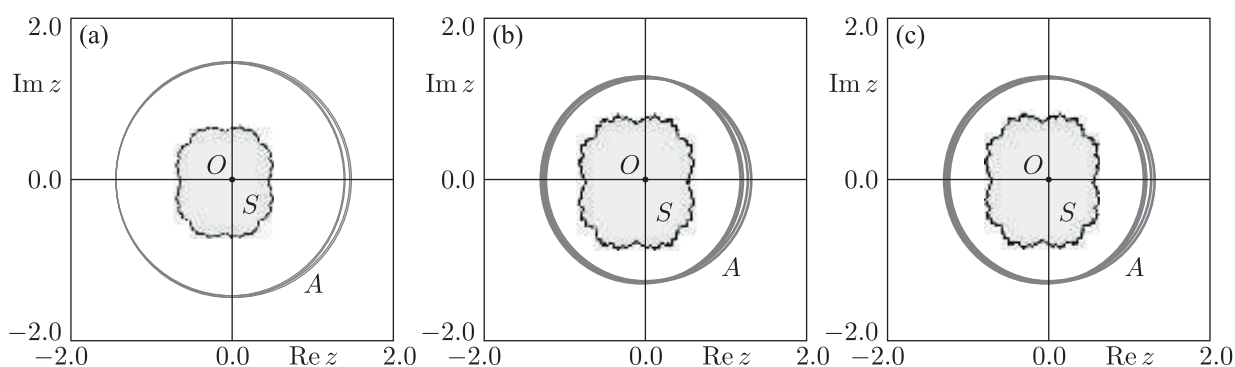


Рис. 3. Устройство фазовой плоскости системы (1.3) при $\varepsilon = 0.2$ и $R = 1.6$ (a), $R = 1.5$ (b), $R = 1.485$ (c). Указаны притягивающая неподвижная точка O , хаотическое инвариантное множество A и репеллер S — граница между бассейнами притяжения аттракторов A (белый цвет) и O (серый цвет).

Обсудим связь между системой (1.3) и отображением с аттрактором Смейла–Вильямса (1)–(3). В полярных координатах отображение (1.3) можно записать как

$$r_{n+1} = Rr_n^2 / \sqrt{1 + r_n^4} + \varepsilon R F(r_n) \cos \varphi_n + O(\varepsilon^2), \quad (1.4)$$

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n - \varepsilon(1/r_n) \sin \varphi_n + O(\varepsilon^2) \pmod{2\pi}. \quad (1.5)$$

Отображение для угловой переменной (1.5) представляет собой отображение Бернулли с возмущением, которым при больших значениях r можно пренебречь. Уравнение для радиальной переменной (1.4) в нулевом приближении отвечает графику на рисунке 2а. Для больших R , когда присутствует точка пересечения A , график можно аппроксимировать линейной зависимостью с угловым коэффициентом меньше 1, которая, с точностью до замены переменных, эквивалентна двум первым слагаемым в уравнении (1). Линейный по параметру ε член в уравнении (1.4) пропорционален $\cos \varphi$. (Именно такая зависимость от угловой переменной в (1)–(3) приводит к расщеплению образа с образованием двойной петли при

формировании соленоида.) Однако в нашем случае при нем присутствует коэффициент, пропорциональный параметру R и функции $F(r) = r(1+r^4)^{-3/2}$. Эта функция асимптотически стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, причем скорость убывания при $r \gg 1$ приближается к нулю, и функцию F в интересующем нас интервале r можно приближенно считать константой — малой, но не нулевой. Если параметр R при этом достаточно велик, то линейное по ε слагаемое в (1.4) будет значимым, отвечая последнему слагаемому в (1). Таким образом, в случае малых ε и больших R отображение (1.4)–(1.5) согласуется с выражениями для радиальной и угловой переменной в (1)–(2) в области, где располагается аттрактор A при $R \gg 1$.² Заметим также, что переменная h в (1)–(3) никак не влияет на радиальную и угловую переменные. Поэтому аттрактор A в отображении (1.4)–(1.5) в указанных приближениях можно трактовать как проекцию соленоида Смейла–Вильямса на плоскость.

Инвариантное множество S является абсолютным репеллером, так что при обращении времени оно обязано стать притягивающим и для его построения в численных расчетах можно использовать итерации в обратном времени согласно соотношениям

$$z_n^2 + \varepsilon z_n = \frac{z_{n+1}}{\sqrt{R^2 - |z_{n+1}|^2}} \equiv Z, \quad z_n = -\varepsilon/2 \pm \sqrt{\varepsilon^2/4 + Z}. \quad (1.6)$$

Здесь плюс или минус перед квадратным корнем выбирается на каждом шаге случайным образом. Визуально множество S напоминает множество Жюлиа, классический объект теории итерируемых комплексных аналитических отображений [10, 24].³

С уменьшением параметра R характерный размер аттрактора A уменьшается, а размер множества S , напротив, увеличивается (рис. 3b–c). По мере сближения этих множеств элементы поперечной структуры S вытягиваются в радиальном направлении, и оно становится все менее похожим на исходное множество Жюлиа. При некотором значении параметра $R = R_c$, очевидно, происходит касание A и S и наступает кризис аттрактора.

Обратимся к исследованию динамики отображения (1.3) с привлечением показателей Ляпунова и анализа периодических орбит, встроенных в хаотические множества. На рисунке 4 приведены зависимости показателей Ляпунова для сосуществующих в определенной области аттракторов O и A от параметра R при достаточно малом значении $\varepsilon = 0.2$.⁴ Показатели Ляпунова $\Lambda_{1,2}^O$ для притягивающей точки O отрицательны. Два показателя $\Lambda_{1,2}^A$ для аттрактора A имеют разные знаки, причем присутствует протяженный участок, где первый показатель практически постоянный $\Lambda_1^A \approx \ln 2$, а второй зависит от параметра гладким образом. В окрестности значения R , отвечающего кризису аттрактора A , графики его ляпуновских показателей резко обрываются.

На рисунке 4b приведены зависимости мультипликаторов циклов периода 1 и 2, принадлежащих множествам A и S , от параметра R . Ветви, отвечающие мультипликаторам

²Следует отметить, что функция $F(r)$ быстро меняется в области малых значений переменной, а именно: быстро нарастает от нуля до максимального значения приблизительно 0.51 при $r = 9.67$, а далее монотонно убывает. В области малых значений $r = |z|$ располагается множество S , на топологию которого функция F будет влиять в большой мере.

³В самом деле, в пренебрежении нелинейным членом в знаменателе отображение (1.3) принимает вид комплексного аналитического квадратичного отображения $z_{n+1} = R(z_n^2 + \varepsilon z_n)$, которое служит приемлемым приближением, пока в области расположения множества S переменная z по модулю невелика.

⁴При больших величинах ε топология отображения для фазы искажается и перестает соответствовать отображению Бернулли, в связи с чем могут наблюдаться новые, отличные от рассматриваемого, сценарии трансформации аттрактора Смейла–Вильямса.

циклов из A и S , сливаются в точках складки, причем те, которые отвечают за устойчивость (или неустойчивость) в радиальном направлении, приходят при этом к значению $+1$. Седло-узловые бифуркации, приводящие к гибели или к рождению «из воздуха» пар циклов, для орбит периода 1 и 2 имеют место при разных значениях параметра.

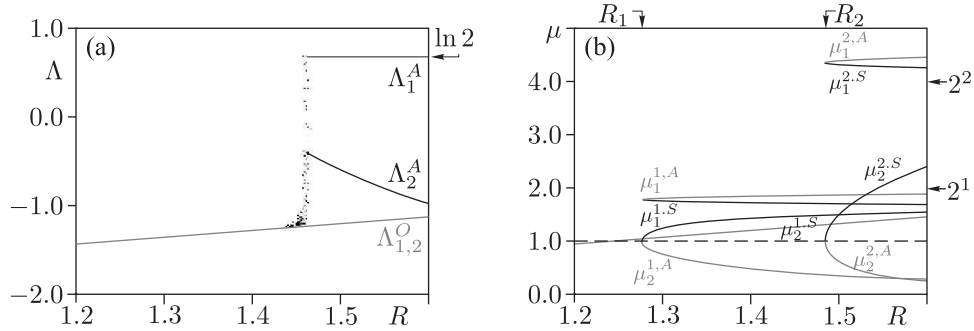


Рис. 4. Спектр показателей Ляпунова (а) и мультипликаторы принадлежащих множеств A и S циклов периода 1 и 2 (б) для системы (1.3) в зависимости от R при $\varepsilon = 0.2$.

Чтобы дополнить картину динамики системы (1.3), на рисунке 5 представлены схемы устройства плоскости параметров (R, ε) . На рисунке 5а приведена карта старшего показателя Ляпунова. Однородным серым цветом показаны области существования хаотического аттрактора ($\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0$), а оттенками серого от светлых до темных тонов — области уменьшающегося отрицательного показателя ($\Lambda_{1,2} < 0$), которые отвечают наличию периодического аттрактора. Области сосуществования двух типов аттракторов представлены «полосатой» окраской. Указанные стрелками линии 1 и 2, отвечающие уравнениям $R\varepsilon = \pm 1$, определяют границу устойчивости аттрактора O . (Его бифуркации могут вести к возникновению иных устойчивых периодических режимов.) Линии 3 и 4 отвечают границам существования неподвижной точки седлового типа, принадлежащей множеству A .

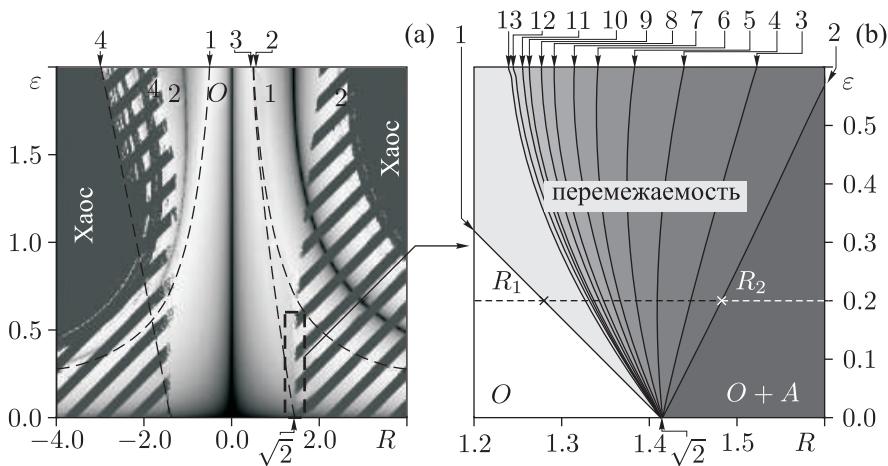


Рис. 5. Схемы устройства плоскости параметров (R, ε) отображения (1.3). Карта старшего показателя Ляпунова (а), где тона серого цвета от темных до светлых отвечают растущим по модулю отрицательным показателям Λ_1 , однородный серый цвет — положительным. Области мультистабильности показаны штриховкой. Схема «гибели» циклов, принадлежащих множествам S и A (б). Цифрами указаны границы областей существования хотя бы одного неустойчивого цикла соответствующего периода.



Эти кривые, представляемые в параметрической форме уравнениями $R = \pm(z^{2/3} + z^2)^{1/2}$, $\varepsilon = z^{-1/3} - z$, $z \in \mathbf{R}$, $R(z + \varepsilon) > 0$, $|R|^2 > |z|^2$, не совпадают, как можно видеть, с границей области положительного старшего показателя Ляпунова.

1.2. Периодические орбиты

Напомним, что динамика на инвариантных множествах S и A допускает кодирование двумя символами согласно схеме Бернулли. Символическую динамику можно связать с алгоритмом итераций в обратном времени (1.6): последовательность символов отвечает выбору знака плюс или минус на каждом шаге. Периодические орбиты (циклы) на S получаются итерациями в обратном времени (1.6) с выбором знаков, предписанным заданным периодическим кодом. Перебирая все коды в количестве 2^N для периода N можно найти все циклы, период которых p не превышает N . Циклы на A отыскиваются методом продолжения по параметру [25] от $\varepsilon = 0$, где они легко находятся применением метода Ньютона при каждом шаге по параметру для уточнения положения точек на цикле.

В таблице 1 приведены мультипликаторы циклов, принадлежащих S и A . Символическая последовательность отвечает посещению траекторией правой (А) и левой (В) ветвей на графике отображения Бернулли для угловой переменной φ . Из таблицы видно, что при достаточно большом $R = 1.6$ в аттракторе присутствуют циклы, соответствующие всем возможным символическим последовательностям. Все они седловые, и для их старших мультипликаторов справедлива оценка $\mu_1^p \cong 2^p$.

Если рассмотреть расширенное пространство, добавив к пространству состояний координатную ось параметра, отвечающего за управление бифуркацией, то седло-узловая бифуркация, как известно, представляется геометрически с помощью поверхности со складкой [25]. В рамках такого представления кризис аттрактора A через слияние его орбит с орбитами S можно интерпретировать как преобразование аттрактора A в неустойчивое множество S в расширенном пространстве. На рисунке 6 приведена иллюстрация, построенная на основе численных расчетов для отображения (1.3). Фигура, образованная элементами периодических орбит из A и S в расширенном пространстве переменных $\text{Re } z$, $\text{Im } z$ и

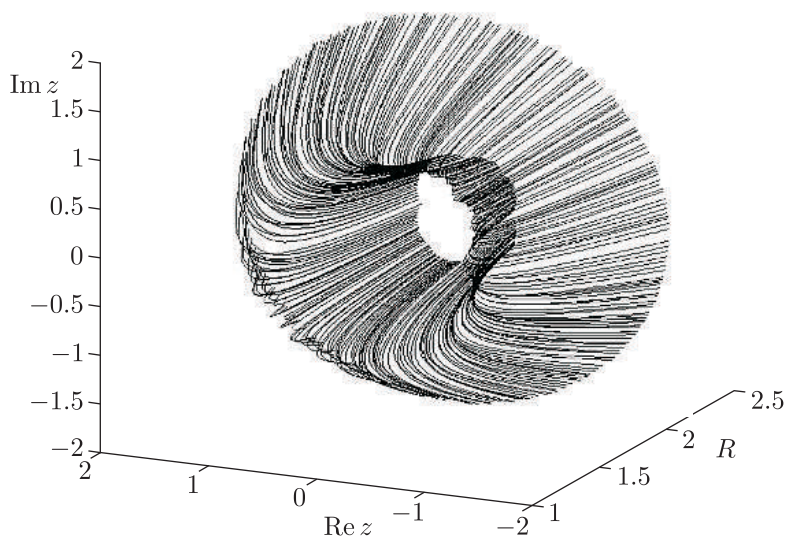


Рис. 6. Множество периодических орбит отображения (1.3) с периодами $p < 7$, изображенные в расширенном пространстве «фазовые переменные – управляющий параметр».

Таблица 1. Мультипликаторы циклов периода p , принадлежащих множествам A и S , для системы (1.3) при $R = 1.6$, $\varepsilon = 0.2$ и значения R , отвечающие слиянию этих циклов, при $\varepsilon = 0.2$. Во второй колонке указаны последовательности знаков, употребление которых в (1.6) приводит к этим циклам, в третьей колонке — символический код согласно схеме Бернулли

p	последовательность знаков в (1.6)	символический код	$\mu_1^{p,A}$	$\mu_2^{p,A}$	$\mu_1^{p,S}$	$\mu_2^{p,S}$	R_{bif}
1	+	—	1.88	0.26	1.69	1.65	1.27650854
2	-+	AB	4.27	0.22	4.46	2.43	1.48241727
3	---	ABB	8.29	0.07	8.30	4.25	1.44293697
	-++	AAB	8.29	0.07	8.30	4.25	1.44293697
4	---+	AABB	17.08	0.03	18.02	6.50	1.45131964
	-+--	ABBB	15.59	0.02	13.98	7.56	1.40617549
	-+++	AAAB	15.59	0.02	13.98	7.56	1.40617549
5	----+	ABABB	35.69	0.02	38.17	10.15	1.46242209
	---++	AAABB	32.91	0.01	33.39	11.01	1.43047179
	--+-+	AABBB	32.91	0.01	33.39	11.01	1.43047179
	-+++	AABAB	35.69	0.02	38.17	10.15	1.46242209
	-+--	ABBBB	29.25	0.00	23.20	12.89	1.38193090
	-++++	AAAAB	29.25	0.00	23.20	12.89	1.38193090
6	----++	AABABB	72.11	0.01	79.14	16.10	1.45850169
	---+--	AABVAB	72.11	0.01	79.14	16.10	1.45850169
	---+++	ABVVVV	54.93	0.00	38.89	21.12	1.36574084
	--+---	ABABVV	67.53	0.00	67.24	17.98	1.43819724
	--+-++	AAABVV	64.22	0.00	64.48	18.04	1.41994286
	--++--	AABVVV	62.34	0.00	58.70	18.54	1.41095184
	--++++	AAAABV	62.34	0.00	58.70	18.54	1.41095184
	-+-+++	AAVABV	67.53	0.00	67.24	17.98	1.43819724
	-+++++	AAAAAB	54.93	0.00	38.89	21.12	1.36574084
7	-----+	AABVABB	142.70	0.00	154.41	26.88	1.45008540
	-----+-	ABVABVV	129.24	0.00	117.25	32.21	1.42267474
	-----+--	ABABAVV	152.67	0.00	171.81	24.49	1.46880932
	-----+++	AAAABVV	122.35	0.00	115.97	29.89	1.40579855
	-----+--+	AABAABV	142.70	0.00	154.41	26.88	1.45008540
	-----+--+	AAABVAV	137.87	0.00	145.13	27.76	1.44075870
	-----+--+	AAABAVV	138.64	0.00	146.80	27.29	1.44283661
	-----++++	ABVVVVV	103.21	0.00	65.96	33.64	1.35440643
	-----+--+	ABABVVV	126.98	0.00	115.26	30.83	1.41916852
	-----+--+	AABVVAV	138.64	0.00	146.80	27.29	1.44283661
	-----+--+	AABAVVV	137.87	0.00	145.13	27.76	1.44075870
	-----+--+	AAABVVV	122.35	0.00	115.97	29.89	1.40579855
	-----+--+	AABVVVV	117.55	0.00	101.23	30.50	1.39587568
	-----+--+	AAAAABV	117.55	0.00	101.23	30.50	1.39587568
	-----+--+	AABAVAV	152.67	0.00	171.81	24.49	1.46880932
	-----+--+	AAAABAV	126.98	0.00	115.26	30.83	1.41916852
	-----+--+	AABAABV	129.24	0.00	117.25	32.21	1.42267474
-----+--+	AAAAABV	103.21	0.00	65.96	33.64	1.35440643	



параметра R , напоминает горловину толстостенной двухслойной трубы. Значения R , отвечающие точкам возврата на образующих «трубу» линиях, то есть седло-узловым бифуркациям циклов, приведены в последней колонке таблицы 1. Для разных циклов бифуркация происходит при разных значениях R , и процесс исчезновения множества A занимает определенный интервал $R \in [R_1, R_2]$. Для отображения (1.3) при $\varepsilon = 0.2$ границы этого интервала, по-видимому, определяются моментами бифуркации циклов периода 1 и 2:

$$R_1 = 1.276508545718, \quad R_2 = R_c = 1.482417271474. \quad (1.7)$$

1.3. Столкновение аттрактора и неустойчивого хаотического инвариантного множества

Обсудим, что происходит с множествами S и A в процессе их сближения и взаимного уничтожения. Аттрактор A при гибели первой же принадлежащей ему орбиты превращается в хаотическое седло: траектории остаются в его окрестности довольно долго, но рано или поздно «соскальзывают» к аттрактору в начале координат. Этот объект имеет ту же природу, что и феномен, наблюдающийся в задаче о хаотическом рассеянии [26]. Вместо обобщенного множества Жюлиа S остается существовать множество неустойчивых циклов. Обращенные во времени траектории также могут достаточно долго пребывать в его окрестности.

На рисунке 7 показаны множества выживших неустойчивых циклов на S (левая колонка), хаотические множества A , построенные как пересечение устойчивых и неустойчивых многообразий (средняя колонка), и итерационные диаграммы для угловой переменной траектории на A (правая колонка). Как можно видеть, в процессе перехода множество A приобретает дополнительную продольную фрактальную канторову структуру. Это обусловлено образованием «дыр» в радиальных направлениях в тех местах, где произошли седло-узловые бифуркации циклов. С уменьшением параметра R количество «дыр» растет, они расширяются, и в итоге множество A полностью исчезает при $R \approx 1.32$. Неустойчивое множество S с уменьшением R обрезается на периферии, и в нем также образуется устроенная по типу канторова множества система «дыр». Диаграммы для фазовой переменной выглядят как графики отображения Бернулли, ветви которого также имеют набор «дыр», расширяющихся по мере уменьшения параметра R .

Удобной моделью для прояснения последствий образования «дыр» в инвариантном множестве может быть модель типа отображения Бернулли с запрещенным интервалом значений переменной, при попадании в который траектория исключается (например, считается убежавшей на бесконечность) [27–29].

1.4. Устройство устойчивых и неустойчивых многообразий

Посмотрим, что происходит в процессе развития кризиса с многообразиями принадлежащих множеству A траекторий. На рисунке 8 приведен фрагмент фазовой плоскости отображения (1.3) при различных значениях параметра R . Оттенками серого цвета представлено множество A , более темные оттенки отвечают более высокой частоте посещения (то есть большей плотности распределения инвариантной меры). На рисунке показаны точки, принадлежащие циклам периода 2 и периода 7, которые являются седловыми из множества A и неустойчивыми узлами из S , а также их устойчивые и неустойчивые многообразия.

Рисунок 8а отвечает значению параметра R за пределами интервала $[R_1, R_2]$ вблизи первой седло-узловой бифуркации цикла 2. Множество A здесь является гиперболическим.

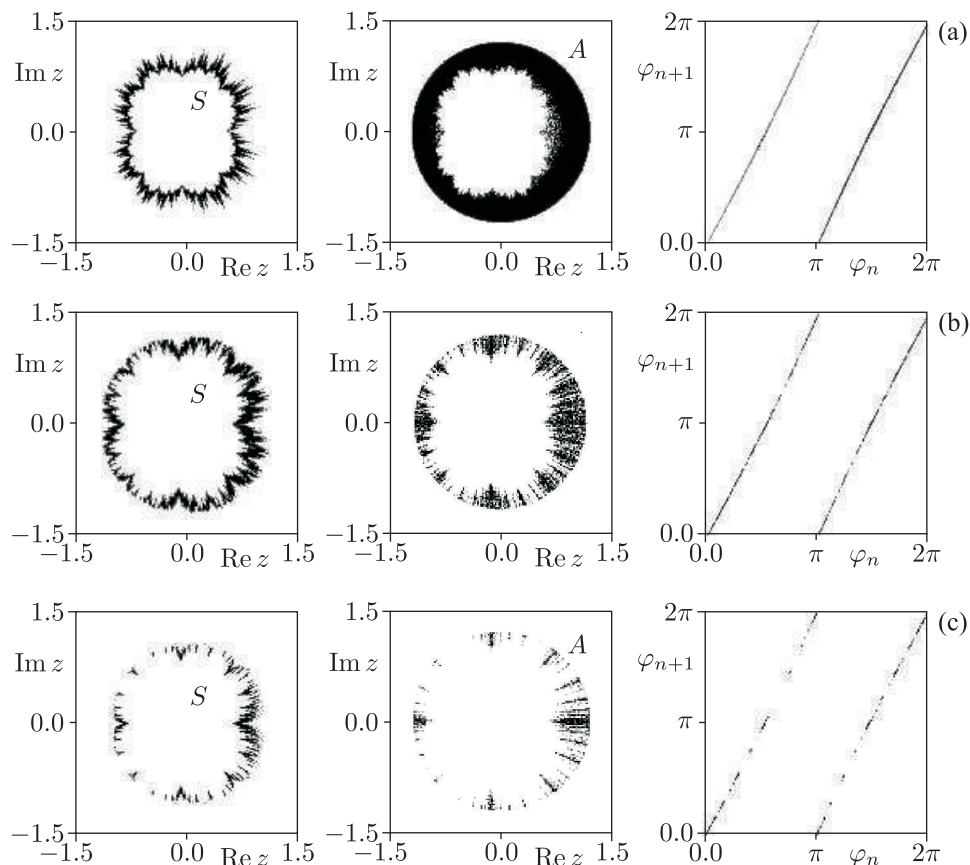


Рис. 7. Множество неустойчивых циклов S (левая колонка), хаотическое седло A (средняя колонка) и итерационная диаграмма для фазы траектории на множестве A (правая колонка). Значения параметров: (a) $R = 1.45$, (b) $R = 1.4$, (c) $R = 1.37$.

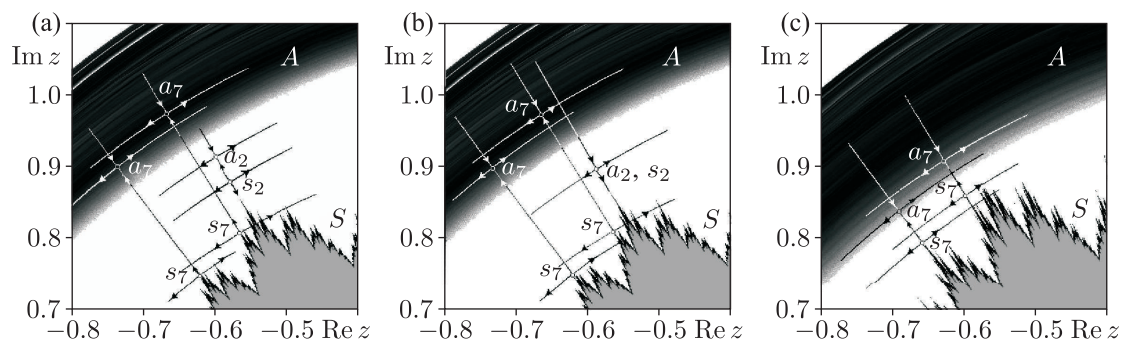


Рис. 8. Увеличенный фрагмент фазовой плоскости отображения (1.3) при $\varepsilon = 0.2$ в процессе кризиса аттрактора при значениях параметра R : (a) $R = 1.483$, (b) $R = 1.48241728$ (момент касательной бифуркации цикла периода 2), (c) $R = 1.47$. Однородным серым цветом окрашена область притяжения или быстрого притяжения — аттрактора O , S — граница этой области. Хаотическое множество A окрашено оттенками серого цвета в соответствии с распределением на нем инвариантной меры. Указаны элементы циклов периода 2 и 7 и их устойчивые и неустойчивые многообразия.

Видно, что устойчивые и неустойчивые многообразия принадлежащих ему траекторий пересекаются трансверсально.

Рисунок 8b соответствует значению параметра R в момент седло-узловой бифуркации цикла 2, где многообразия цикла 7 еще остаются трансверсальными. В точке бифуркации элементы циклов 2 из A и из S сливаются, при этом радиальная ветвь устойчивого многообразия продолжается неустойчивой радиальной ветвью, и трансверсальность нарушена. Образуется «прокол», сквозь который будет происходить утечка инвариантной меры с аттрактора.

Рисунок 8c отвечает значению параметра из интервала $[R_1, R_2]$. Здесь цикл 2 уже исчез, а многообразия цикла 7 все еще имеют трансверсальную структуру.

Итак, в момент касательной бифуркации гиперболичность множества A нарушается из-за невыполнения условия трансверсальности пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий претерпевающей бифуркацию периодической орбиты из A . Можно предположить, что при любом значении параметра из интервала $[R_1, R_2]$ множество A нельзя считать гиперболическим, поскольку будут иметь место касательные бифуркации для каких-либо из плотно распределенных на A циклов.

1.5. Переходный процесс в окрестности точки кризиса

Кризис аттрактора A наступает при первой седло-узловой бифуркации какой-либо из вложенных в него орбит, то есть при $R_c = R_2$. В окрестности этой критической точки, по-видимому, должен наблюдаться переход от гиперболического аттрактора к хаотическому седлу. Хотя множество A при $R < R_c$ как аттрактор уже не существует, фазовые траектории «помнят» о нем в том смысле, что могут достаточно долго находиться в его окрестности. При численном счете это может создавать неверное представление о моменте кризиса. Исследуем этот переходный процесс.

На рисунке 9 представлены диаграммы, иллюстрирующие вид фазовой плоскости отображения (1.3) при $\varepsilon = 0.2$ и различных значениях параметра R из интервала $[R_1, R_2]$. Оттенки серого цвета обозначают время τ , требуемое для ухода к притягивающей неподвижной точке в начале координат. Изменение от темных до светлых тонов отвечает росту величины $[\lg \tau]^{-2}$, нормированной на максимальное значение. При указанных параметрах имеется лишь один аттрактор, в начале координат. Его бассейн притяжения можно разделить на области быстрого и медленного ухода к аттрактору. Область быстрого схождения расположена около множества неустойчивых циклов S . По мере того как при уменьшении параметра R все большая часть неустойчивых циклов этого множества сталкивается с циклами из множества A и исчезает, область быстрого схождения прорастает возрастающим количеством тонких «игл», протыкающих множество A и приводящих к изрешечиванию области медленного схождения (которая до кризиса, при $R > R_1$, соответствовала бассейну притяжения хаотического аттрактора A).

На рисунке 10 представлен график зависимости времени, требуемого для достижения аттрактора в нуле траекториями, стартующими из достаточно удаленной от него области. Усредненная по ансамблю этих траекторий величина $\langle \tau \rangle$ может быть интерпретирована как среднее время пребывания в окрестности множества A . График демонстрирует двойную логарифмическую зависимость, характерную для так называемой перемежаемости типа «игольного ушка» (eyelet intermittency) [30, 31]⁵. Угловым коэффициентом графика составляет 1.327.

⁵В отличие от простой логарифмической зависимости, характерной для перемежаемости, возникающей при касательных бифуркациях периодических аттракторов, когда $\langle \tau \rangle \propto (R_2 - R)^{-1/2}$.

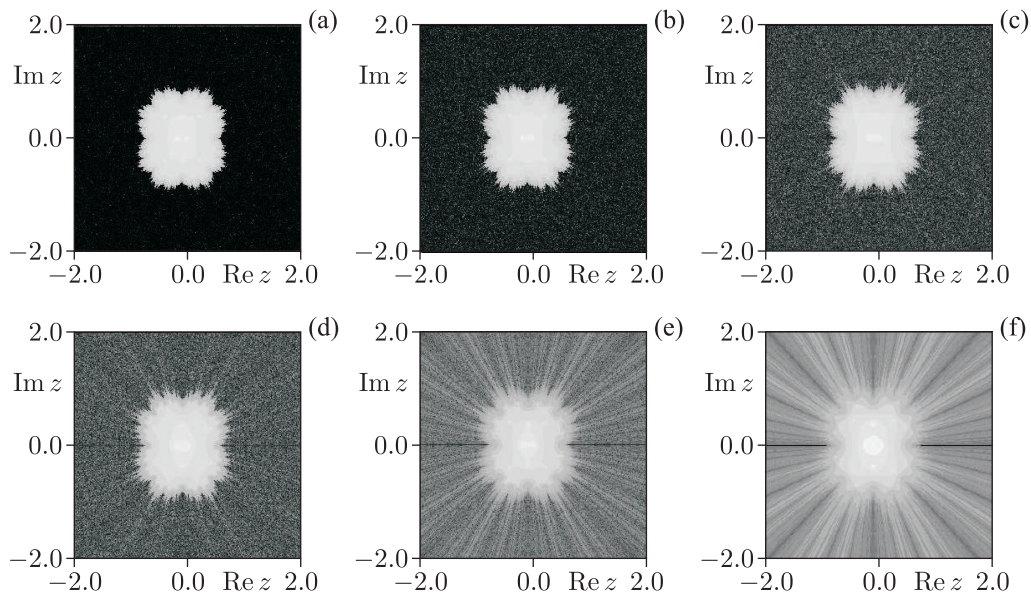


Рис. 9. Фазовая плоскость отображения (1.3) при $\varepsilon = 0.2$ и при различных значениях параметра R из интервала $[R_1, R_2]$: (a) $R = 1.46$, (b) $R = 1.45$, (c) $R = 1.44$, (d) $R = 1.43$, (e) $R = 1.4$, (f) $R = 1.3$. Оттенки серого цвета обозначают время, необходимое для достижения аттрактора в нуле. Изменение от более темных до более светлых тонов отвечает росту величины $[\lg \tau]^{-2}$, нормированной на максимальное значение.

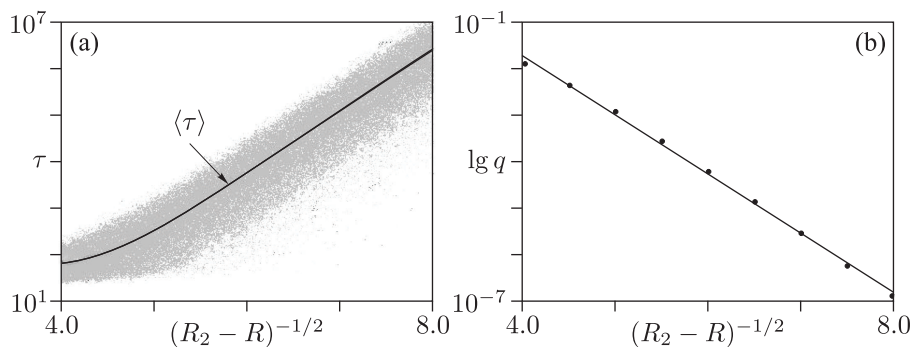


Рис. 10. (a) Время (серый цвет) и среднее по ансамблю время (черная линия) пребывания траекторий вблизи инвариантного множества A . (b) Скорость убегания траекторий из окрестности инвариантного множества A . Параметр R меняется в окрестности момента кризиса аттрактора A в отвечающем перемежаемости интервале значений, параметр $\varepsilon = 0.2$.

Еще одна удобная характеристика динамических и статистических свойств инвариантного множества A — скорость убегания траекторий из окрестности этого множества [32]. Если количество траекторий N_n , стартующих из некоторого массива удаленных от A начальных точек и остающихся в окрестности A на n -ом шаге дискретного времени, ведет себя как $N_n \propto q^{-n}$, то q и есть величина, трактуемая как скорость убегания. Как видно из рисунка 10b, в зависимости от параметра R она изменяется как

$$\lg \lg q \propto (R_2 - R)^{-1/2}. \tag{1.8}$$

1.6. Критическая линия рождения хаотического седла

Вернемся к таблице 1 и рисунку 5b и заметим, что существуют некоторые закономерности в очередности гибели циклов в соответствии с их периодом и символическим кодом.

На рисунке 5b представлено устройство плоскости параметров при малых значениях ε в окрестности точки кризиса хаотического аттрактора. Темным цветом обозначена область существования аттрактора A , белым — область, где имеется единственный аттрактор O . Оттенками серого представлена область разрушения аттрактора A . Цифрами обозначены границы областей существования хотя бы одного неустойчивого цикла соответствующего периода. Эти границы представляют собой разновидность так называемых фронтов обреза (pruning fronts) [33]. Глубина серого цвета символизирует сложность множества A , наличие в нем большего числа орбит. На рисунке обнаруживаются закономерности в организации этих фронтов. Они располагаются друг за другом последовательно (за исключением цикла 1) и накапливаются к некоторой линии (что наталкивает на мысль о возможности ренормгруппового анализа исследуемого сценария). По данным таблицы, последним, самым «стойким» циклом из всех орбит одинакового периода оказывается цикл с символической динамикой типа $A \dots AB$ (и симметричный ему цикл с кодировкой, в которой A и B меняются местами). Из вида кода нетрудно понять, что это те циклы, у которых какой-либо из элементов наиболее близок к неподвижной точке отображения для фазы (той точке, которая последней проходит складку при разрушении аттрактора).

Линия накопления изображенных на рисунке 5b фронтов обреза отвечает рождению хаотического седла — инвариантного множества, содержащего бесконечно много периодических точек. При увеличении параметра R происходит рост числа периодических орбит в седле, и с возникновением всех возможных орбит с соответствующими схеме Бернулли кодами при $R = R_2$ хаотическое седло преобразуется в гиперболический аттрактор. Чтобы найти линию рождения хаотического седла, можно рассчитать, например, моменты возникновения принадлежащих множеству S циклов-репеллеров с возрастающими периодами и указанными символическими кодами. Для $\varepsilon = 0.2$ точка накопления

$$R_\infty = 1.3072880. \quad (1.9)$$

Сходимость точек бифуркации к этому значению следует степенному закону, $R_p - R_\infty \sim e^{-kp}$, что иллюстрируется графиком в логарифмическом масштабе, приведенным на рисунке 11a; показатель получается равным $k = 0.13$. Этот показатель скейлинга, впрочем, не универсален. На рисунке 11b показана его зависимость от параметра ε , демонстрирующая тенденцию к насыщению на уровне 0.2 с ростом ε .

1.7. Критическое множество седло-узловой бифуркации в расширенном пространстве параметров

Интересен вопрос о структуре множества точек, где происходят седло-узловые бифуркации. На рисунке 12a показана развертка половинки этого критического множества по угловой переменной, которая выглядит как полоса с фрактальными краями. На рисунке 13 критическое множество показано в расширенном трехмерном пространстве переменных и управляющего параметра.

Полоса на рисунке 12a расцвечена оттенками серого в соответствии с величиной бифуркационного значения параметра, причем расцветка выглядит довольно гладкой в вертикальном направлении. На рисунке 12b произведен поворот объекта в расширенном про-

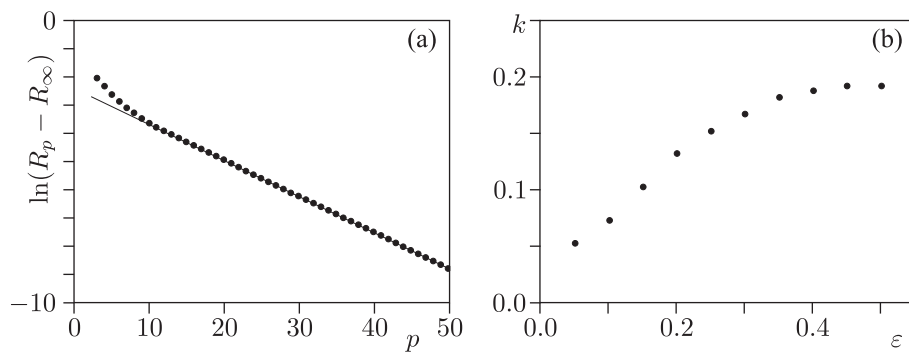


Рис. 11. (а) График зависимости расстояния между изображенными на рисунке 5b фронтами и линией их накопления при $\varepsilon = 0.2$ от периода циклов в логарифмическом масштабе. Показатель степени (угловой коэффициент) $k = -0.13$. (б) Показатель степени k в зависимости от ε .

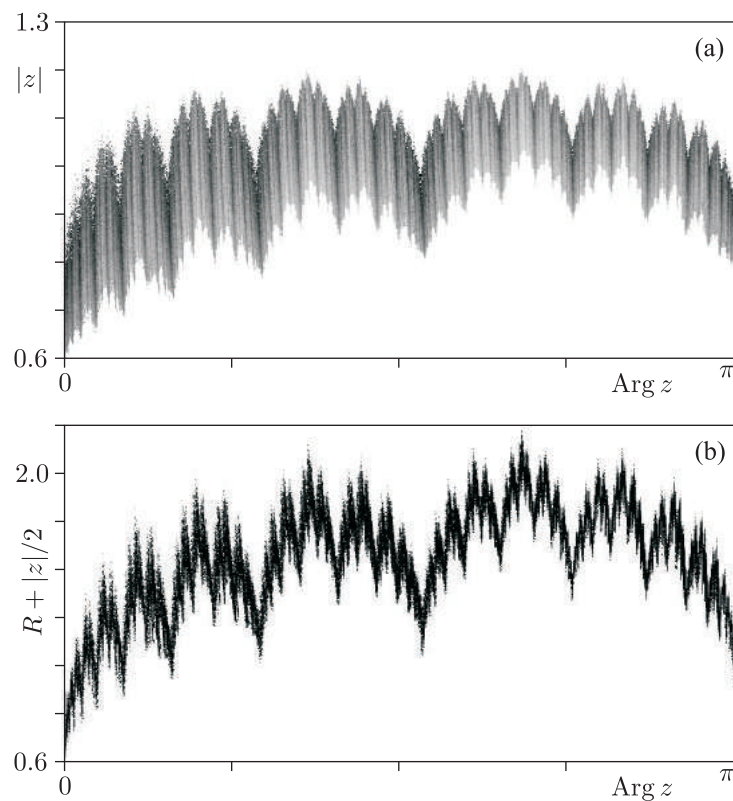


Рис. 12. (а) Изображенная в полярных координатах развертка половины трехмерного объекта, изображенного на рисунке 13 (величина параметра R соотносится с оттенками серого цвета; большие значения отвечают более темному оттенку). (б) Проекция на специально подобранную плоскость этой развертки.

странстве на специально подобранный угол ($\approx 120^\circ$ к оси цилиндрической системы координат). Такая проекция критического множества в большой степени похожа на негладкую фрактальную кривую, а следовательно, множество на рисунке 13 представляет собой «гофрированную» поверхность. Расчет корреляционной размерности (график корреляционного интеграла см. на рис. 14) дает значение $D_2 = 2.4$. Таким образом, критическое множе-

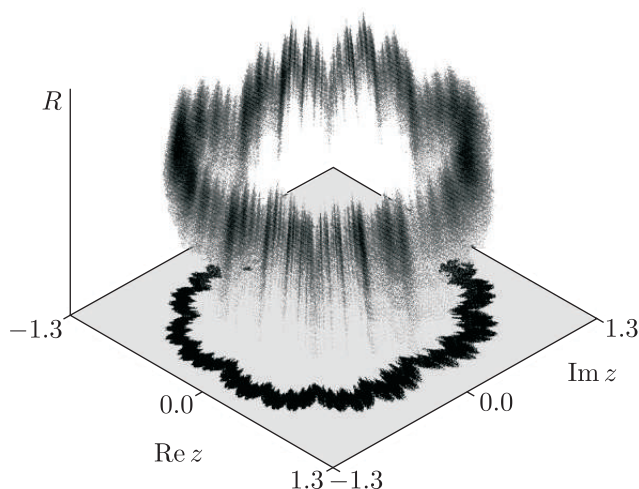


Рис. 13. Критическое множество бифуркационных точек для циклов с периодами $p < 20$ в расширенном пространстве «переменные – управляющий параметр» и его проекция на фазовую плоскость.

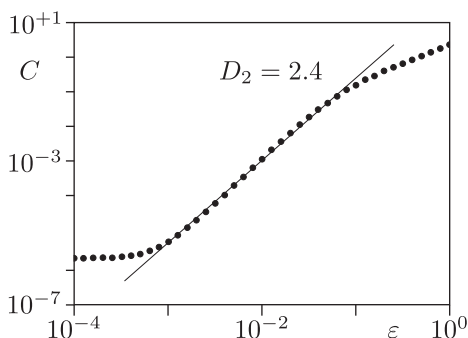


Рис. 14. Корреляционный интеграл критического множества с рисунка 13 в расширенном пространстве переменных и управляющего параметра.

ство в расширенном пространстве, очевидно, представляется фрактальной поверхностью, на которой множества A и S трансформируются друг в друга.

2. Модельное обратимое отображение

Следующий шаг состоит в том, чтобы рассмотреть модель в виде обратимого отображения (как более реалистичную и пригодную для описания динамики систем с непрерывным временем) в качестве отображения Пуанкаре. Модифицируя отображение (1.3) по образцу отображения Эно [12], запишем

$$z_{n+1} = \frac{Rz_n(z_n + \varepsilon)}{\sqrt{1 + |z_n(z_n + \varepsilon)|^2}} - bz_{n-1}. \quad (2.1)$$

Система становится теперь многомерной (4-мерное фазовое пространство вещественных переменных), и этого достаточно для реализации полноценного гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (без самопересечений), а не проекции, как в модели (1.3). При исследовании системы (2.1) ограничимся случаем $\varepsilon = 0$, так как введенная в отображение

добавка сама по себе обеспечивает расщепленную фрактальную структуру хаотических инвариантных множеств.

Расчеты показывают, что по крайней мере при малых b динамика остается в общих чертах такой же, как для отображения (1.3). Аттрактор в начале координат сохраняется как устойчивая неподвижная точка O . Теперь, однако, надо различать инвариантное множество S как замыкание множества неустойчивых циклов, в которые трансформируются при отличных от нуля значениях b неустойчивые по двум направлениям циклы отображения (1.3), и границу между бассейнами аттракторов O и A . Эта граница представляет собой трехмерный объект — устойчивое многообразие множества S .

На рисунке 15 приведены три проекции реализующегося в 4-мерном фазовом пространстве системы (2.1) хаотического аттрактора A , эквивалентного аттрактору Смейла–Вильямса. Представлены также сечения соответствующими плоскостями 4-мерного бассейна притяжения. На фрагменте (d) приведена итерационная диаграмма для фазовой составляющей комплексной переменной z . Видно, что проекции фазового портрета системы, как и отображение, задающее динамику фазы в общих чертах, топологически эквивалентны аттрактору Смейла–Вильямса и отображению Бернулли соответственно.

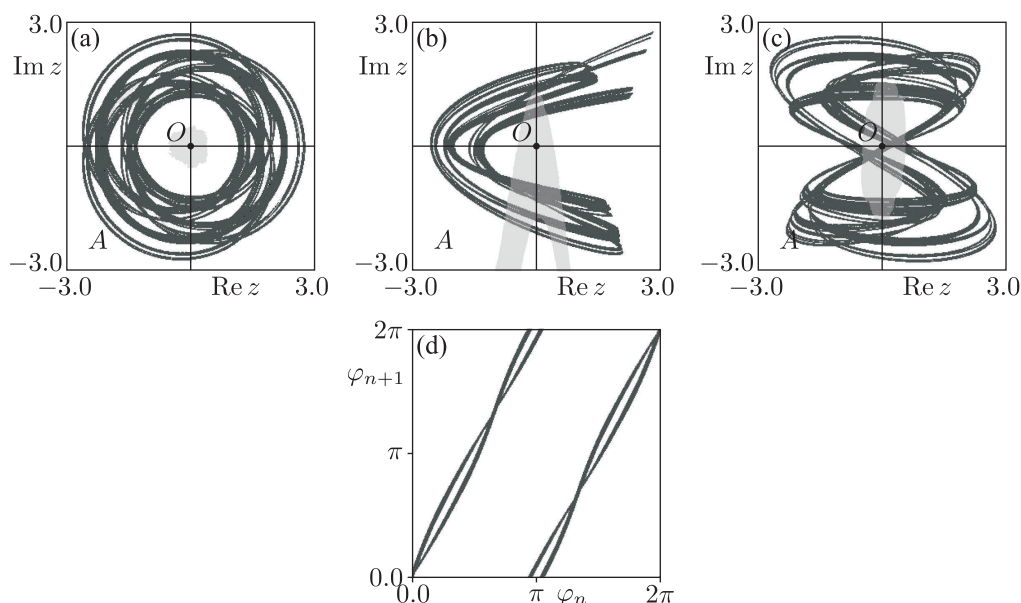


Рис. 15. Проекция хаотического множества A на три различные плоскости (a)–(c), сечения бассейна притяжения аттрактора O этими плоскостями (a)–(c) и итерационная диаграмма для фазовой составляющей переменной z (d) для обратимого отображения (2.1) при следующих значениях параметров: $\varepsilon = 0.0$, $b = -0.3$, $R = 3.0$.

Чтобы убедиться в гиперболичности хаотического аттрактора A и отследить его возможную гибель, рассчитаем спектр показателей Ляпунова. На рисунке 16 приведены графики зависимости показателей от параметров R и b . По краям левой диаграммы и в центральной части правой можно видеть область структурно устойчивого хаоса, где старший показатель Ляпунова гладким образом зависит от параметров и остается приблизительно равным $\ln 2$. Остальные три показателя отрицательны. При уменьшении параметра R и фиксированном значении b на графиках показателей Ляпунова наблюдается обрыв, после которого в качестве единственного аттрактора остается притягивающая точка O . Рассмат-

ривая график на рисунке 16а, естественно предположить, что здесь реализуется тот же сценарий гибели гиперболического аттрактора, что и для модели (1.3). Однако на рисунке 16б видно, что с увеличением параметра b , то есть по мере приближения к консервативному случаю, гибель гиперболического аттрактора происходит по иному сценарию: старший показатель Ляпунова плавно снижается до нуля.

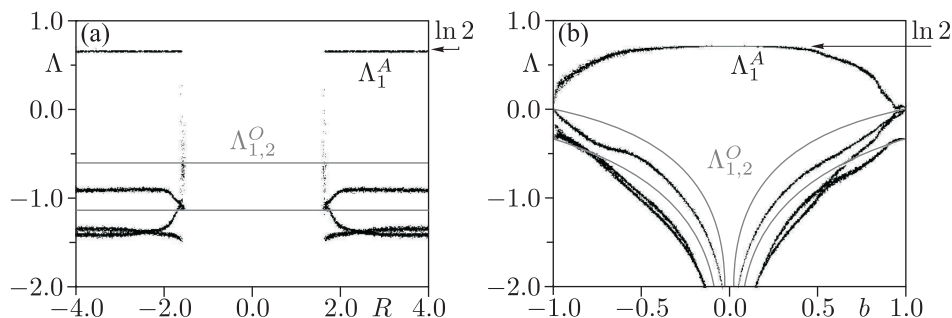


Рис. 16. Для системы (2.1) зависимости ляпуновских показателей от параметров при $\varepsilon = 0.0$: (а) $b = -0.3$, (б) $R = 3.0$.

На рисунке 17а приведена карта старшего показателя Ляпунова на плоскости параметров R и b . Здесь видно расположение области существования хаотического аттрактора (однородная темно-серая область в виде штриховки на фоне размеченной оттенками серого области отрицательного показателя Ляпунова для регулярного аттрактора в начале координат). В окрестности границы этой области для малых значений b выбран фрагмент, для которого рассчитана показанная на рисунке 17б схема гибели принадлежащих инвариантному множеству A периодических орбит.

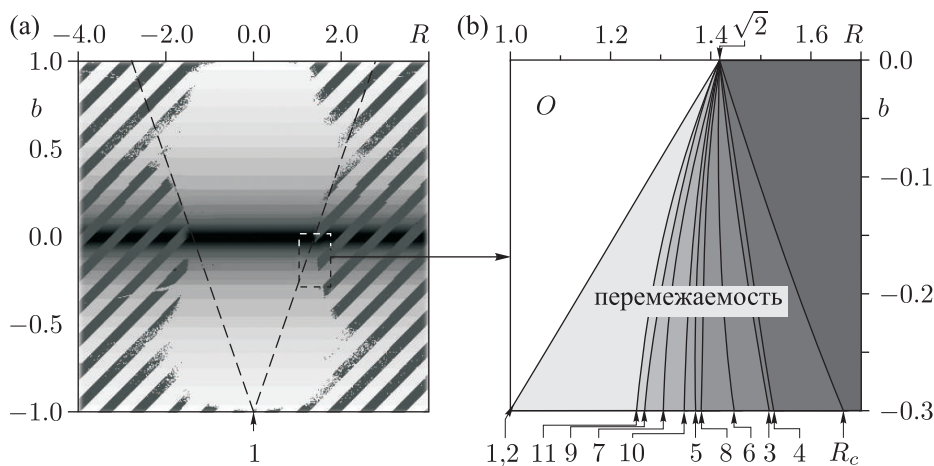


Рис. 17. Для системы (2.1) показаны (а) карта старшего показателя Ляпунова и (б) схема «гибели» периодических орбит, принадлежащих инвариантному множеству A .

Процедура нахождения неустойчивых циклов обратимого отображения (2.1) использует продолжение по параметру b , стартуя от случая $b = 0$, когда циклы находятся аналитически или численно путем итераций в обратном времени. Для уточнения положения цикла при движении малыми шагами по b при фиксированном достаточно большом R использовался многомерный метод Ньютона. Параллельно рассчитывались мультипликатор-

ры циклов, определяемые как собственные числа матрицы Якоби \mathbf{J} размера 4×4 . Далее уточнялись значения R_{bif} , отвечающие седло-узловой бифуркации цикла, то есть условию $\text{Tr } \mathbf{J} - \text{Det } \mathbf{J} = 1$.

Были отслежены циклы вплоть до периода 16. Было обнаружено, что бифуркации слияния и исчезновения разных пар циклов, как и в случае необратимого отображения, могут происходить не одновременно по параметру R .

На схеме (рис. 17b) линиями показаны границы областей существования хотя бы одного цикла с периодом, обозначенным цифрой. Более темные оттенки отвечают росту периода циклов в «скелете» аттрактора. Видно, что область гибели хаотического аттрактора, как и для системы (1.3), имеет протяженный характер, в виде клина. Интервал перемежаемости расширяется с увеличением абсолютной величины параметра b . Имеет место и накопление фронтов обрезания. Некоторые отличия связаны с большей размерностью и иной симметрией системы (2.1). Изменилась, например, очередность гибели циклов. Наиболее «долгоживущими» оказываются циклы периода 1 и 2 (условие седло-узловой бифуркации для них выполняется при $\varepsilon = 0$ на линиях $R = \pm\sqrt{2}(b+1)$). Момент же кризиса аттрактора (первая седло-узловая бифуркация, по крайней мере, среди циклов периода от 1 до 16) соответствует исчезновению одного из циклов периода 6 при

$$R_c = R_6 = 1.6673332001. \quad (2.2)$$

В таблице 2 для случая $b = -0.3$ приведены бифуркационные значения параметра R , отвечающие гибели циклов периода от 1 до 7 и соответствующие всевозможным символическим последовательностям.

3. Разрушение соленоида Смейла – Вильямса в системе связанных осцилляторов ван дер Поля

Рассмотрим предложенную в работе [3] систему связанных генераторов ван дер Поля, имеющих собственные частоты ω_0 и $2\omega_0$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 u, \\ \dot{u} &= \left(h + a \cos \frac{2\pi t}{T} - x^2 \right) u - \omega_0 x + \frac{\delta}{\omega_0} y \cos \omega_0 t, \\ \dot{y} &= 2\omega_0 v, \\ \dot{v} &= \left(h - a \cos \frac{2\pi t}{T} - y^2 \right) v - 2\omega_0 y + \frac{\delta}{2\omega_0} x^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где введен дополнительный параметр постоянного затухания h . Динамические переменные x и y являются обобщенными координатами парциальных осцилляторов, а u и v — их нормированными мгновенными скоростями.

Напомним принцип функционирования модели. В обоих осцилляторах параметр, отвечающий за возникновение автоколебаний и рождение предельного цикла, задан медленно меняющимся во времени по гармоническому закону с периодом T и амплитудой a , поэтому у каждого из осцилляторов чередуются периоды возбуждения и подавления. В одной и другой подсистемах это происходит в противофазе: в период генерации одного из осцилляторов второй затухает, и наоборот. Новый параметр h контролирует отношение длительностей стадий возбуждения и подавления. Связь между подсистемами, характеризуемая

Таблица 2. Значения параметра R , отвечающие исчезновению циклов периода p отображения (2.1) при $\varepsilon = 0.0$, $b = -0.3$

p	Символическая последовательность	R_{bif}
1	—	0.9899494937
2	AB	0.9899494937
3	ABV AAV	1.5162511965 1.5162511965
4	ABVV AAVV AAAV	1.5246755395 1.5246755395 1.5246755396
5	AVABV AVVVV AAVVV AAAVV AAVAV AAAV	1.3678259883 1.4751309522 1.5937371483 1.5937371483 1.3678259883 1.4751309522
6	AAVABV AAVVAV AVVVVV AVABVV AAAVVV AAVVVV AAAVVV AAAVAV AAAAAV	1.4442019176 1.4442019176 1.4442019176 1.4442019176 1.6673332001 1.5162511965 1.5162511965 1.4442019176 1.4442019176
7	AVVAVVV AAVVAVV AVAVAVV AAVAVV AAVAVV AAVVAV AVVVVV AVABVV AAVVAV AAAVVV AAVAVV AAVVVV AAAVVV AAVVVV AAAAAV AAVAVAV AAAVAV AAAAAV	1.5308815365 1.515936959 1.3004456481 1.5069303905 1.515936959 1.5473296506 1.4207389696 1.4009447467 1.5069303905 1.6205693184 1.5473296506 1.6205693184 1.4707295546 1.4707295546 1.3004456481 1.4009447467 1.5308815365 1.4207389696

коэффициентом δ , устроена так, что передача возбуждения между подсистемами сопровождается удвоением фазы колебаний каждого осциллятора на каждом последующем цикле активности. Таким образом, в стробоскопическом сечении через период T отображение для фазы отвечает отображению Бернулли (2) — сублимату гиперболического аттрактора Смейла–Вильямса. Сам аттрактор также наблюдается в системе (3.1) в стробоскопическом отображении Пуанкаре как вложенный в 4-мерное пространство соленид, для широкого диапазона параметров. Для $h = 0$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $a = 5$, $\delta = 0.5$ свойство однородной гиперболичности строго подтверждено на основе доказательных вычислений в работе [15].

Начнем со случая $h = 0$, когда, как доказано, имеет место гиперболический странный аттрактор, и будем увеличивать параметр h по абсолютной величине в области отрицательных значений. Тогда длительность активных стадий у осцилляторов будет уменьшаться, и в какой-то момент уровень передаваемого парциальному осциллятору возбуждения может стать недостаточным для восстановления амплитуды его собственных колебаний. Тогда система за конечное число этапов передачи возбуждения «свалится» в тривиальное устойчивое равновесие, отвечающее нулевой амплитуде. На рисунке 18 показаны зависимости показателей Ляпунова от параметра h для отображения Пуанкаре системы (3.1). Правая часть графика соответствует области, где существует хаотический однородно гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса. Признаком этого является наличие положительного старшего показателя Ляпунова, близкого к $\ln 2$, отрицательные последующие показатели и гладкая зависимость всех показателей от параметра. При $h < 0$ хаотический аттрактор сосуществует с тривиальным аттрактором в нуле. (В связи с тем, что связь во втором уравнении квадратичная по переменной x , при слишком малых начальных значениях амплитуды система не может «раскачаться» и ее колебания затухнут до нуля.) При уменьшении h в определенный момент хаотический аттрактор гибнет (рис. 18). Аттрактор же в начале координат продолжает существовать, притягивая к себе все фазовые траектории, в том числе оставшиеся от разрушенного странного аттрактора.

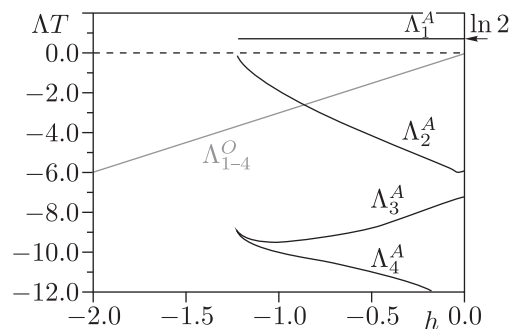


Рис. 18. Графики показателей Ляпунова системы (3.1) при $\omega_0 = 2\pi$, $a = 6.5$, $T = 6$, $\delta = 0.5$ в зависимости от параметра h для хаотического аттрактора (черный цвет) и для тривиального аттрактора — неподвижной точки в начале координат (серый цвет).

Внезапное исчезновение хаотического аттрактора говорит о кризисе, подобном рассмотренному в двух первых разделах, и дает основание полагать, что оно связано со столкновением двух инвариантных множеств (см. [23]). Чтобы подкрепить это утверждение, рассмотрим некоторое приближенное описание динамики на основе стробоскопического отображения. Введем вначале новую систему координат на плоскости динамических переменных первого осциллятора $\{x_0, x_1\} = \{x, u/0.9 - x/2\}$. (Замена подобрана так, чтобы аттрактор в сечении Пуанкаре в новых координатах имел вид по возможности близкий к окружно-

сти.) Далее перейдем в полярную систему координат и введем амплитуду (радиальную координату) и фазу (угловую координату) исходя из соотношения $x_0 + ix_1 = re^{i\varphi}$. Построим теперь одномерное отображение для амплитуды r в стробоскопическом сечении. Для этого, стартуя с нулевой амплитудой второго осциллятора и задавая различные начальные величины r и φ для первого осциллятора, численно находим амплитуду r_{new} первого осциллятора через один период модуляции T и представляем результат на графике как функцию начальной амплитуды. На рисунке 19а приведены результаты для четырех различных значений параметра h . Зависимости выглядят как изогнутые полосы. Конечная ширина полос обусловлена тем, что значение амплитуды r_{new} на самом деле зависит не только от начальной амплитуды, но и от фазы, принимающей значения от 0 до 2π . От этой «неопределенности» можно избавиться путем усреднения r_{new} по начальным фазам, получив заведомо приближенную, но однозначную зависимость $r_{\text{new}}(r)$ (см. рис. 19б).

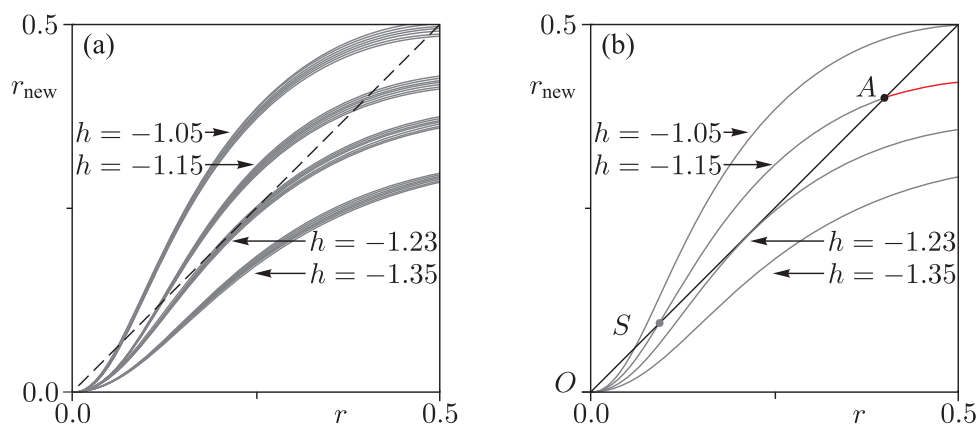


Рис. 19. Диаграммы, иллюстрирующие динамику амплитуды колебаний первого осциллятора r при стробоскопическом описании системы (3.1) при $\omega_0 = 2\pi$, $a = 6.5$, $T = 6$, $\delta = 0.5$ для различных значений h : (а) полученная численно диаграмма для массива точек с разными начальными амплитудами и фазами; (б) упрощенная версия диаграммы, полученная путем усреднения r_{new} по начальным фазам.

Как видно из рисунка 19б, при изменении параметра h происходит касательная бифуркация. При больших значениях h отображение обнаруживает три неподвижные точки (на графике они соответствуют пересечению кривых с диагональю). Одна — это точка O в начале координат, являющаяся притягивающей. Две другие отвечают некоторым конечным значениям: устойчивая точка A — большей амплитуде, неустойчивая точка S — меньшей. С уменьшением значения h точки A и S приближаются друг к другу, сливаются (при $h \approx 1.23$) и исчезают. Это довольно грубое описание ситуации, и желательно обратиться к более аккуратному анализу.

Неподвижная точка A соответствует аттрактору Смейла – Вильямса системы (3.1). В то время как амплитуда колебаний, отвечающих принадлежащим аттрактору траекториям, меняется почти периодически (с периодом модуляции T), фаза колебаний в стробоскопическом сечении ведет себя в соответствии с хаотическим отображением Бернулли (2). Сходная динамика присуща и траекториям на непритягивающем инвариантном множестве, соответствующем отталкивающей точке S ; единственное отличие состоит в присутствии у нее дополнительной неустойчивости в радиальном направлении (см. рис. 19б). Будем далее использовать обозначения A для странного аттрактора и S — для непритягивающего инвариантного множества системы (3.1).

На рисунке 20 показаны итерационные диаграммы для фазовой переменной на этих двух множествах. Для аттрактора кривая строится непосредственно по результатам численного интегрирования системы (3.1) [3, 13, 19, 34]. При этом рассчитывается фаза $\varphi = \arg[x_0(t_n) + ix_1(t_n)]$ первого осциллятора в моменты времени $t_n = nT$ и отмечаются точки на графике зависимости φ_{n+1} от φ_n .

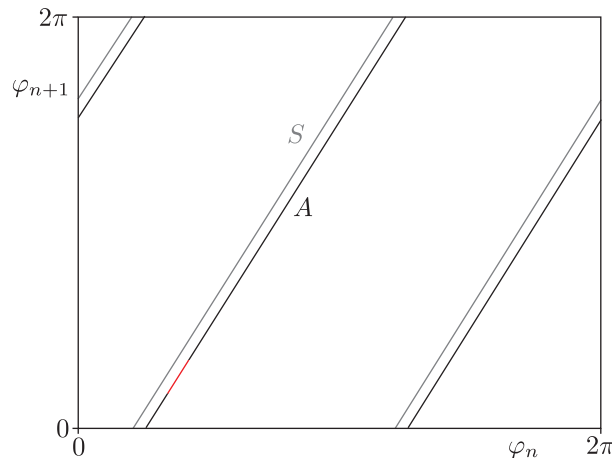


Рис. 20. Диаграмма, иллюстрирующая поведение фазы колебаний первого осциллятора системы (3.1) для фазовых траекторий на аттракторе A (черные линии) и на нестягивающем инвариантном множестве S (серые линии).

Чтобы получить график для нестягивающего множества S использован специальный численный подход, а именно: график построен для набора неустойчивых периодических орбит на S , рассчитанных численно посредством метода Ньютона.

Из диаграмм на рисунке 20 видно, что динамика на обоих инвариантных множествах определяется топологически эквивалентными отображениями Бернулли. Это значит, что каждая принадлежащая A орбита и каждая орбита из S в терминах символической динамики находятся в однозначном соответствии с определенным бинарным кодом и, следовательно, друг с другом.

Известно, что хаотический аттрактор содержит плотное множество седловых периодических траекторий различных периодов, которые отвечают периодическим символическим последовательностям и образуют «скелет» инвариантного множества [35–37]. Этот «скелет» является объектом, удобным для изучения и полезным для понимания динамики на всем множестве A . Аналогичным образом обстоит ситуация с множеством S , которое обладает собственным «скелетом» периодических орбит. Поскольку оба множества находятся во взаимно-однозначном соответствии, каждая периодическая траектория на аттракторе имеет орбиту-партнера из инвариантного множества S . Чтобы описать происходящий в (3.1) кризис аттрактора, рассмотрим периодические орбиты из его «скелета» (по крайней мере, некоторое достаточное их количество, с периодами достаточно большой длины) и проанализируем наличие бифуркаций у них при изменении параметра h .

Принадлежащие аттрактору A периодические орбиты в стробоскопическом сечении имеют трехмерное устойчивое многообразие и одномерное неустойчивое, совпадающее с самим аттрактором. Мультипликаторы, отвечающие за неустойчивость, можно оценить как $\mu_1^A \approx 2^p$, где p — период цикла. Следующий мультипликатор $\mu_2^A < 1$ ассоциируется с возмущением по амплитуде. (Его можно оценить как $[f'(r_A)]^p$, где f — функция на рисун-

ке 19b, а r_A отвечает устойчивой неподвижной точке.) С другой стороны, орбиты, принадлежащие инвариантному множеству S , обладают двумерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Один из мультипликаторов отвечает за неустойчивость по фазе $\mu_1^S \approx 2^p$, а другой ассоциируется с амплитудной неустойчивостью μ_2^S ; второй значительно меньше первого: $1 < \mu_2^S < \mu_1^S$.

При уменьшении значения параметра h орбиты-партнеры приближаются друг к другу (их мультипликаторы, отвечающие за эволюцию амплитудного возмущения, стремятся к значению +1), в момент бифуркации h_{bif} они сливаются в точке «складки» (касательная или седло-узловая бифуркация) и исчезают.

Если бы описание динамики системы (3.1) в точности соответствовало амплитудному отображению на рисунке 19b, то седло-узловые бифуркации происходили бы одновременно для всех орбит-партнеров, но в действительности это не так. Бифуркационные значения h_{bif} распределены в конечном, но широком диапазоне (грубая оценка этого интервала $-1.24 < h < -1.22$ может быть поставлена в соответствие с шириной полос на графике рисунка 19a). В таблице 3 представлены результаты расчетов для некоторого количества периодических траекторий со всевозможными символическими кодами и периодами вплоть до 5: найдены значения параметра h_{bif} , отвечающие за бифуркацию складки этих циклов.

Таблица 3. Бифуркационные значения параметра h для неустойчивых периодических орбит периодов p системы (3.1) при $\omega_0 = 2\pi$, $a = 6.5$, $T = 6$, $\delta = 0.5$

p	символический код	h_{bif}
1	—	-1.22583188
2	AB	-1.23358210
3	ABB	-1.22879290
	BAA	-1.23489088
4	ABBB	-1.22695959
	ABBA	-1.23226821
	BAAA	-1.23371422
5	ABBAВ	-1.23070842
	BВВВА	-1.22628724
	ABВВА	-1.23012599
	ВAAAA	-1.23249362
	ABВВА	-1.23263428
	ВААВА	-1.23467205

Как уже отмечалось в разделе 1, в расширенном пространстве, полученном добавлением к фазовому пространству координатной оси управляющего параметра, седло-узловая бифуркация представляется складкой соответствующей изображающей поверхности [25]. В рамках идеи о «скелете» хаотических инвариантных множеств A и S сценарий кризиса A через слияние его орбит с орбитами S можно интерпретировать как преобразование в расширенном пространстве аттрактора A в неустойчивое множество S . На рисунке 21a показаны в зависимости от параметра h точки периодических орбит из множеств A и S ⁶ с периодами $p < 10$ для стробоскопического отображения системы (3.1) в трехмерном расширенном

⁶Алгоритм поиска циклов на S , примененный здесь и далее в этом разделе, а также при постро-

пространстве $\{x_0, x_1, h\}$. На рисунке можно видеть фигуру наподобие трубы с двойными толстыми стенками, внешняя из которых отвечает аттрактору A , а внутренняя — неустойчивому инвариантному множеству S . Это выглядит так, как будто неустойчивое множество выворачивается наизнанку через последовательность точек возврата, превращаясь в аттрактор Смейла–Вильямса. Рисунок 21b демонстрирует радиальную (амплитудную) свертку этой «трубы» и дает представление о продольном срезе (вдоль оси параметра) фигуры, образованной перетекающими друг в друга множествами A и S .

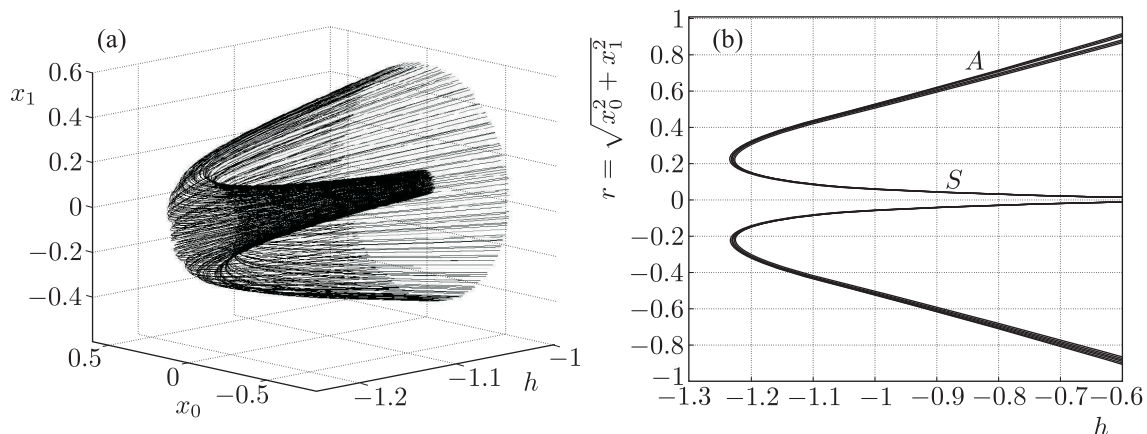


Рис. 21. Множество всех периодических орбит системы (3.1) при $\omega_0 = 2\pi$, $a = 6.5$, $T = 6$, $\delta = 0.5$ с периодами $p \leq 7$, изображенное в расширенном пространстве «фазовые переменные – управляющий параметр» (а) и на свертке этого пространства на плоскость «радиальная переменная – управляющий параметр».

На рисунке 22 показаны множества элементов периодических орбит из A и S для фиксированного значения параметра $h = -1.15$ в плоскости поперечного сечения объекта, изображенного на рисунке 21а, и в трехмерной проекции фазового пространства (рис. 21а и 21b соответственно). Здесь можно видеть два образования, которые приблизительно соответствуют окружностям, но в действительности обладают поперечной фрактальной структурой. Внешний соленоид отвечает хаотическому аттрактору A , а внутренний неустойчивый соленоид соответствует множеству S . Очевидно, что инвариантное множество S вместе со своим устойчивым многообразием разделяют бассейн притяжения аттрактора Смейла–Вильямса и бассейн устойчивой неподвижной точки в начале координат. Сечение последнего продемонстрировано на рисунке 22а в виде серой области внутри неустойчивого соленоида.

Как и в первом разделе статьи, можно отметить сходство инвариантного множества S с объектами типа множеств Жюлиа теории комплексных аналитических отображений — отталкивающими структурно устойчивыми хаотическими множествами, «скелет» которых образуют периодические репеллеры [10, 24, 38].

Заключение

Обнаружение и описание сценариев возникновения однородно гиперболических аттракторов при изменении управляющих параметров представляется чрезвычайно важным ении рисунка 20, состоял в следующем. В соответствии с описанной в [34] методикой определялись периодические орбиты на A , а затем осуществлялась процедура продолжения этих циклов по параметру [25] до точек бифуркации складки и обратно.

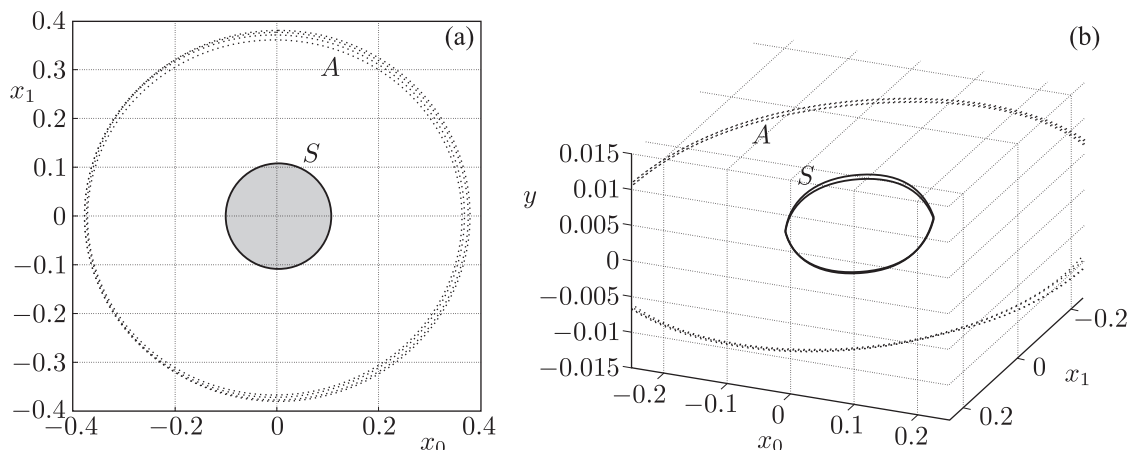


Рис. 22. Аттрактор A и непритягивающее инвариантное множество S в стробоскопическом сечении системы (3.1) при $\omega_0 = 2\pi$, $a = 6.5$, $T = 6$, $\delta = 0.5$, и $h = -1.15$, показанные на плоскости переменных первого осциллятора (a) и в трехмерной проекции всего фазового пространства (b). Серая область на рисунке слева отвечает сечению бассейна притяжения неподвижной точки в начале координат.

не только с теоретической точки зрения, но и для поиска реальных физических систем с гиперболическим хаосом — грубым, устойчивым к помехам и возмущениям, а потому перспективным для технических приложений.

В настоящей работе раскрыта природа одного бифуркационного сценария, ведущего к рождению или разрушению аттрактора в виде соленоида Смейла–Вильямса и включающего серию седло-узловых бифуркаций. Переход подразумевает слияние устойчивого и неустойчивого хаотических множеств типа соленоида — собственно аттрактора Смейла–Вильямса и неустойчивого множества, расположенного на границе бассейна его притяжения. Его можно анализировать, рассматривая совокупность бифуркаций попарного слияния периодических орбит, принадлежащих изначально одному и другому инвариантному множеству. После бифуркации первой же принадлежащей ему периодической траектории аттрактор Смейла–Вильямса превращается в хаотическое седло и теряет свойство однородной гиперболичности. В окрестности этой точки статистические характеристики динамики отвечают перемежаемости типа «игольного ушка». Хаотическое седло продолжает существовать в некотором интервале управляющего параметра. Момент его гибели соответствует точке накопления границ существования вложенных в него циклов с периодами, стремящимися к бесконечности. В окрестности этой точки также наблюдаются определенные закономерности масштабного подобия. Описанный сценарий может рассматриваться как трансформация притягивающего гиперболического множества в неустойчивое инвариантное множество в расширенном пространстве переменных состояния и управляющего параметра при прохождении фрактальной поверхности (критического множества) в этом пространстве.

Список литературы

- [1] Belykh V., Belykh I., Mosekilde E. The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3567–3578.
- [2] Hunt T. J., MacKay R. S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity, 2003, vol. 16, no. 4, pp. 1499–1510.

- [3] Kuznetsov S. P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, 144101, 4 pp.
- [4] Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ*, 2006, т. 129, № 2, с. 400–412.
- [5] Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *ПЖТФ*, 2008, т. 34, № 18, с. 1–8.
- [6] Isaeva O. B., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P. Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 74, no. 4, 046207, 5 pp.
- [7] Isaeva O. B., Kuznetsov S. P., Osbaldestin A. H. A system of alternately excited coupled nonautonomous oscillators manifesting phenomena intrinsic to complex analytical maps // *Phys. D*, 2008, vol. 237, no. 7, pp. 873–884.
- [8] Жалнин А. Ю., Кузнецов С. П. О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // *ЖТФ*, 2007, т. 77, № 4, с. 10–18.
- [9] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Москва: Факториал, 1999. 768 с.
- [10] Devaney R. L. An introduction to chaotic dynamical systems. 2nd ed. New York: Addison-Wesley, 1989. 336 pp.
- [11] Afraimovich V., Hsu S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. (AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 28.) Providence, RI: AMS, 2003. 353 pp.
- [12] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
- [13] Kuznetsov S. P., Sataev I. R. Hyperbolic attractor in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // *Phys. Lett. A*, 2007, vol. 365, nos. 1–2, pp. 97–104.
- [14] Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // *ПНД*, 2006, № 5, с. 3–29.
- [15] Wilczak D. Uniformly hyperbolic attractor of the Smale–Williams type for a Poincaré map in the Kuznetsov system // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2010, vol. 9, no. 4, pp. 1263–1283.
- [16] Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P. Effect of noise in a nonautonomous system of alternately excited oscillators with a hyperbolic strange attractor // *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 77, no. 3, 036220, 6 pp.
- [17] Кузнецов С. П. О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // *ЖЭТФ*, 2008, т. 133, № 2, с. 438–446.
- [18] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhys. Lett.*, 2008, vol. 84, no. 1, pp. 10013–10018.
- [19] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Phys. D*, 2007, vol. 232, no. 2, pp. 87–102.
- [20] Емельянов В. В., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Генератор гиперболического хаоса на основе связанных пролетных клистронов // *ПЖТФ*, 2009, т. 35, № 16, с. 71–78.
- [21] Kuznetsov S. P. Plykin-type attractor in nonautonomous coupled oscillators // *Chaos*, 2009, vol. 19, no. 1, 013114, 10 pp.
- [22] Шильников Л. П., Тураев Д. В. О катастрофах голубого неба // *Докл. РАН*, 1995, т. 342, № 5, с. 596–599.
- [23] Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos // *Phys. D*, 1983, vol. 7, nos. 1–3, pp. 181–200.
- [24] Peitgen H.-O., Richter P. H. The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems. New York: Springer, 1986. 199 pp.
- [25] Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. 2nd ed. (Appl. Math. Sci., vol. 112.) New York: Springer, 1998. 591 pp.
- [26] Ott E. Chaos in dynamical systems. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. 478 pp.
- [27] Bulian H., Paar V. Many hole interactions and the average lifetimes of chaotic transients that precede controlled periodic motion // *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 63, no. 6, 066205, 13 pp.
- [28] Paar V., Pavin N. Missing preimages for chaotic logistic map with hole // *Fizika B*, 1996, vol. 6, no. 1, pp. 23–34.

- [29] Paar V., Pavin N. Bursts of average lifetime of transients for chaotic logistic map with a hole // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, no. 4, pp. 4112–4115.
- [30] Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 79, no. 1, pp. 47–50.
- [31] Pikovsky A., Zaks M., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits // *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 4, pp. 680–687.
- [32] Widom M., Bensimon D., Kadamoff L., Shenker S. Strange objects in the complex plane // *J. Statist. Phys.*, 1983, vol. 32, no. 3, pp. 443–454.
- [33] Cvitanović P., Hansen K. T. Bifurcation structures in maps of Hénon type // *Nonlinearity*, 1998, vol. 11, no. 5, pp. 1233–1261.
- [34] Kuznetsov S. P. *Hyperbolic chaos: A physicist's view*. Berlin: Springer, 2012. 336 pp.
- [35] Cvitanović P. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos // *Phys. D*, 1991, vol. 51, nos. 1–3, pp. 138–151.
- [36] Artuso R., Aurell E., Cvitanović P. Recycling of strange sets: 1. Cycle expansions // *Nonlinearity*, 1990, vol. 3, no. 2, pp. 325–359.
- [37] Auerbach D., Cvitanović P., Eckmann J.-P., Gunaratne G., Procaccia I. Exploring chaotic motion through periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.*, 1987, vol. 58, no. 23, pp. 2387–2389.
- [38] Biham O., Wenzel W. Unstable periodic orbits and the symbolic dynamics of the complex Hénon map // *Phys. Rev. A*, 1990, vol. 42, no. 8, pp. 4639–4646.

On a bifurcation scenario of a birth of attractor of Smale–Williams type

Olga B. Isaeva¹, Sergey P. Kuznetsov², Igor R. Sataev³, Arkady Pikovsky⁴

^{1,2,3}Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

Zelenaya st. 38, Saratov, 410019, Russia

^{1,2}Saratov State University

Astrakhanskaya st. 83, Saratov, 410012, Russia

^{2,4}Institute of Physics and Astronomy, University of Potsdam

14476, Germany, Potsdam-Golm, Karl-Liebknecht-Strasse 24/25

¹isaevao@rambler.ru, ²spkuz@rambler.ru, ³sataev ir@rambler.ru, ⁴pikovsky@uni-potsdam.de

We describe one possible scenario of destruction or of a birth of the hyperbolic attractors considering the Smale–Williams solenoid as an example. The content of the transition observed under variation of the control parameter is the pairwise merge of the orbits belonging to the attractor and to the unstable invariant set on the border of the basin of attraction, in the course of the set of bifurcations of the saddle-node type. The transition is not a single event, but occupies a finite interval on the control parameter axis. In an extended space of the state variables and the control parameter this scenario can be regarded as a mutual transformation of the stable and unstable solenoids one to each other. Several model systems are discussed manifesting this scenario e.g. the specially designed iterative maps and the physically realizable system of coupled alternately activated non-autonomous van der Pol oscillators. Detailed studies of inherent features and of the related statistical and scaling properties of the scenario are provided.

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

Keywords: strange attractor, chaos, bifurcation, self-sustained oscillator, hyperbolic chaos

Received January 10, 2013, accepted February 27, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 267–294 (Russian)

