



УДК: 531.38
MSC 2010: 37J60, 37J35

Интегрируемость и стохастичность некоторых задач неголономной механики

И. А. Бизяев, А. О. Казаков

В работе исследуются проблемы, связанные с интегрируемостью неголономных систем, описывающих качение эллипсоида по плоскости и сфере без проскальзывания и верчения. В качестве основного инструмента для рассматриваемых систем применяется отображение Пуанкаре. Изучение полученных отображений помогло обнаружить новый интегрируемый случай.

Ключевые слова: неголономная связь, инвариантная мера, первый интеграл, отображение Пуанкаре, интегрируемость и хаос

1. Введение

В работе исследуется качение трехосного эллипсоида по плоскости и сфере без проскальзывания и верчения. Далее (вслед за авторами работ [1, 2]) тело, при движении которого отсутствует верчение будем называть «резиновым» (rubber) телом.

Система, описывающая исследуемую задачу, в общем случае не интегрируема. Кроме того, как доказано в [3], эта система допускает существование инвариантной меры лишь в некоторых частных случаях. В связи с этим в работе ставится вопрос об интегрируемости системы (в смысле Эйлера–Якоби) в случаях, допускающих существование инвариантной меры. Поставленный вопрос решается с помощью численного исследования двумерных отображений Пуанкаре.

Получено 3 апреля 2013 года
После доработки 21 мая 2013 года

Бизяев Иван Алексеевич
bizaev_90@mail.ru
Институт компьютерных исследований;
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Казаков Алексей Олегович
Kazakovdz@yandex.ru
НИИ прикладной математики и кибернетики
603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 10



2. Постановка задачи

Рассмотрим эллипсоид, катящийся по неподвижной поверхности. В точке контакта эллипсоида с поверхностью отсутствуют проскальзывание и верчение. Эти условия описываются неголономными связями в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс C с точкой контакта P , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности в точке контакта (см. рис. 1). При этом величины \mathbf{r} , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{n} заданы в проекциях на подвижные оси $Cxyz$. Уравнения движения, описывающие эволюцию $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{n} в отсутствие внешнего поля, представляются в форме

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \lambda_0\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m\mathbf{r}^2\mathbf{E} - m\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ — тензор инерции относительно точки контакта, $\mathbf{\Gamma}$ — матрица с элементами $\Gamma_{ij} = \delta_{ij} - k\frac{\partial r_i}{\partial n_j}$, $k = 1/a$, a — радиус сферы, по которой движется эллипсоид (при $a \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$ получаем случай плоскости), а m — масса эллипсоида.

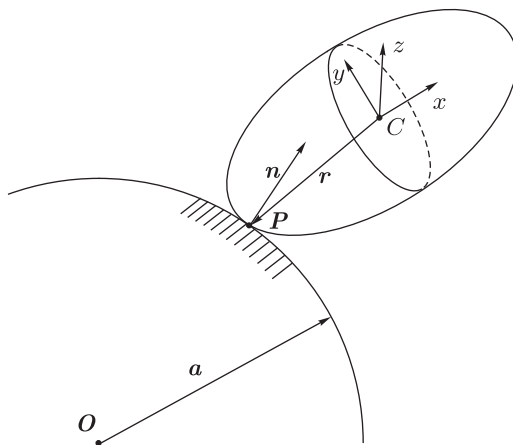


Рис. 1. Качение эллипсоида по сфере.

Для эллипсоида \mathbf{r} выражается через вектор нормали к поверхности в точке контакта следующим образом, $\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{B}\mathbf{n}}{\sqrt{(\mathbf{B}\mathbf{n}, \mathbf{n})}}$, где $\mathbf{B} = \text{diag}(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$, a_1, a_2, a_3 — полуоси эллипсоида.

Неопределенный множитель λ_0 отвечает за наличие губбер связи $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$ и выражается по формуле

$$\lambda_0 = -\frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{n}, (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})) + k(\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{r}})}{(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{n})}. \quad (2.3)$$

Отметим, что при $\lambda_0 = 0$ уравнения (2.2) допускают верчение эллипсоида относительно точки контакта.

Система уравнений (2.2) обладает тремя интегралами:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0 \quad (2.4)$$

— энергии, геометрическим и дополнительным, реализующим rubber связь. Таким образом, по теореме Эйлера–Якоби, для интегрируемости системы уравнений (2.2) не хватает инвариантной меры и одного дополнительного интеграла.

3. Отображение Пуанкаре в переменных Андуайе–Депри

Для численного исследования поставленной задачи весьма удобными являются переменные Андуайе–Депри (L, G, g, l) [6], задаваемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \\ \omega_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \\ \omega_3 &= L, \\ n_1 &= \frac{L}{G} \cos g \sin l + \sin g \cos l, \\ n_2 &= \frac{L}{G} \cos g \cos l - \sin g \sin l, \\ n_3 &= -\sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \cos g. \end{aligned} \quad (3.1)$$

На совместном уровне трех интегралов (2.4) уравнения (2.2) задают трехмерный поток \mathcal{G}_E . Условия $\mathbf{n}^2 = 1$ и $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$ в новых координатах L, G, g и l выполняются автоматически. На уровне трех интегралов соотношения (3.1) задают взаимно-однозначное преобразование всюду, кроме $L/G = \pm 1$.

Двумерное сечение трехмерного уровня энергии $\mathcal{H}\left(\frac{L}{G}, l, g\right) = E$ задано плоскостью $g = g_0 = \text{const}$, на которой выбраны координаты $\left(l, \frac{L}{G}\right)$, и приведено к некоторому точечному двумерному отображению (отображение Пуанкаре).

Таким образом, исследование динамики системы (2.2) можно свести к исследованию двумерного отображения Пуанкаре

$$\bar{x} = \mathcal{F}_{g_0}(x), \quad x = \left(l, \frac{L}{G}\right), \quad (3.2)$$

которое определено в области $0 \leq l < 2\pi, -1 \leq L/G \leq 1$.

4. Качение эллипсоида по плоскости ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$)

В работе [3] показано, что инвариантная мера существует, если выполнено условие:

$$(a_2^2 - a_3^2)(ma_1^2 I_1 - I_2 I_3) + (a_3^2 - a_1^2)(ma_2^2 I_2 - I_1 I_3) + (a_1^2 - a_2^2)(ma_3^2 I_3 - I_1 I_2) = 0. \quad (4.1)$$

При фиксированных значениях полуосей $a_1 \neq a_2, a_2 \neq a_3, a_3 \neq a_1$ условие (4.1) представляет собой уравнение однополостного гиперболоида относительно моментов инерции I_1, I_2, I_3 .



Разрешив соотношение (4.1) относительно указанных моментов инерции, можно получить двупараметрическое семейство:

$$I_k = m \det \mathbf{B} \frac{\alpha + a_k^{-2}}{\beta + a_k^2}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Тогда инвариантная мера имеет вид

$$\frac{(\chi_b + (\alpha\beta - 1) \det \mathbf{B})^{1/2} ((\mathbf{r}, \mathbf{n})^2 (\Delta_b + \beta \mathbf{r}^2) - \det \mathbf{B})}{(\mathbf{r}, \mathbf{n})^2} d\omega d\mathbf{n}, \quad (4.3)$$

где

$$\chi_b = (\beta^2 + \beta \text{Tr} \mathbf{B} + \Delta_b) (\mathbf{r}, \mathbf{n})^2, \quad \Delta_b = \det \mathbf{B} (\alpha + \text{Tr} \mathbf{B}^{-1}).$$

Таким образом, для интегрируемости уравнений (2.2) при (4.2) и $k = 0$ не хватает одного дополнительного интеграла.

Ответить на вопрос о существовании дополнительного интеграла помогает исследование отображений Пуанкаре. Хаотический характер траекторий (см. рис. 2) свидетельствует об отсутствии дополнительного интеграла для двупараметрического семейства (4.2) в общем случае.

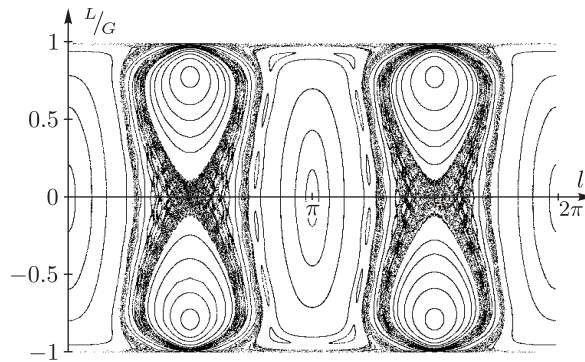


Рис. 2. Отображения Пуанкаре в задаче качения эллипсоида по плоскости с параметрами, удовлетворяющими условию существования меры (4.1): $g = \pi$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $m = 1$, $I_1 = 2$, $I_2 = 2$, $I_3 = 2$, $h = 2$.

Отдельно можно выделить случай

$$\alpha = \text{Tr} \mathbf{B}^{-1} - \mu \frac{\text{Tr} \mathbf{B}}{m \det \mathbf{B}} - \frac{\mu^2}{m^2 \det \mathbf{B}}, \quad \beta = -\text{Tr} \mathbf{B} - m^{-1} \mu. \quad (4.4)$$

При указанных α и β моменты инерции образуют однопараметрическое семейство вида

$$\mathbf{I} = \mu \mathbf{E} + m \mathbf{B}. \quad (4.5)$$

Теорема 1. Система уравнений (2.2) интегрируема, по теореме Эйлера – Якоби, при выполнении следующих условий:

- $k = 0$ – качение эллипсоида происходит по плоскости,
- $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E} + m \mathbf{B}$ – тензор инерции имеет специальный вид.

При этом дополнительный интеграл F_2 имеет вид

$$F_2 = \frac{\det \tilde{\mathbf{I}}}{\mu + mr^2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\omega}). \quad (4.6)$$

При любых параметрах, удовлетворяющих условию (4.5) и при $k = 0$, плоскость двумерного отображения расслаивается на гладкие инвариантные кривые (см. рис. 3), что наглядно демонстрирует справедливость теоремы 1.

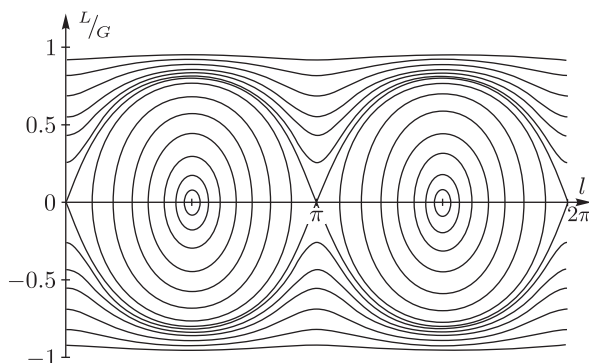


Рис. 3. Отображения Пуанкаре в задаче качения эллипсоида по плоскости при параметрах, удовлетворяющих условию существования меры (4.5): $g = \pi$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $m = 1$, $\mu = 0$.

Отметим, что если эллипсоид движется по плоскости без проскальзывания, но с вращением, то инвариантная мера существует только в двух случаях, удовлетворяющих условию (4.1): (4.5) и $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$. Мера в этих двух случаях известна (см. [7, 8]). Таким образом для интегрируемости этой системы не хватает двух дополнительных интегралов (энергия и геометрический интеграл сохраняются, а интеграл, реализующий связь $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$, исчезает). В этом случае исследование задачи выполняется с помощью трехмерных отображений Пуанкаре [5]. Одно из таких отображений приведено на рисунке 4. Траектории системы хаотически заполняют некоторую область отображения, не ложась ни на какую поверхность, что свидетельствует об отсутствии сразу двух дополнительных интегралов.

5. Качение эллипсоида по сфере ($k \neq 0$)

В зависимости от взаимного расположения эллипсоида и сферы (сонаправленности векторов \mathbf{n} и \mathbf{r}) можно выделить 3 типа движений:

- качение эллипсоида по сфере (см. рис. 5а),
- качение эллипсоида внутри сферы (см. рис. 5б),
- обкатывание сферы эллипсоидом (см. рис. 5с).

Для всех вышеперечисленных случаев инвариантная мера существует (согласно [3]) при выполнении условия (4.5).

В отличие от случая $k = 0$ (качение эллипсоида по плоскости), условие существования меры представляется в виде однопараметрического семейства, а инвариантная мера

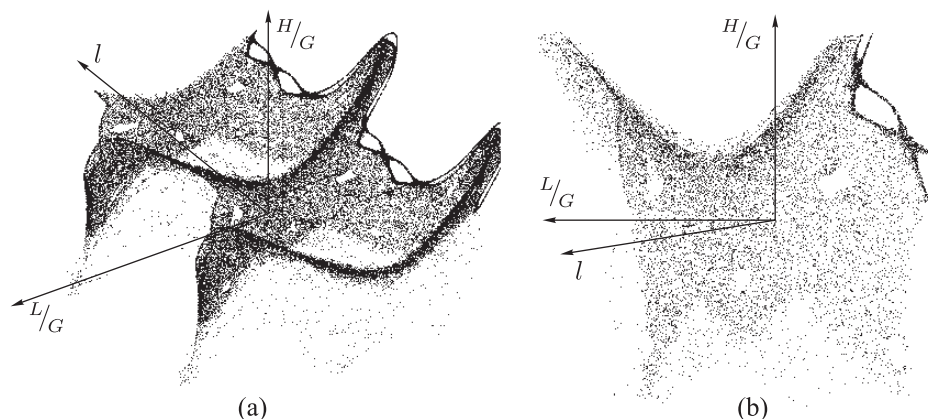


Рис. 4. Трехмерное отображение Пуанкаре в задаче качения эллипсоида с вращением (эллипсоид имеет специальное распределение масс), удовлетворяющего условию (4.5): (а) хаотический слой, полученный из одной траектории; (б) увеличенный фрагмент хаотического слоя.

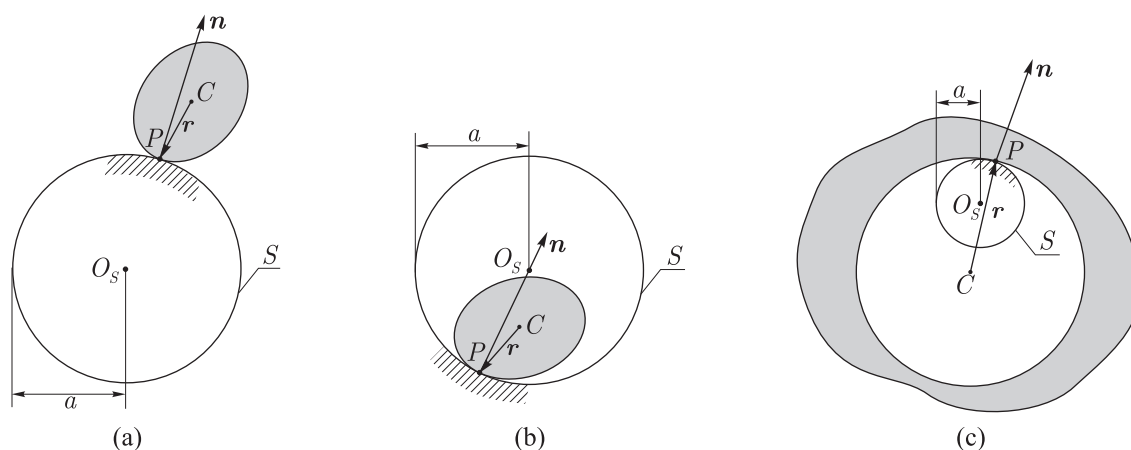


Рис. 5. Возможные варианты качения эллипсоида по неподвижной сфере: (а) качение эллипсоида по сфере $\left(r = -\frac{\mathbf{Bn}}{\sqrt{(\mathbf{Bn}, \mathbf{n})}}, k = \frac{1}{a}\right)$; (б) качение эллипсоида внутри сферы $\left(r = -\frac{\mathbf{Bn}}{\sqrt{(\mathbf{Bn}, \mathbf{n})}}, k = -\frac{1}{a}\right)$; (с) обкатывание сферы эллипсоидом $\left(r = \frac{\mathbf{Bn}}{\sqrt{(\mathbf{Bn}, \mathbf{n})}}, k = \frac{1}{a}\right)$.

принимает вид

$$\frac{\det \tilde{\mathbf{I}}}{(\mu + mr^2) \det \mathbf{\Gamma}} \left(1 + k \frac{k \det \mathbf{B} - (\mathbf{r}, \mathbf{n})^3 (\text{Tr} \mathbf{B} - r^2)}{(\mathbf{r}, \mathbf{n})^4} \right)^2 d\omega dn. \quad (5.1)$$

Таким образом, для интегрируемости (2.2) в рассматриваемом случае не хватает одного дополнительного интеграла.

Отображение Пуанкаре для этого случая приведено на рисунке 6. Хаотический характер траекторий вблизи седловых точек говорит об отсутствии дополнительного интеграла.

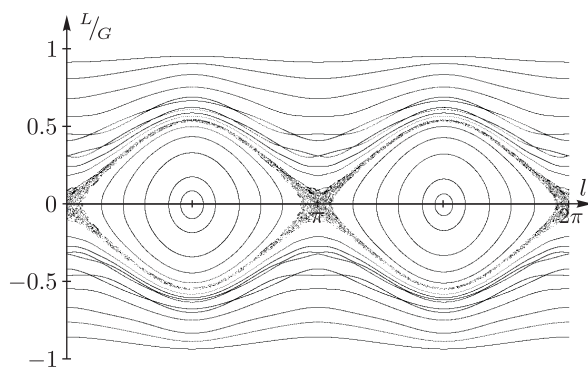


Рис. 6. Отображения Пуанкаре в задаче качения эллипсоида по сфере с параметрами, удовлетворяющими условию существования меры (4.5): $g = \pi$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a = 1$, $m = 1$, $\mu = 0$.^a

5.1. Качение шара по сфере

Случай качения шара ($k \neq 0$, $a_1 = a_2 = a_3$) по сфере выделен отдельно в связи с существованием в системе инвариантной меры без каких-либо дополнительных ограничений на моменты инерции. Согласно работе [1], инвариантная мера в этом случае представляется в виде

$$(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})^{\frac{1+kR}{2}} d\omega d\mathbf{n}. \quad (5.2)$$

Кроме того, в [4] указан дополнительный интеграл F_2 при соотношении $kR = -2$ (рис. 5с):

$$F_2 = \frac{(\mathbf{J}\omega, \mathbf{J}\omega)\mathbf{n}^2 + \det \mathbf{J}(\omega, \mathbf{J}\omega)(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}. \quad (5.3)$$

Наличие интеграла (5.3) позволяет утверждать, что система интегрируема. В рассматриваемом случае численные исследования подтверждают существование дополнительного интеграла (см. рис. 7).

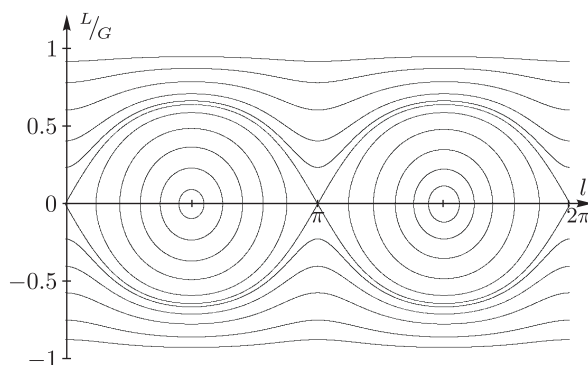


Рис. 7. Отображения Пуанкаре в задаче качения шара по сфере с параметрами: $g = \pi$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $R = -0.5$, $m = 1$, $I_1 = 4$, $I_2 = 5$, $I_3 = 6$, $h = 8$.

^a Заметим, что при данных значениях параметров моменты инерции вдоль главных осей ($I_1 = 1$, $I_2 = 4$, $I_3 = 25$) не удовлетворяют неравенству треугольника. Хаотический слой был также обнаружен и при физических параметрах (удовлетворяющих неравенству треугольника) вблизи седловых точек при значительном увеличении соответствующей области на отображении Пуанкаре.

Особый интерес представляют исследования задачи в случае $kR = 1$ (что соответствует качению шара по сфере одинаковых радиусов). В этом случае система уравнений (2.2) оказывается гамильтоновой [3]. При этом наличие хаоса в отображении Пуанкаре (см. рис. 8) свидетельствует о том, что система неинтегрируема. Заметим, что при смещении центра масс шара (в случае $kR = 1$), исходная система уравнений сохранит меру и по-прежнему останется гамильтоновой, однако (как и в предыдущем случае) будет неинтегрируемой.

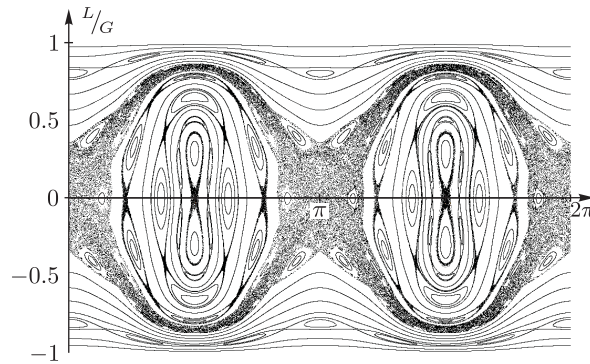


Рис. 8. Отображения Пуанкаре в задаче качения шара по шару с параметрами, удовлетворяющими условию существования меры (4.2): $a_1 = a_2 = a_3 = R = 1$, $m = 1$, $I_1 = 2$, $I_2 = 5$, $I_3 = 7$, $h = 50$.

В заключение отметим, что в системе (2.2) при качении шара по сфере не было обнаружено интегрируемых случаев, кроме $kR = -2$. Однако нельзя исключать интегрируемость системы во всех случаях, отличных от $kR = -2$.

6. Заключение

Проведенные аналитические и численные исследования позволяют сделать следующие выводы относительно интегрируемости задачи качения эллипсоида по плоскости и сфере без проскальзывания и верчения.

- Задача качения эллипсоида по плоскости интегрируема при условии (4.5) существования инвариантной меры.
- Задача качения эллипсоида по сфере не интегрируема даже в случае существования инвариантной меры (4.1).
- Задача качения шара по сфере не интегрируема в общем случае. Однако дополнительный интеграл может существовать при некоторых ограничениях на параметры k и R .

Список литературы

- [1] Ehlers K., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of 2-3-5 distributions // Proc. IUTAM Symp. on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, 25–30 August, 2006), pp. 469–480.
- [2] Koiller J., Ehlers K.M. Rubber rolling over a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.



- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.
- [5] Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 328 с.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [7] Ярошук В. А. Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 1992, № 6, с. 26–30.
- [8] Ярошук В. А. Интегральный инвариант в задаче о качении эллипсоида со специальными распределениями масс по неподвижной поверхности без проскальзывания // *МТТ*, 1995, № 2, с. 54–57.
- [9] Воронец П. В. К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил // *Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости* / П. В. Воронец. Киев: Тип. Имп. ун-та св. Владимира, 1903. С. 1–11.

Integrability and stochastic behavior in some nonholonomic dynamics problems

Ivan A. Bizyaev¹, Alexey O. Kazakov²

¹Institute of Computer Science;
Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

²Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics
Ul'yanova st. 10, Nizhnii Novgorod, 603605, Russia

¹bizaev_90@mail.ru, ²kazakovdz@yandex.ru

In this paper, we investigate the dynamics of systems describing the rolling without slipping and spinning (rubber rolling) of an ellipsoid on a plane and a sphere. We research these problems using Poincaré maps, which investigation helps to discover a new integrable case.

MSC 2010: 37J60, 37J35

Keywords: nonholonomic constraint, invariant measure, first integral, Poincaré map, integrability and chaos

Received April 3, 2013, accepted May 21, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 257–265 (Russian)

