Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 2. С. 229–245.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.9
MSC 2010: 34C14

# Теорема Эйлера – Якоби – Ли об интегрируемости

**В. В. Козлов**

Обсуждается круг вопросов, связанных с условиями точной интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, выраженными через свойства тензорных инвариантов. Доказана общая теорема об интегрируемости системы $n$ дифференциальных уравнений, допускающая $n-2$ независимых полей симметрий и инвариантную $n$-форму объема (интегральный инвариант). Результаты общего характера применяются к изучению стационарных движений сплошной среды с бесконечной проводимостью.

Ключевые слова: поле симметрий, интегральный инвариант, нильпотентная группа, магнитная гидродинамика

## 1. Введение

Вопрос о точной интегрируемости системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = v^i(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.1}$$

с $n$-мерным фазовым пространством $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ тесно связан с возможностью нахождения $n$ независимых *тензорных инвариантов* этой системы. К таким инвариантам относятся, в частности, функции на фазовом пространстве (первые интегралы), векторные поля (поля симметрий), дифференциальные $k$-формы (порождающие $k$-мерные интегральные инварианты). Векторное поле

$$v = \left(v^1, \ldots, v^n\right)$$

само является *тривиальным* инвариантом системы (1.1). Поэтому вопрос об условиях интегрируемости сводится к поиску $n-1$ *нетривиальных* тензорных инвариантов, находящихся в определенных отношениях между собой. Приведем несколько известных примеров.

1°. Знание $n-1$ функционально независимых первых интегралов

$$f_1, \ldots, f_{n-1}$$

Получено 5 июля 2012 года
После доработки 30 августа 2012 года

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

позволяет, в частности, провести конструктивное выпрямление траекторий динамической системы (1.1) в окрестности неособой точки.

2°. Согласно Эйлеру и Якоби, система (1.1) интегрируется в квадратурах, если имеется $n-2$ функционально независимых первых интегралов $f_1, \ldots, f_{n-2}$ и инвариантная $n$-форма объема

$$\Omega = \rho(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

В классической литературе это утверждение часто называют теоремой Эйлера – Якоби о последнем множителе. Строение динамической системы (1.1) в окрестности компактных интегральных многообразий

$$\Sigma_c^2 = \{x \in M \colon f_1(x) = c_1, \ldots, f_{n-2}(x) = c_{n-2}\}$$

без особых точек описано, например, в [1] (гл. 5). Оно опирается на классические результаты Пуанкаре, Зигеля и Колмогорова о динамических системах на двумерном торе.

Собственно, исходное наблюдение Эйлера состоит в следующем. Если $n = 2$, то дифференциальная 1-форма

$$i_v\Omega$$

будет замкнутой и локально представляется дифференциалом первого интеграла системы (1.1).

3°. Согласно Ли, система (1.1) интегрируется в квадратурах, если известны $n-1$ независимых векторных полей

$$u_2, u_3, \ldots, u_n, \tag{1.2}$$

которые вместе с исходным векторным полем $u_1 = v$ порождают *разрешимую* алгебру Ли относительно операции коммутирования [ , ]. Локальные аспекты этой теоремы изложены, например, в [2, 3]. Следует подчеркнуть, что *все* дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = u_j(x), \quad j \geqslant 2,$$

одновременно интегрируются в квадратурах [4].

Для нас существенное значение имеет частный случай этой теоремы, когда

$$[v, u_j] = 0$$

для всех $j \geqslant 2$ и векторные поля (1.2) порождают *нильпотентную* алгебру Ли.

Глобальное строение динамической системы (1.1) зависит от структуры алгебры Ли векторных полей (1.2). Если поля

$$u_1 = v, u_2, \ldots, u_n \tag{1.3}$$

коммутируют (группа симметрий абелева), линейно независимы в каждой точке и *нестеснены* на $M$, то фазовое пространство системы (1.1) $M$ диффеоморфно $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ и найдутся $k$ угловых переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \bmod 2\pi$ и $n-k$ линейных переменных $y_{k+1}, \ldots, y_n$, которые линейно меняются со временем:

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j, \quad \dot{y}_s = l_s \quad (\omega, l = \mathrm{const}). \tag{1.4}$$

Это — глобальный вариант теоремы о выпрямлении фазовых траекторий. Стоит подчеркнуть, что координаты $\varphi$ и $y$ вводятся с помощью некоторого конструктивного алгоритма.

В общем случае, когда неабелева алгебра векторных полей (1.3) разрешима, то фазовое пространство системы (1.1) есть фактор-пространство многообразия разрешимой группы Ли по некоторой ее дискретной подгруппе. Однако это замечание носит слишком общий характер и его реализация упирается в трудную проблему классификации разрешимых групп Ли.

4°. Примеры 1° и 3° можно объединить. Пусть имеется $k$ векторных полей

$$u_1 = v, u_2, \ldots, u_k, \tag{1.5}$$

порождающих разрешимую алгебру Ли, и еще $n-k$ независимых функций

$$f_{k+1}, \ldots, f_n, \tag{1.6}$$

причем

$$L_{u_s} f_j = 0 \tag{1.7}$$

для всех возможных значений индексов $s$ и $j$ (здесь и далее $L_w$ — производная Ли вдоль векторного поля $w$). Тогда система (1.1) интегрируется в квадратурах (то есть ее решения находятся с помощью конечного числа алгебраических операций, включая решение системы алгебраических уравнений, и вычисления интегралов от функций одного переменного).

Действительно, согласно (1.7), векторные поля (1.5) касаются интегральных многообразий

$$\Sigma_c^k = \{x \in M\colon f_{k+1}(x) = c_{k+1}, \ldots, f_n(x) = c_n\}.$$

Следовательно, высказанное утверждение сразу же следует из теоремы Ли, примененной к ограничению динамической системы (1.1) на $\Sigma_c^k$.

Наиболее популярный аспект этой конструкции — теорема Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем. В этом случае $n = 2k$, первые интегралы (1.6) функционально независимы, а их попарные скобки Пуассона равны нулю. Тогда $k$ гамильтоновых векторных полей (1.5) с гамильтонианами (1.6) линейно независимы в каждой точке, попарно коммутируют и удовлетворяют условию (1.7). Обсуждение этого круга вопросов см. в [1].

Подчеркнем, что общее количество инвариантов (1.5) и (1.6) равно размерности фазового пространства. Приложения этой идеи к теории интегрирования неголономных систем содержатся в работе [5].

Наша цель — связать подходы Эйлера – Якоби и Ли в теории интегрирования дифференциальных уравнений. Тем самым мы укажем пути дальнейшего использования тензорных инвариантов динамических систем для их точного интегрирования.

## 2. Основная теорема

Итак, предположим, что динамическая система (1.1) допускает $n-2$ полей симметрий

$$u_2, \ldots, u_{n-1}. \tag{2.1}$$

Полагая $u_1 = v$, имеем:

$$[u_1, u_j] = 0. \tag{2.2}$$

Векторные поля $u_1, \ldots, u_{n-1}$ предполагаются линейно независимыми во всех точках фазового пространства (или его части, где рассматривается задача о нахождении решений системы (1.1)). Справедливо простое

**Предложение 1.** *Множество точек фазового пространства, где векторы $u_1, \ldots, u_{n-1}$ линейно зависимы, инвариантно относительно фазового потока системы* (1.1).

Действительно, ввиду свойства (2.2) фазовый поток системы (1.1) переводит векторные поля $u_1, \ldots, u_{n-1}$ в себя.

Кроме того, будем предполагать наличие у системы (1.1) инвариантной $n$-формы объема $\Omega$:

$$L_v \Omega = 0.$$

Таким образом, система (1.1) имеет ровно $n$ тензорных инвариантов: $n-2$ полей симметрий (2.1), тривиальный инвариант $v$ и форму объема $\Omega$. Наш основной результат составляет

**Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $L_{u_s}\Omega = 0$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$,

2) *векторные поля* $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *порождают нильпотентную алгебру Ли относительно операции коммутирования.*

*Тогда автономная система дифференциальных уравнений* (1.1) *интегрируется в квадратурах.*

Напомним, что $n$-мерная алгебра Ли $g$ называется *нильпотентной*, если существует цепочка идеалов

$$g = g_n \supset g_{n-1} \supset \ldots \supset g_0 = \{0\},$$

такая, что

$$[g, g_i] \subset g_{i-1} \tag{2.3}$$

для каждого $i$.

Пусть

$$[u_i, u_j] = \sum c_{ij}^k u_k, \tag{2.4}$$

где $c_{ij}^k = -c_{ij}^k$ — структурные постоянные алгебры векторных полей. В нашем случае идеал $g_k$ составляют линейные комбинации полей $u_1, \ldots, u_k$. Условие (2.3), очевидно, эквивалентно совокупности равенств

$$c_{ij}^k = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant j. \tag{2.5}$$

При $n = 2$ векторных полей (2.1) на самом деле нет и мы получаем классический результат Эйлера. Если $n = 3$, то любая нильпотентная алгебра будет абелевой. Единственное содержательное условие теоремы 1 состоит в следующем: форма объема должна быть инвариантна относительно фазового потока, порождаемого полем симметрий. Однако, как показано в [6], если $M$ — *компактное* трехмерное многообразие, то это условие можно опустить. Мы вернемся к этому вопросу в параграфе 3.

Смысл теоремы 1 состоит в следующем. Рассмотрим в фазовом пространстве $M$ $(n-1)$-мерное распределение касательных гиперплоскостей, порождаемое всеми линейными комбинациями векторов $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$, $x \in M$. Согласно (2.4), это распределение вполне интегрируемо: фазовое пространство будет расслоено на $(n-1)$-мерные многообразия $\{\Sigma\}$, причем в каждой точке $x \in \Sigma$ векторы $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ касаются $\Sigma$. Весь вопрос упирается в возможность конструктивного нахождения интегральных многообразий $\Sigma$ как поверхностей уровня первого интеграла системы (1.1). Теорема 1 дает на него положительный ответ.

Перейдем к доказательству основной теоремы. Сначала установим одно вспомогательное утверждение, представляющее и некоторый самостоятельный интерес.

**Лемма 1.** *Пусть* $\Omega$ — *замкнутая дифференциальная* $n$-*форма* ($d\Omega = 0$) *и*

$$u_1, \ldots, u_m \quad (m \leqslant n) \tag{2.6}$$

— *набор векторных полей, таких, что*

$$L_{u_s}\Omega = 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant m). \tag{2.7}$$

*Тогда*

$$d\left(i_{u_m} \ldots i_{u_2} i_{u_1}\Omega\right) = \sum_{i<j} \pm i_{[u_i,u_j]} i_{u_p} i_{u_q} \ldots i_{u_r}\Omega, \tag{2.8}$$

*где* $p, q, \ldots, r$ — *это набор индексов* $1, 2, \ldots, m$ *за вычетом индексов* $i$ *и* $j$.

Выбор знаков «+» или «−» в формуле (2.8) зависит от четности или нечетности подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & m \\ i & j & p & q & \ldots & r \end{pmatrix}.$$

Впрочем, это замечание не имеет значения для дальнейшего.

Доказательство леммы 1 основано на последовательном применении известных формул

$$L_v = i_v d + d i_v \quad \text{и} \quad L_v i_u - i_u L_v = i_{[u,v]}.$$

Используя свойство замкнутости $\Omega$, имеем:

$$d i_{u_1}\Omega = -i_{u_1} d\Omega + L_{u_1}\Omega = 0.$$

Далее,

$$0 = (i_{u_2} d) i_{u_1}\Omega = -d i_{u_2} i_{u_1}\Omega + L_{u_2} i_{u_1}\Omega = -d(i_{u_2} i_{u_1}\Omega) + i_{u_1} L_{u_2}\Omega + i_{[u_1,u_2]}\Omega.$$

Следовательно,

$$d(i_{u_2} i_{u_1}\Omega) = i_{[u_1,u_2]}\Omega. \tag{2.9}$$

И так далее.

**Следствие 1.** *Если*

$$[u_i, u_j] = \sum c_{ij}^k u_k,$$

*причем* $c_{kj}^k = c_{ik}^k = 0$ (*суммирования по* $k$ *нет*), *то дифференциальная форма*

$$i_{u_m} \ldots i_{u_1}\Omega \tag{2.10}$$

*замкнута.*

Это утверждение сразу же вытекает из формулы (2.8) и кососимметричности формы $\Omega$. В частности, справедливо

**Следствие 2.** *Если поля* (2.6) *порождают нильпотентную алгебру Ли, то дифференциальная форма* (2.10) *замкнута.*

Действительно, структурные постоянные нильпотентной алгебры удовлетворяют условию (2.5).

Свойство замкнутости формы (2.10) имеет место не только для нильпотентных алгебр. Примером служит, в частности, простая алгебра вращений $SO(3)$, поскольку в некотором базисе левоинвариантных векторных полей

$$[u_1, u_2] = u_3, \quad [u_2, u_3] = u_1, \quad [u_3, u_1] = u_2.$$

Напротив, для разрешимых алгебр форма (2.10), как правило, не замкнута. Простейший пример можно привести уже при $m = 2$:

$$[u_1, u_2] = u_1.$$

В этом случае (согласно (2.9))

$$d(i_{u_2} i_{u_1} \Omega) = i_{u_1} \Omega \neq 0,$$

если $\Omega$ — форма объема.

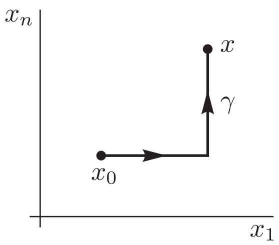
Вернемся к доказательству основной теоремы. Согласно лемме 1, дифференциальная 1-форма

$$\omega = \Omega(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \cdot) \tag{2.11}$$

замкнута. Следовательно, она локально представляется полным дифференциалом некоторой функции на фазовом пространстве:

$$\omega = df. \tag{2.12}$$

Функция $f$ находится интегрированием 1-формы $\omega$ по пути $\gamma$, связывающем некоторую фиксированную начальную точку $x_0$ с «текущей» точкой $x \in M$. Если путь $\gamma$ заменить другим путем $\gamma'$ с теми же концами, причем цикл $\gamma$–$\gamma'$ негомологичен нулю, то интегралы по $\gamma$ и $\gamma'$ могут оказаться разными. Это обстоятельство позволяет говорить о функции $f$ как о *«многозначной»* функции на фазовом пространстве. Правда, при локальном рассмотрении эти вопросы не имеют никакого значения.




Для нас существенный момент заключается в том, что функция $f$ находится простыми квадратурами. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве пути интегрирования кусочно-гладкий путь, состоящий из путей, вдоль которых меняется только одна из координат $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, нахождение функции $f$ сводится к $n$ квадратурам — вычислению интегралов функций одного переменного.

Далее, согласно (2.11) и (2.12), функция $f$ — первый интеграл исходной системы (1.1), причем векторные поля симметрий $u_2, \ldots, u_n$ касаются каждой интегральной гиперповерхности

$$\Sigma_c = \{x\colon f(x) = c\}. \tag{2.13}$$

Все эти поверхности регулярные, поскольку $df \neq 0$. Таким образом, вопрос об интегрируемости в квадратурах системы (1.1) сводится к применению теоремы Ли к ограничению системы (1.1) на $(n-1)$-мерные интегральные многообразия (2.13).

Теорема доказана.

Сделаем ряд замечаний.

1°. Если $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, то любая замкнутая 1-форма будет точной. В этом случае $f$ — однозначная гладкая функция на всем фазовом пространстве. Таким образом, динамическая система (1.1) допускает глобально определенный первый интеграл, который находится с помощью простых квадратур.

2°. Вернемся к следствию 1 из леммы 1. Утверждается, что дифференциальная форма

$$\omega = i_{u_1} \dots i_{u_m} \Omega$$

инвариантна относительно фазовых потоков каждой из динамических систем

$$\dot{x} = u_j(x), \quad x \in M.$$

Действительно,

$$L_{u_j} \omega = i_{u_j} d\omega + d i_{u_j} \omega.$$

Первое слагаемое обращается в нуль согласно следствию из леммы, а второе — ввиду кососимметричности формы $\Omega$. Что и требовалось.

3°. Рассмотрим дифференциальную 2-форму

$$\Phi = i_{u_2} i_{u_3} \dots i_{u_{n-1}} \Omega.$$

Если поля симметрий $u_2, \dots, u_{n-1}$ удовлетворяют условиям следствия 1 из леммы 1, то форма $\Phi$ замкнута. Далее, согласно тому же следствию,

$$i_v \Phi = i_{u_1} \dots i_{u_{n-1}} \Omega = (-1)^n df, \tag{2.14}$$

где $f$ — некоторая локально определенная функция на $M$. Это представление, конечно, носит локальный характер. Однако если $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, то функция $f$ определена в целом. Если 2-форма $\Phi$ окажется *невырожденной*, то соотношение (2.14) будет демонстрировать свойство *гамильтоновости* исходной динамической системы (1.1). Фазовым пространством служит $M$, 2-форма $\Phi$ — симплектическая структура, а $(-1)^{n+1} f$ — функция Гамильтона.

На самом деле ненулевая форма $\Phi$ вырождена при всех $n \geqslant 3$, поскольку каждый из векторов $u_2, \dots, u_{n-1}$ является ее аннулятором: $\Phi(u_j, \cdot) = 0$ для всех $j \geqslant 2$. Следовательно, при $n \geqslant 3$ 2-форма $\Phi$ порождает *пуассонову* (а не симплектическую) структуру на $M$.

Тем не менее, из представления (2.14) вытекает наличие линейного нетривиального интегрального инварианта динамической системы (1.1):

$$\oint \varphi = \text{const}.$$

Здесь $\Phi = d\varphi$; дифференциальная 1-форма $\varphi$ существует по крайней мере локально. Если $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$, то 1-форма $\varphi$ будет определена в целом.

Теорема 1 допускает простое обобщение.

**Теорема 2 («теорема Эйлера – Якоби – Ли»).** *Предположим, что система* (1.1) *имеет*

1) *$k$ функционально независимых первых интегралов*

$$f_1, \dots, f_k, \tag{2.15}$$

2) *$n - k - 2$ независимых полей симметрий*

$$u_{k+1}, \dots, u_{n-2}, \tag{2.16}$$

*порождающих вместе с полем $u_{n-1} = v$ нильпотентную алгебру Ли векторных полей,*

3) *инвариантную $n$-форму объема $\Omega$,*

*причем*

$$L_{u_j} f = 0, \quad L_{u_j}\Omega = 0 \tag{2.17}$$

*для всех $k+1 \leqslant j \leqslant n-2$. Тогда система дифференциальных уравнений* (1.1) *интегрируется в квадратурах.*

Здесь снова имеется $n$ тензорных инвариантов. Целое $k$ может принимать любое значение от нуля до $n-2$. При $k = n-2$ (когда поля симметрий отсутствуют) получаем классическую теорему Эйлера–Якоби. В другом крайнем случае, когда $k = 0$, теорема 2 переходит в теорему 1.

Для доказательства теоремы 2 следует рассмотреть $(n-k)$-мерное интегральное многообразие

$$\Sigma_c^{n-k} = \{x\colon f_1(x) = c_1, \ldots, f_k(x) = c_k\}$$

и ограничить поля (2.16), а также $n$-форму $\Omega$, на $\Sigma_c$. Пусть $\widehat{u}_j(c)$ — ограничение поля $u_j$ на $\Sigma_c$. Так как поля

$$u_{k+1}, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}$$

касаются $\Sigma_c$, то алгебры векторных полей, порождаемые $\{u_j\}$ и $\{\widehat{u}_j(c)\}$, очевидно, изоморфны при всех допустимых значениях $c$.

Далее, пусть $\widehat{\Omega}_c$ — дифференциальная $(n-k)$-форма объема — ограничение формы $\Omega$ на $\Sigma_c$. Если будет доказано, что

$$L_{\widehat{u}_j(c)}\widehat{\Omega}_c = 0 \tag{2.18}$$

для всех $j$, то заключение теоремы 2 будет сразу вытекать из теоремы 1.

Мы не будем давать инвариантного определения формы $\widehat{\Omega}$, ограничившись локальным рассмотрением (что соответствует локальной природе свойства интегрируемости в квадратурах). Поскольку функции (2.15) независимы, то можно так ввести локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$, что

$$f_1 = x_1, \ldots, f_k = x_k.$$

Если

$$u_j^1, \ldots, u_j^n$$

— компоненты векторного поля $u_j$ в этих координатах, то (согласно первому условию (2.17))

$$u_j^1 = \ldots = u_j^k = 0. \tag{2.19}$$

Пусть

$$\Omega = \rho(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Второе условие (2.17) означает, что

$$\operatorname{div}(\rho u_j) = \sum \frac{\partial(\rho u_j^s)}{\partial x_s} = 0. \tag{2.20}$$

Ограничение $\widehat{u}_j(c)$ векторного поля $u_j$ на $\Sigma_c$ имеет компоненты

$$u_j^{k+1}, \ldots, u_j^n,$$

в которых $x_1, \ldots, x_k$ следует заменить константами $c_1, \ldots, c_k$. Положим, наконец,

$$\widehat{\Omega}_c^{n-k} = \rho(c_1, \ldots, c_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Условие инвариантности (2.18) вытекает из соотношения (2.20) с учетом равенств (2.19).

## 3. Регулярные системы

Снова вернемся к общей системе (1.1) и предположим, что она допускает $n-2$ нетривиальных полей симметрий

$$u_2, \ldots, u_{n-1} \quad ([v, u_j] = 0,\ 2 \leqslant j \leqslant n-1) \tag{3.1}$$

и инвариантную $n$-форму объема

$$\Omega \qquad (L_v \Omega = 0). \tag{3.2}$$

Поля $u_1 = v, u_2, \ldots, u_{n-1}$ порождают $(n-1)$-мерную алгебру векторных полей $g$ относительно операции коммутирования. С другой стороны, фазовые потоки динамических систем на $M$

$$\dot{x} = u_j(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \tag{3.3}$$

порождают $(n-1)$-мерную группу Ли $G$, являясь ее однопараметрическими подгруппами. Ясно, что $g$ — это алгебра Ли группы $G$. В параграфе 2 рассматривался случай, когда группа $G$ сохраняет фазовый объем на $M$ (форму $\Omega$).

**Теорема 3.** *Пусть $M$ замкнуто и группа симметрий $G$ не сохраняет $n$-форму объема на $M$. Тогда система* (1.1) *имеет непостоянный первый интеграл.*

*Доказательство.* Если не все преобразования из группы $G$ сохраняют $n$-форму $\Omega$, то

$$L_{u_j} \Omega \neq 0$$

при некотором $j > 1$. Эта производная Ли также будет $n$-формой на $M$. Ввиду невырожденности $\Omega$ имеем

$$L_{u_j} \Omega = \lambda \Omega, \tag{3.4}$$

где $\lambda$ — некоторая гладкая функция на $M$. Покажем, что $\lambda$ — первый интеграл системы (1.1). Действительно, согласно (3.2) и (3.4),

$$L_v(\lambda\Omega) = \dot{\lambda}\Omega + \lambda L_v \Omega = \dot{\lambda}\Omega = L_v L_{u_j} \Omega = L_{u_j} L_v \Omega = 0.$$

Следовательно, $\dot{\lambda} = 0$. Если $\lambda \neq \mathrm{const}$, то теорема доказана.

Пусть $\lambda = \mathrm{const}$. Перепишем равенство (3.4)

$$d(i_{u_j} \Omega) = \lambda \Omega$$

и проинтегрируем его по замкнутому многообразию $M$. По формуле Стокса,

$$0 = \int\limits_{\partial M} i_{u_j} \Omega = \int\limits_M d(i_{u_j} \Omega) = \lambda \int\limits_M \Omega.$$

Следовательно, $\lambda = 0$. Но тогда фазовый поток системы (3.3) сохраняет форму $\Omega$.

Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний.

1°. В аналитическом случае (когда фазовое пространство $M$ снабжено структурой аналитического многообразия, относительно которой компоненты векторных полей $u_1, \ldots, u_{n-1}$

и плотность формы объема представляются аналитическими функциями) первый интеграл будет вещественно-аналитической функцией, определенной на всем фазовом пространстве.

2°. Предположим, что система (1.1) допускает $n-2$ нетривиальных полей симметрий (3.1) и инвариантную форму объема (3.2). Пусть выполнено условие следствия 1 из леммы 1. Если $M$ замкнуто и

$$H^1(M, \mathbb{R}) = 0,$$

то система (1.1) имеет непостоянный первый интеграл. Если же $M$ неодносвязно, то первый интеграл будет, вообще говоря, многозначным.

3°. При $n = 3$ теорема 3 доказана в работе [6]. Там же показано, что не сохраняющие форму объема поля симметрий существуют только для *вырожденных* систем. Это означает следующее.

Пусть $c$ — регулярный уровень первого интеграла $\lambda$ из (3.4). Тогда каждая связная компонента $\Sigma$ уровня $\{\lambda = c\}$ диффеоморфна двумерному тору $\mathbb{T}^2$ и существуют координаты $\psi_1$, $\psi_2 \bmod 2\pi$, $I$ в окрестности $\Sigma$, такие, что система (1.1) имеет вид

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\omega_1(I)}{\rho}, \quad \dot{\psi}_2 = \frac{\omega_2(I)}{\rho}, \quad \dot{I} = 0, \tag{3.5}$$

где $\rho(\psi, I)$ — гладкая функция. Инвариантная форма объема имеет вид

$$\Omega = \rho\, dI \wedge d\psi_1 \wedge d\psi_2,$$

а первым интегралом служит координата $I$.

Это — один из вариантов классических результатов Пуанкаре–Зигеля–Колмогорова о динамических системах на двумерном торе (см., например, [1]). Отношение $\nu(I) = \omega_1(I)/\omega_2(I)$ есть число вращения динамической системы (1.1) на инвариантном торе $I = \mathrm{const}$.

Пусть имеется поле симметрий $u$, не сохраняющее форму объема $\Omega$, и пусть $C$ — множество критических значений интеграла $\lambda$ из (3.4). Тогда отношение частот $\nu = \omega_1/\omega_2$ постоянно на каждой связной компоненте $D$ множества регулярных точек

$$M \setminus \lambda^{-1}(C).$$

Если $\nu|_D$ иррационально, то частоты $\omega_1$ и $\omega_2$ постоянны на $D$.

В этом и состоит свойство вырожденности, установленное в работе [6]. Мы дополним этот результат описанием полей симметрий системы (3.5). Оказывается, в типичной ситуации система (3.5) вообще не допускает *нетривиальных* полей симметрий.

Пусть

$$\rho = \sum \rho_{p_1 p_2}(I) e^{i(p_1\psi_1 + p_2\psi_2)}$$

— ряд Фурье гладкой функции $\rho$ — плотности инвариантной меры системы (3.5). Существенную роль будет играть множество $P$ тех точек $I \in \mathbb{R}$, в которых

1) $p_1\omega_1(I) + p_2\omega_2(I) = 0$ при некоторых целых $p_1$ и $p_2$, не равных одновременно нулю,

2) $\rho_{p_1 p_2}(I) \neq 0$.

Ясно, что в типичной ситуации множество $P$ всюду плотно заполняет интервалы возможных значений переменной $I$.

**Теорема 4.** *Предположим, что в некотором интервале* $I_1 < I < I_2$

1) $\omega_2 \neq 0$,

2) $\frac{d}{dI}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0$,

3) *множество* $P$ *всюду плотно в* $(I_1, I_2)$.

*Если* $u$ *— поле симметрий системы* (3.5) *в области* $\mathbb{T}^2 \times (I_1, I_2)$, *то*

$$u = \varkappa(I)v, \tag{3.6}$$

*где* $\varkappa$ *— некоторая гладкая функция, а* $v$ *— векторное поле системы* (3.5).

Поле симметрий (3.6) тривиальное: оно касается инвариантных торов $I = \mathrm{const}$ и на этих торах пропорционально исходному векторному полю. В аналитическом случае условия теоремы можно ослабить, заменив их следующими условиями:

1) $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$,

2) отношение $\omega_1/\omega_2$ — непостоянная функция на $(I_1, I_2)$,

3) $P$ имеет предельную точку в интервале $(I_1, I_2)$.

*Доказательство.* Пусть

$$L_v = \frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\psi_1} + \frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\psi_2}, \quad L_u = u^1\frac{\partial}{\partial\psi_1} + u^2\frac{\partial}{\partial\psi_2} + u^3\frac{\partial}{\partial I}$$

— операторы дифференцирования вдоль векторных полей $v$ и $u$. Компоненты $u^j$ — гладкие функции на фазовом пространстве; в частности, они $2\pi$-периодически зависят от $\psi_1$ и $\psi_2$. Условие коммутирования

$$L_v L_u = L_u L_v$$

эквивалентно трем уравнениям:

$$\frac{1}{\rho}\left(\omega_1\frac{\partial u^1}{\partial\psi_1} + \omega_2\frac{\partial u^1}{\partial\psi_2}\right) = u^1\frac{\partial}{\partial\psi_1}\frac{\omega_1}{\rho} + u^2\frac{\partial}{\partial\psi_2}\frac{\omega_1}{\rho} + u^3\frac{\partial}{\partial I}\frac{\omega_1}{\rho}, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\omega_1\frac{\partial u^2}{\partial\psi_1} + \omega_2\frac{\partial u^2}{\partial\psi_2}\right) = u^1\frac{\partial}{\partial\psi_1}\frac{\omega_2}{\rho} + u^2\frac{\partial}{\partial\psi_2}\frac{\omega_2}{\rho} + u^3\frac{\partial}{\partial I}\frac{\omega_2}{\rho}, \tag{3.8}$$

$$\omega_1\frac{\partial u^3}{\partial\psi_1} + \omega_2\frac{\partial u^3}{\partial\psi_2} = 0. \tag{3.9}$$

Покажем, что $u^3$ не зависит от $\psi_1$ и $\psi_2$. Для этого решим уравнение (3.9) методом Фурье. Положим

$$u^3 = \sum U_{p_1p_2}(I)e^{i(p_1\psi_1 + p_2\psi_2)}.$$

Из (3.9) вытекает цепочка равенств:

$$(p_1\omega_1 + p_2\omega_2)U_{p_1p_2} = 0.$$

Из первых двух условий теоремы 4 вытекает, что при $p_1^2+p_2^2 \neq 0$ функция $p_1\omega_1+p_2\omega_2$ имеет не более одного нуля в интервале $I_1 < I < I_2$. Следовательно,

$$U_{p_1p_2} = 0,$$

если $p_1^2 + p_2^2$. Но тогда $u^3$ — функция только от $I$.

Из (3.7) и (3.8) легко выводится уравнение

$$\omega_1\omega_2\frac{\partial u^1}{\partial\psi_1} + \omega_2^2\frac{\partial u^1}{\partial\psi_2} - \omega_1^2\frac{\partial u^2}{\partial\psi_1} - \omega_1\omega_2\frac{\partial u^2}{\partial\psi_2} = u^3\left(\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I} - \omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}\right). \tag{3.10}$$

Его правая часть зависит только от переменной $I$. Усредняя обе части этого равенства по угловым переменным $\psi_1$ и $\psi_2$, получим соотношение

$$u^3\frac{d}{dI}\frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.$$

Согласно второму условию теоремы 4, отсюда вытекает, что $u^3 = 0$. Следовательно, поле симметрий касается инвариантных торов $I = \mathrm{const}$.

Решим теперь уравнение (3.10) с нулевой правой частью методом Фурье. Положим

$$u^1 = \sum U^1_{p_1p_2}(I)e^{i(p_1\psi_1+p_2\psi_2)}, \quad u^2 = \sum U^2_{p_1p_2}(I)e^{i(p_1\psi_1+p_2\psi_2)}.$$

Из (3.10) вытекает цепочка равенств

$$(p_1\omega_1 + p_2\omega_2)\left(\omega_2 U^1_{p_1p_2} - \omega_1 U^2_{p_1p_2}\right) = 0.$$

Как уже говорилось, множитель $p_1\omega_1(I) + p_2\omega_2(I)$ почти всюду отличен от нуля. Следовательно,

$$\omega_2 U^1_{p_1p_2} = \omega_1 U^2_{p_1p_2}$$

для всех $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$. С учетом первого условия теоремы, отсюда вытекают равенства

$$U^1_{p_1p_2} = \omega_1 F_{p_1p_2}, \quad U^2_{p_1p_2} = \omega_2 F_{p_1p_2} \quad \left(p_1^2 + p_2^2 \neq 0\right).$$

Итак,

$$u^1 = U^1_0(I) + \omega_1 F, \quad u^2 = U^2_0(I) + \omega_2 F, \tag{3.11}$$

где

$$F = \sum{}' F_{p_1p_2}(I)e^{i(p_1\psi_1+p_2\psi_2)}$$

— гладкая периодическая по $\psi_1$ и $\psi_2$ функция.

Подставляя соотношение (3.11) в уравнение (3.8), после элементарных преобразований получаем:

$$\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi_1}(\rho F) + \omega_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}(\rho F) = -U^1_0\frac{\partial\rho}{\partial\psi_1} - U^2_0\frac{\partial\rho}{\partial\psi_2}. \tag{3.12}$$

Пусть

$$\rho F = \sum V_{p_1p_2}(I)e^{i(p_1\psi_1+p_2\psi_2)}.$$

Тогда из (3.12) получаем равенства

$$(p_1\omega_1 + p_2\omega_2)V_{p_1p_2} = -\left(p_1U^1_0 + p_2U^2_0\right)\rho_{p_1p_2}.$$

Пусть теперь $I \in P$. Тогда одновременно имеем два равенства:

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0 \quad \text{и} \quad p_1 U_0^1 + p_2 U_0^2 = 0.$$

Поскольку $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$, то

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ U_0^1 & U_0^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.13}$$

Так как множество $P$ всюду плотно заполняет интервал $(I_1, I_2)$, то (3.13) справедливо при всех $I \in (I_1, I_2)$. С учетом первого условия теоремы,

$$U_0^1 = \mu\omega_1, \quad U_0^2 = \mu\omega_2, \tag{3.14}$$

где $\mu$ — некоторая гладкая функция от $I$.

Перепишем теперь уравнение (3.12) с учетом соотношений (3.14):

$$\omega_1 \frac{\partial}{\partial \psi_1} (\rho F + \mu\rho) + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \psi_2} (\rho F + \mu\rho) = 0.$$

Следовательно, выражение в скобках не зависит от угловых переменных $\psi_1$ и $\psi_2$:

$$F = -\mu(I) + \frac{\varkappa(I)}{\rho}.$$

Здесь $\varkappa$ — некоторая гладкая функция. С учетом (3.11) получаем окончательно формулу (3.6):

$$u^1 = \frac{\omega_1 \varkappa}{\rho}, \quad u^2 = \frac{\omega_2 \varkappa}{\rho}, \quad u^3 = 0.$$

Теорема доказана.

Наличие непостоянного глобально определенного первого интеграла свидетельствует о *регулярности* в поведении динамической системы. Во всяком случае такая система не может быть не только эргодической, но и топологически транзитивной. В качестве меры хаотичности динамической системы с инвариантной мерой обычно выбирается ее *энтропия* (которая всегда неотрицательна). Системы с нулевой энтропией можно назвать *регулярными*. В [7] введены вполне регулярные гамильтоновы системы, в которых роль коммутирующих гамильтоновых полей симметрий играют поля симметрий более общего вида. Такие системы в общем случае вряд ли допускают точное интегрирование, однако они регулярны, поскольку их энтропия равна нулю.

Наличие нетривиальных полей симметрий также служит показателем регулярности динамической системы. Действительно, пусть

$$t \mapsto x_0(t) \tag{3.15}$$

— решение системы дифференциальных уравнений (1.1). Соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$(\delta x)^{\cdot} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0(t)} \delta x. \tag{3.16}$$

Если $u(x)$ — поле симметрий, то функция

$$t \mapsto u(x_0(t)) \tag{3.17}$$

есть решение уравнения (3.16). Это — хорошо известный факт, сразу же вытекающий из условия коммутирования векторных полей $u$, $v$.

Тривиальному полю симметрий $v$ соответствует тривиальное решение уравнения в вариациях

$$t \mapsto v(x_0(t)). \tag{3.18}$$

Если $M$ компактно, то это решение ограниченно. Наличие нетривиального поля симметрий дает еще одно ограниченное решение (3.17), линейно независимое с (3.18), что влечет равенство нулю *одного из показателей Ляпунова* решения (3.15). Если система (1.1) допускает $\dim M - 1$ нетривиальных полей симметрий, линейно независимых почти всюду на $M$, то *все показатели Ляпунова* почти всюду обращаются в нуль. Согласно известной формуле Песина [8], энтропия такой системы с инвариантной мерой равна нулю.

Этот подход можно распространить и на системы с компактным фазовым пространством, допускающие $n-2$ полей симметрий и инвариантную форму объема (меру с гладкой плотностью). При определенных условиях, сформулированных в параграфах 2 и 3, такие системы допускают первый интеграл, вообще говоря, многозначный. Ограничение системы (1.1) на многообразие уровня этого интеграла (пусть даже и не замкнутое) дает нам динамическую систему с «полным» набором ограниченных полей симметрий и инвариантной мерой. Все показатели Ляпунова «редуцированной» системы почти всюду равны нулю. Отсюда, в свою очередь, вытекает равенство нулю энтропии Колмогорова–Синая.

## 4. Приложения к магнитной гидродинамике

Динамика сплошной среды с бесконечной проводимостью описывается следующим векторным дифференциальным уравнением в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{rot}(v \times u). \tag{4.1}$$

Здесь $v(x,t)$ — поле скоростей сплошной среды, $u(x,t)$ — напряженность магнитного поля. Согласно уравнениям Максвелла, это поле соленоидальное:

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{4.2}$$

К уравнению (4.1) следует добавить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{4.3}$$

где $\rho(x,t) > 0$ — плотность сплошной среды. Обсуждение этого круга вопросов можно найти, например, в [9].

Будем рассматривать стационарные «вихревые» течения: поля $u$, $v$ и плотность $\rho$ не зависят явно от времени, а также

$$u \times v \neq 0. \tag{4.4}$$

Нас будут интересовать траектории движения частиц сплошной среды, которые определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = v(x). \tag{4.5}$$

Дифференциальная «3-форма материи»

$$\Omega = \rho(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \tag{4.6}$$

очевидно, инвариантна относительно фазового потока системы (4.5). Аналитическое условие инвариантности $\Omega$ сводится к стационарному уравнению неразрывности (4.3):

$$\mathrm{div}(\rho v) = 0. \tag{4.7}$$

Как показано в [10], в стационарном случае векторное поле

$$w = \frac{u}{\rho}$$

является полем симметрий: $[u, w] = 0$. Согласно предположению (4.4), векторные поля $v$ и $w$ линейно независимы во всех точках вихревого течения.

Покажем, что 3-форма (4.6) инвариантна относительно потока, определяемого полем симметрий:

$$L_w\Omega = 0.$$

Согласно (4.7), это сводится к проверке равенства

$$\mathrm{div}(\rho w) = 0.$$

Но это — очевидное следствие определения поля $w$ и свойства соленоидальности магнитного поля (4.2).

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 (при $n = 3$). Следовательно, дифференциальные уравнения движения частиц намагниченной жидкости (4.5) интегрируются в квадратурах. Подчеркнем, что квадратурами находятся не только линии тока, но и силовые линии магнитного поля. В этом смысле задачу о «вихревых» стационарных течениях намагниченной среды следует считать интегрируемой.

Структура стационарных течений сплошной среды с бесконечной проводимостью существенно зависит от топологии области течения. Особенно просто этот вопрос решается для односвязных областей (например, в области между вложенными сферами).

**Теорема 5.** *Предположим, что область течения жидкости $M$ компактна, односвязна и ограничена регулярной аналитической поверхностью, а поля $v$, $u$ и плотность $\rho$ аналитичны в $M$ и $u \times v \neq 0$. Тогда система (4.5) имеет непостоянный аналитический первый интеграл*

$$f\colon M \to \mathbb{R}$$

*и почти все связные поверхности*

$$B_c = \{x\colon f(x) = c\} \tag{4.8}$$

*(кроме, быть может, конечного числа) диффеоморфны либо двумерному тору, либо кольцу (прямое произведение отрезка на окружность). При этом на каждом из торов все линии тока либо замкнуты, либо всюду плотны, а на каждом кольце линии тока замкнуты. Периоды обращения частиц жидкости по разным замкнутым траекториям, лежащим на одной связной поверхности (4.8), совпадают.*

Существование непостоянного однозначного интеграла $f$ вытекает из общих результатов параграфа 2, а также непосредственно из стационарного уравнения (4.1):

$$\mathrm{rot}(v \times u) = 0.$$

Следовательно,

$$v \times u = \mathrm{grad}\, f, \tag{4.9}$$

причем функция $f$ однозначно (с точностью до аддитивной константы) определена во всей области $M$ ввиду ее односвязности. Ввиду предположения (4.4), $df \neq 0$. Следовательно, поверхности (4.8) будут регулярными. Из (4.9) сразу вытекает, что поля $v$ и $w$ касаются интегральных поверхностей (4.8). Если поверхности $B_c$ не пересекаются с границей $M$, то они будут двумерными торами, заполненными траекториями условно-периодических движений. Случай, когда поверхность $B_c$ пересекается с $\partial M$, рассматривается с учетом естественного граничного условия, что векторное поле скоростей $v$ касается границы $M$. Детали доказательства можно найти в работах [10, 11], где рассмотрена более частная задача об описании стационарных течений идеальной баротропной жидкости в потенциальном силовом поле. При этом роль векторного поля $u$ играет ротор поля скоростей, а функция $f$ — это интеграл Бернулли. В [11] жидкость предполагается еще и несжимаемой.

В многосвязном случае ситуация иная: траектории отдельных частиц могут всюду плотно заполнять всю область течения. Приведем простейший пример, относящийся к задаче с периодическими граничными условиями. Здесь область течения можно считать трехмерным тором с «плоской» евклидовой метрикой.

Пусть

$$v = \left(v^1, v^2, v^3\right) \quad \text{и} \quad u = \left(u^1, u^2, u^3\right)$$

— векторные поля с постоянными компонентами, причем $v \times u \neq 0$. Эти поля, конечно, удовлетворяют уравнению (4.1). Жидкость будем считать однородной: $\rho = \mathrm{const}$. Следовательно, уравнение неразрывности (4.7) выполняется автоматически, а постоянное магнитное поле $u$, очевидно, соленоидальное. Хорошо известно, что для почти всех наборов чисел $v^1$, $v^2$, $v^3$ *все* траектории частиц будут всюду плотны (и даже равномерно распределены на трехмерном торе — области течения). Соответствующий первый интеграл $f$, конечно, будет многозначной функцией (она линейна по угловым координатам $x_1$, $x_2$ и $x_3$).

Хотя система (4.5) на трехмерном торе в типичном случае будет эргодической, ее энтропия равна нулю. Это простое замечание вполне соответствует общим выводам, содержащимся в параграфе 3.

## Список литературы


[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Едиториал УРСС, 2002. 416 с.

[2] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

[3] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 432 с.

[4] Козлов В. В. Замечания об одной теореме Ли, касающейся точной интегрируемости дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, № 4, с. 553–555.

[5] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.

[6] Bolotin S. V., Kozlov V. V. Symmetry fields of geodesic flows // Russ. J. Math. Phys., 1995, vol. 3, no. 3, pp. 279–295.

[7] Kozlov V. V. Symmetries and regular behavior of Hamiltonian systems // Chaos, 1996, vol. 6, no. 1, pp. 1–5.

[8] Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН, 1977, т. 32, № 4, с. 55–111.

[9] Седов Л. И. Механика сплошной среды: В 2-х тт.: Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

[10] Козлов В. В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // ПММ, 1983, т. 47, № 2, с. 341–342.

[11] Арнольд В. И. О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ, 1966, т. 30, № 1, с. 183–185.

## The Euler – Jacobi – Lie integrability theorem

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

This paper addresses a class of problems associated with the conditions for exact integrability of a system of ordinary differential equations expressed in terms of the properties of tensor invariants. The general theorem of integrability of the system of $n$ differential equations is proved, which admits $n-2$ independent symmetry fields and an invariant volume $n$-form (integral invariant). General results are applied to the study of steady motions of a continuous medium with infinite conductivity.

MSC 2010: 34C14
Keywords: symmetry field, integral invariant, nilpotent group, magnetic hydrodynamics

Received July 5, 2012, accepted August 30, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 229–245 (Russian)