



УДК: 531.36

MSC 2010: 37Н20, 60Н10

## Бифуркация расщепления стохастических циклов в модели Фицхью – Нагумо

И. А. Башкирцева, Л. Б. Ряшко, Е. С. Слепухина

В работе исследуется стохастическая динамика модели Фицхью–Нагумо в зоне предельных циклов. При малых шумах случайные траектории концентрируются в малой окрестности детерминированной орбиты исходного невозмущенного предельного цикла. При увеличении шума в зоне «циклов-уток» модели Фицхью–Нагумо пучок случайных траекторий начинает расщепляться на две части. Это явление исследуется с помощью плотностей распределения случайных траекторий. Показано, что пороговое значение интенсивности шума, соответствующее бифуркации расщепления, существенно зависит от степени стохастической чувствительности исследуемого цикла. При помощи техники функций стохастической чувствительности найдено критическое значение параметра, отвечающее сверхчувствительному циклу, и проведен сравнительный параметрический анализ эффекта расщепления стохастического цикла в окрестности найденного критического значения.

Ключевые слова: модель Фицхью–Нагумо, стохастическая чувствительность, циклы, бифуркация расщепления

---

Получено 18 февраля 2013 года  
После доработки 15 мая 2013 года

---

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (1.1099.2011, 14.А18.21.0364) и РФФИ (грант 13-08-00069).

---

Башкирцева Ирина Адольфовна  
[irina.bashkirtseva@usu.ru](mailto:irina.bashkirtseva@usu.ru)  
Ряшко Лев Борисович  
[lev.ryashko@usu.ru](mailto:lev.ryashko@usu.ru)  
Слепухина Евдокия Сергеевна  
[eudokiya@yandex.ru](mailto:eudokiya@yandex.ru)  
Уральский федеральный университет  
620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51

## Введение

Анализ вызванных случайными возмущениями изменений в поведении динамических систем привлекает внимание исследователей в различных областях естествознания. Стохастические флуктуации часто вызывают неожиданный отклик в работе электронных генераторов и лазеров, приводят к смене динамических режимов функционирования химических и биологических систем. Конструктивная роль шумов подтверждается такими явлениями, как стохастический резонанс [1–3], индуцированные шумами переходы [4, 5], индуцированный шумом порядок [6, 7], индуцированный шумом хаос [8].

Даже небольшие случайные возмущения могут привести к глубоким качественным изменениям в нелинейной динамике некоторых систем. Важной особенностью таких динамических систем является повышенная возбудимость. Классическим примером возбудимой системы является модель Фицхью–Нагумо (ФН) нейронной активности [9, 10]. Фазовый портрет детерминированного варианта этой модели отличается высокой чувствительностью к вариациям параметров и начальных условий. Необходимый материал по этим свойствам детерминированной системы ФН представлен в разделе 1.

Стохастическая динамика модели ФН в присутствии случайных возмущений исследовалась во многих работах (см. [11] и библиографию к ней). Одним из наиболее ярких явлений в стохастической динамике этой модели является то, что даже при малых шумах в зоне устойчивого равновесия вблизи точки бифуркации Андронова–Хопфа возбуждаются колебания большой амплитуды [12]. Для этих индуцированных шумом предельных циклов был обнаружен [13] и исследован эффект когерентного резонанса [14–17]. Основным инструментом анализа этих явлений в модели ФН является прямое численное моделирование случайных траекторий. Методы, основанные на аналитическом подходе с использованием асимптотик, можно найти в [14, 17]. Анализ вероятностного механизма стохастического возбуждения колебаний с помощью техники функций стохастической чувствительности был проведен в [18].

В разделе 2 данной работы стохастическая модель ФН исследуется в зоне предельных циклов. При малом шуме случайные траектории концентрируются в малой окрестности детерминированной орбиты исходного невозмущенного предельного цикла. При увеличении шума, наряду с естественным увеличением разброса, пучок случайных траекторий начинает расщепляться на две части. Распределение случайных траекторий в пучке трансформируется из унимодальной формы в бимодальную. Такое качественное изменение формы плотности стационарного распределения можно трактовать как особый тип стохастической бифуркации — *P*-бифуркацию [19, 20].

Пороговое значение интенсивности шума, соответствующее началу такой трансформации, существенно зависит от параметров модели и определяется степенью стохастической чувствительности исследуемых циклов. Модель ФН в весьма узкой параметрической зоне демонстрирует очень быстрый переход от предельных циклов малой амплитуды к релаксационным колебаниям большой амплитуды. Такой переход происходит через так называемые «циклы-утки», впервые исследованные в [21]. Эффекты воздействия случайных возмущений на циклы такого типа рассматривались в [22]. В данной работе в зоне «циклов-уток» модели ФН при помощи техники функций стохастической чувствительности найдено критическое значение параметра, отвечающее сверхчувствительному циклу. Для этой зоны в окрестности найденного критического значения проводится сравнительный параметрический анализ эффекта расщепления стохастических циклов.

## 1. Детерминированная модель Фицхью–Нагумо

Рассматривается система дифференциальных уравнений Фицхью–Нагумо

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x + a, \end{aligned} \tag{1.1}$$

моделирующая распространение нервного импульса в аксоне нейрона [9]. Здесь  $x$  — транс-мембранное напряжение,  $y$  — переменная активации ионного тока,  $\delta > 0$  — параметр временного масштаба,  $a$  — управляющий параметр, определяющий порог возбуждения.

Эта система имеет одно равновесие

$$\bar{x} = -a, \quad \bar{y} = \frac{a^3}{3} - a,$$

которое является устойчивым при  $|a| > 1$  и неустойчивым при  $|a| < 1$ . При  $|a| = 1$  происходит бифуркация Андронова–Хопфа: при  $|a| < 1$  в системе наблюдается устойчивый предельный цикл вокруг неустойчивого равновесия.

В данной работе мы фиксируем  $\delta = 0.1$ . На рисунке 1 сплошной линией изображены значения переменной  $y$  в сечении Пуанкаре  $x = \bar{x}$  детерминированных аттракторов (равновесий и циклов), а пунктирной — значения неустойчивых равновесий.

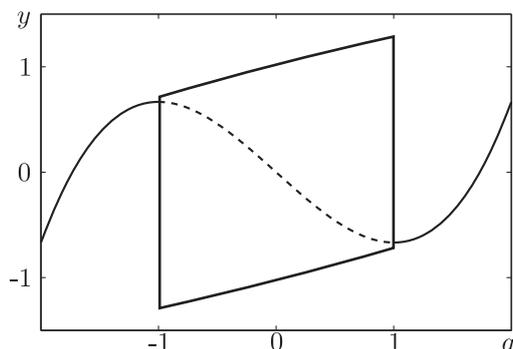
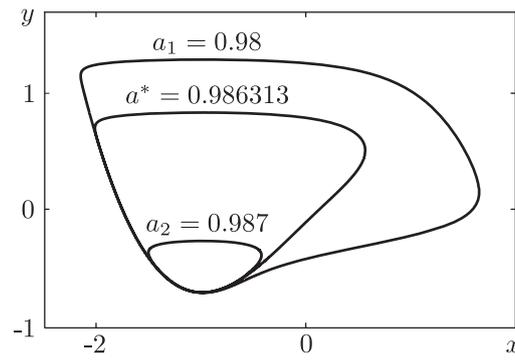
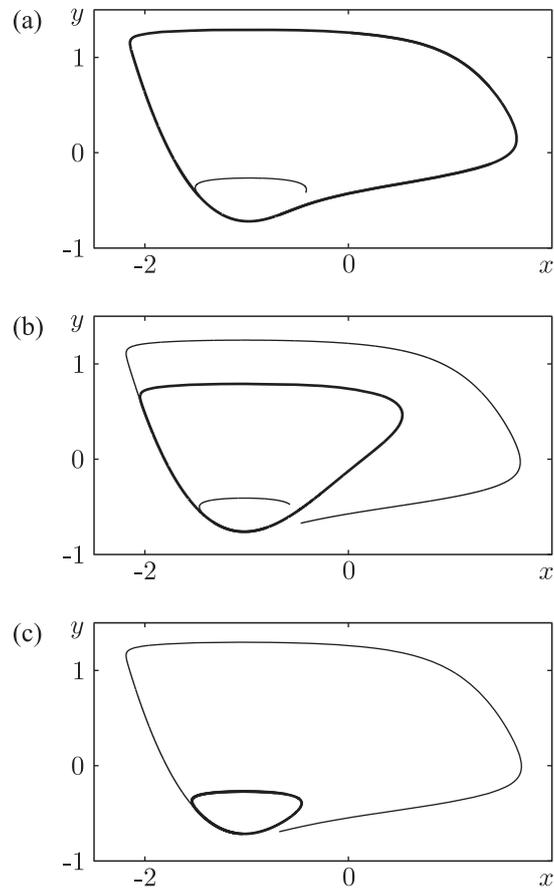


Рис. 1. Аттракторы детерминированной системы для  $\delta = 0.1$ .

В зоне  $|a| < 1$  даже малые вариации параметра  $a$  приводят к существенному изменению формы и размера предельных циклов. Такие изменения показаны на рисунке 2 для интервала  $a_1 = 0.98 \leq a \leq 0.987 = a_2$ . На этом узком интервале, расположенном вблизи точки бифуркации  $a = 1$ , детерминированная модель ФН демонстрирует переход от квазигармонических к релаксационным колебаниям через «циклы-утки».

Важной особенностью исследуемой системы является крайняя неоднородность фазового портрета в окрестности циклов. При малых отклонениях от цикла фазовая траектория монотонно к нему стремится. Если величина отклонения превышает некоторый порог, то траектория переходного процесса может существенно удаляться от цикла, совершая ближние или дальние «экскурсии» (рис. 3).

Как будет показано далее, отмеченные особенности детерминированной модели оказывают существенное влияние на ее поведение в присутствии случайных возмущений.

Рис. 2. Циклы детерминированной системы для  $\delta = 0.1$ .Рис. 3. Фазовые портреты детерминированной системы для  $\delta = 0.1$  при различных значениях управляющего параметра: (a)  $a = 0.98$ , (b)  $a = 0.986313$ , (c)  $a = 0.987$ . Толстой линией показаны предельные циклы.

## 2. Расщепление стохастических циклов

Рассмотрим динамику системы (1.1) в присутствии случайных возмущений:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + \varepsilon \dot{w}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь  $w$  — стандартный винеровский процесс с параметрами  $E(w(t) - w(s)) = 0$ ,  $E(w(t) - w(s))^2 = |t - s|$ , а  $\varepsilon$  — интенсивность возмущений.

Нас будет интересовать стохастическая динамика этой системы в зоне предельных циклов. Под действием случайных возмущений траектории покидают детерминированный цикл и формируют вокруг него некоторый пучок — стохастический цикл. На рисунке 4 изображены стохастические циклы для трех значений параметра  $a$  при  $\varepsilon = 10^{-6}$ : внешний цикл получен при  $a = a_1 = 0.98$ , средний — при  $a = a^* = 0.986313$ , внутренний — при  $a = a_2 = 0.987$ . Как видим, разброс случайных траекторий существенно меняется вдоль цикла. Еще в большей степени этот разброс зависит от параметра  $a$ . Если для крайних точек интервала  $a_1 \leq a \leq a_2$  случайные траектории локализованы вблизи соответствующих детерминированных циклов, то для внутренней точки  $a^* = 0.986313$  случайные траектории в верхней части цикла имеют значительную дисперсию.

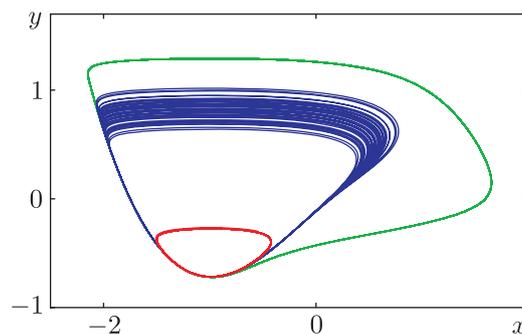


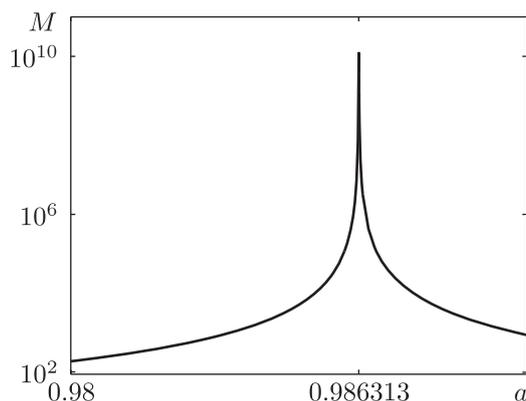
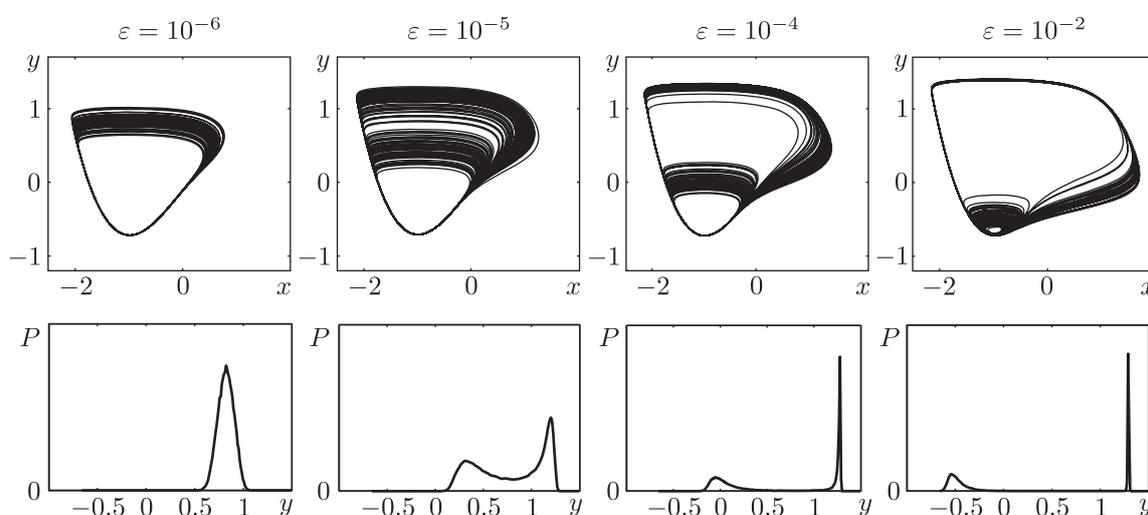
Рис. 4. Стохастические циклы для  $\delta = 0.1$  при  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Удобной количественной характеристикой величины разброса случайных траекторий вокруг детерминированного цикла при малых шумах является функция стохастической чувствительности (ФСЧ) [23–25]. Необходимый математический аппарат ФСЧ дается в приложении.

На рисунке 5 представлен график коэффициента стохастической чувствительности  $M$  предельных циклов в зависимости от параметра  $a$ . На графике в точке  $a^*$  наблюдается острый пик, отвечающий максимуму функции  $M(a)$  и соответствующий циклу, имеющему наиболее высокую стохастическую чувствительность  $M(a^*) = 1.2 \times 10^{10}$  в зоне  $[a_1, a_2]$ . Отметим, что в соседних точках  $a_1, a_2$  стохастическая чувствительность циклов меньше на несколько порядков:  $M(a_1) = 1.9 \times 10^2$ ,  $M(a_2) = 3 \times 10^4$ . Такой существенный перепад значений чувствительности объясняет разницу в поведении стохастических циклов, представленных на рисунке 4.

При увеличении интенсивности шума в системе ФН наряду с количественными изменениями могут наблюдаться качественно новые эффекты.

Исследуем более детально распределение траекторий стохастически возмущенных предельных циклов для  $a = a^*$  при разных значениях интенсивности шума  $\varepsilon$ . На рисунке 6

Рис. 5. Фактор стохастической чувствительности  $M(a)$ .Рис. 6. Расщепление стохастического цикла при  $a = a^* = 0.986313$ . Сверху — случайные траектории, снизу — плотности распределения.

представлены стохастические траектории и графики плотности распределения  $P(y)$  ординат точек пересечения этих траекторий с прямой  $x = \bar{x}$  при  $y \geq \bar{y}$ .

Заметим, что с увеличением шума распределение случайных траекторий меняется. При  $\varepsilon = 10^{-6}$  траектории концентрируются вблизи детерминированной орбиты — наблюдается один стохастический цикл. При увеличении шума разброс траекторий увеличивается, диапазон амплитуд стохастических колебаний расширяется. При  $\varepsilon = 10^{-5}$  можно заметить, что в пучке случайных траекторий возникает две зоны концентрации — стохастический цикл «расщепляется»: случайные траектории ведут себя так, как будто движение происходит вдоль детерминированного 2-цикла. Более явно это становится заметно при  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Таким образом, происходит качественное изменение фазового портрета стохастической системы — стохастическая бифуркация. Точка бифуркации находится между  $\varepsilon = 10^{-6}$  и  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Это наблюдение подтверждается существенными изменениями плотности  $P(y)$  распределения случайных траекторий. При  $\varepsilon = 10^{-6}$  график плотности имеет один пик, отражающий концентрацию траекторий в верхней части стохастического цикла. При  $\varepsilon = 10^{-5}$  плотность уже бимодальна. Далее пики расходятся, и при  $\varepsilon = 10^{-4}$  отчетливо видны колебания малой и большой амплитуды (при этом левый пик перемещается в направлении равнове-

сия). Отмеченные изменения в динамике стохастической системы хорошо иллюстрируются временными рядами. На рисунке 7 изображены графики координаты  $y(t)$ .

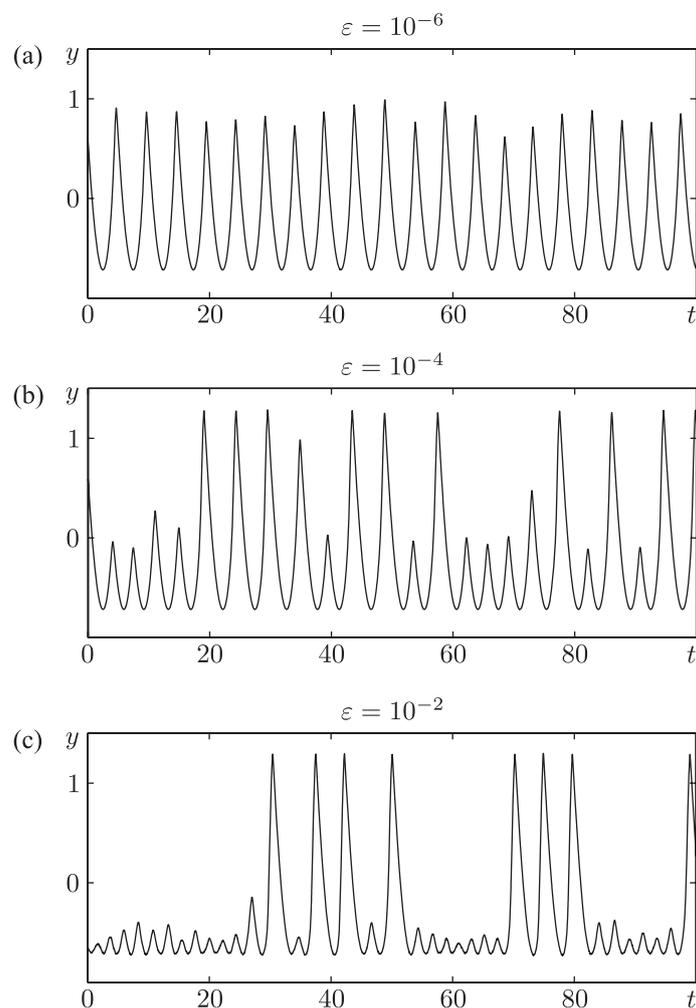


Рис. 7. Графики координаты  $y(t)$  при  $a = 0.986313$ .

На рисунке 8 для  $a = a^*$  представлена стохастическая бифуркационная диаграмма системы ФН — зависимость максимумов плотности распределения по  $y$  при  $y > \bar{y}$  от интенсивности шума  $\varepsilon$ . Здесь пунктиром изображена координата  $\bar{y}$  неустойчивого равновесия детерминированной системы. Диаграмма построена по результатам прямого численного моделирования. С помощью бифуркационной диаграммы удалось оценить критическое значение интенсивности шума, при котором начинается расщепление стохастического цикла:  $\varepsilon^* \approx 3 \times 10^{-6}$ .

Рассмотрим теперь зависимость распределения траекторий стохастических циклов от интенсивности шума при других значениях параметра  $a$ , близких к  $a^*$ . Как уже отмечалось, вблизи  $a^*$  размер детерминированных предельных циклов быстро изменяется (см. рис. 2). Рассмотрим воздействие шума на циклы большой ( $a_1 = 0.98$ ) и малой ( $a_2 = 0.987$ ) амплитуды.

На рисунке 9 при  $a = 0.98$  для двух значений интенсивности шума  $\varepsilon = 10^{-3}$  и  $\varepsilon = 10^{-2}$  изображены случайные траектории системы (2.1) и соответствующие графики плот-

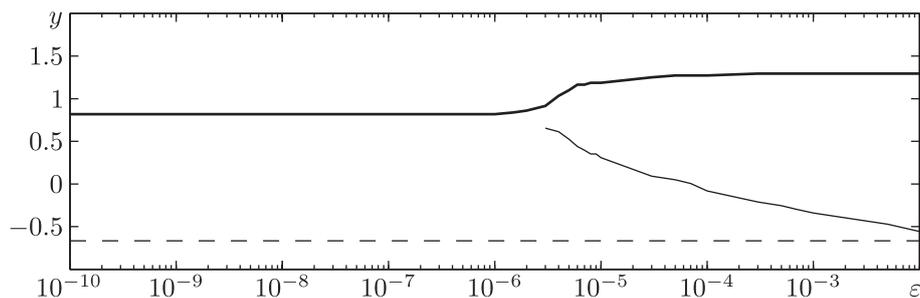


Рис. 8. Бифуркация расщепления стохастического цикла при  $a = 0.986313$ : максимумы плотности распределения (сплошные линии), неустойчивое равновесие (пунктирные линии).

ности  $P(y)$ . При воздействии на систему шума интенсивности  $\varepsilon = 10^{-3}$  траектории концентрируются вблизи детерминированной орбиты.

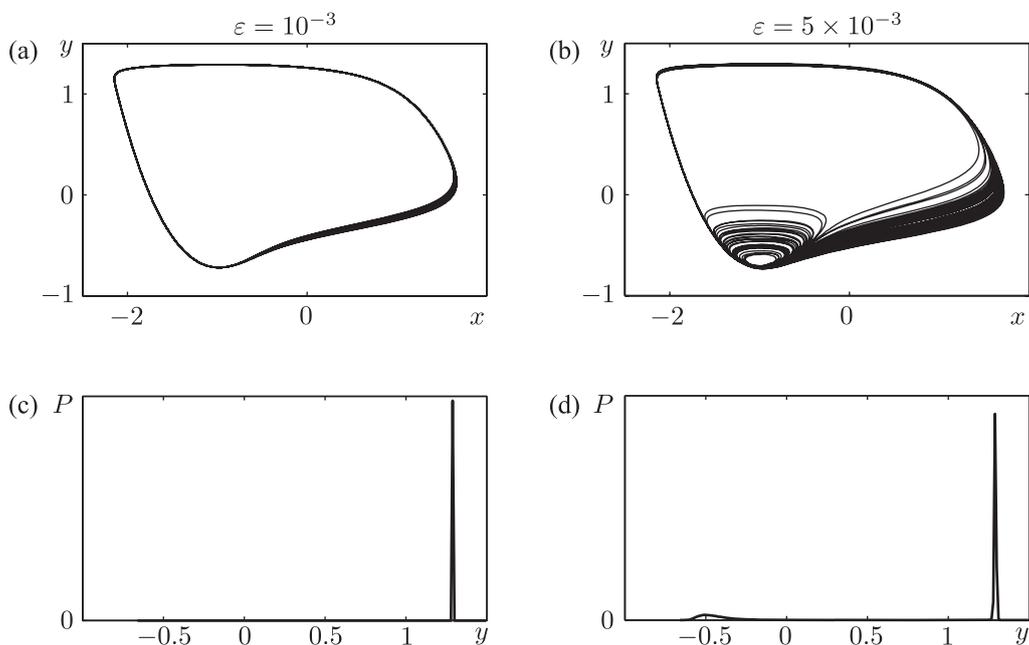


Рис. 9. Расщепление стохастического цикла при  $a = a_1 = 0.98$ . Сверху — случайные траектории, снизу — плотности распределения.

При увеличении интенсивности шума наблюдается появление нового пучка случайных траекторий, проходящих вблизи равновесия системы и соответствующих колебаниям малых амплитуд. Это наблюдение подтверждается графиками плотности распределения. Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рисунке 10. Заметим, что, в отличие от случая  $a = a^*$ , расположение максимума  $P(y)$ , отвечающего колебаниям большой амплитуды, практически не зависит от  $\varepsilon$ , а максимумы концентрации появившихся колебаний малых амплитуд монотонно смещаются к равновесию.

Исследуем воздействие шума на предельный цикл малой амплитуды для  $a_2 = 0.987$ . Полученные результаты представлены на рисунках 11 и 12. При воздействии на систему шума интенсивности  $\varepsilon = 10^{-4}$  траектории концентрируются вблизи детерминированной

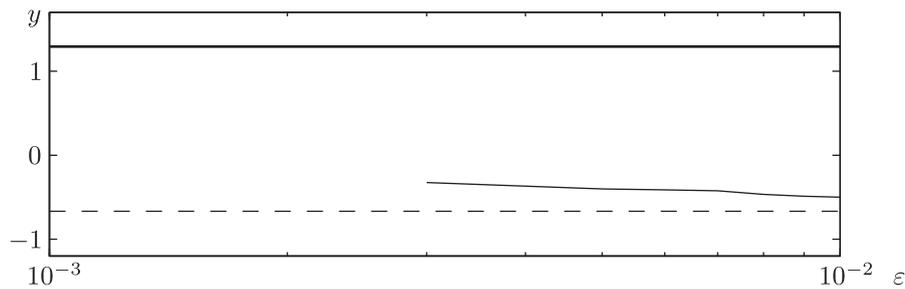


Рис. 10. Бифуркация расщепления стохастического цикла при  $a = 0.98$ : максимумы плотности распределения (сплошные линии), неустойчивое равновесие (пунктирные линии).

орбиты. При увеличении интенсивности шума ( $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ ) наблюдается появление нового пучка случайных траекторий, соответствующих колебаниям большой амплитуды.

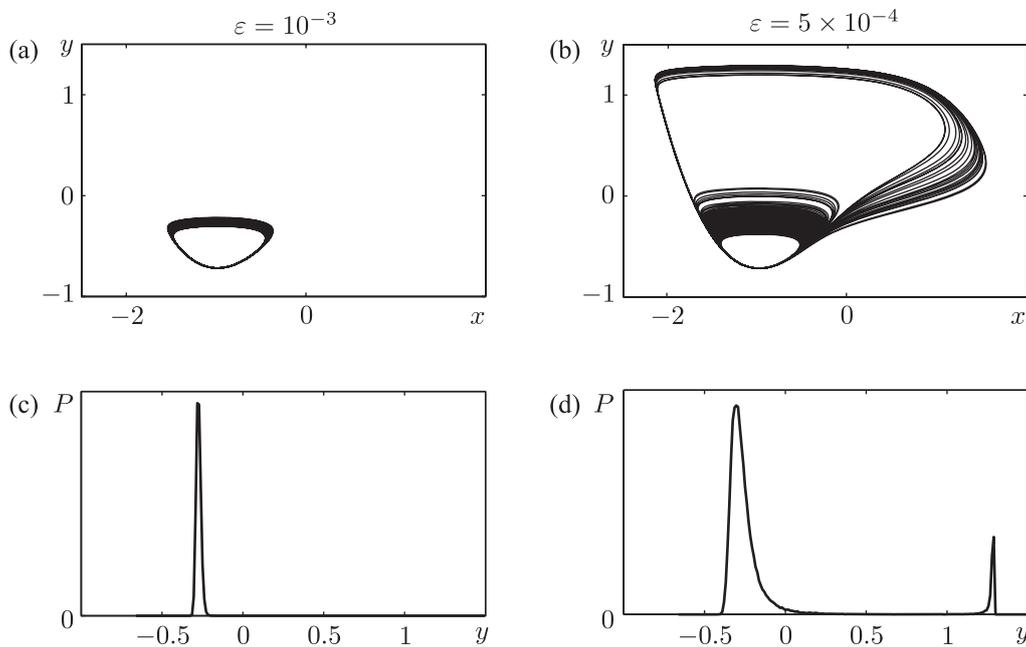


Рис. 11. Расщепление стохастического цикла при  $a = a_2 = 0.987$ . Сверху — случайные траектории, снизу — плотности распределения.

Бифуркационные диаграммы (рис. 10 и 12) позволяют оценить соответствующие критические значения интенсивности шумов. При  $a = 0.98$  имеем  $\varepsilon^* \approx 3 \times 10^{-3}$ , а при  $a_2 = 0.987$  получаем  $\varepsilon^* \approx 3 \times 10^{-4}$ .

### Заключение

Для модели Фицджеральда – Нагумо исследовано явление расщепления пучка стохастических траекторий, сопровождающееся перемежаемостью осцилляций больших и малых амплитуд. Этот эффект можно рассматривать как особый тип  $P$ -бифуркации [19, 20], связанной с качественным изменением формы плотности распределения случайных состояний стоха-

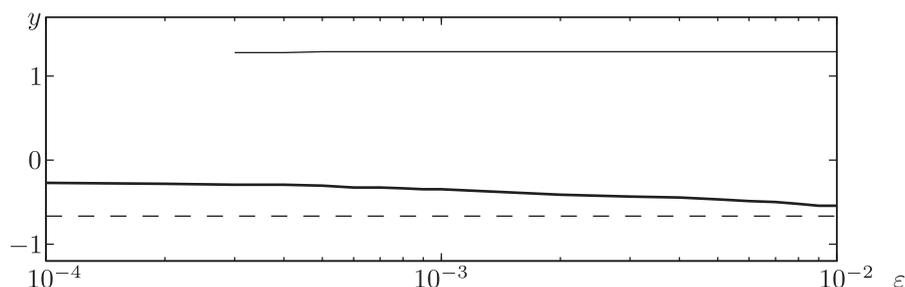


Рис. 12. Бифуркация расщепления стохастического цикла при  $a = 0.987$ : максимумы плотности распределения (сплошные линии), неустойчивое равновесие (пунктирные линии).

стического цикла. Действительно, при увеличении интенсивности шума графики плотности распределения из унимодальных трансформируются в бимодальные. Критическое значение шума, отвечающее началу такой трансформации, существенно зависит от стохастической чувствительности возмущаемого цикла. В работе с помощью техники функций стохастической чувствительности для модели ФН представлена методика поиска и анализа циклов, для которых  $P$ -бифуркация расщепления происходит уже при весьма малых шумах. Исследованное в работе для модели ФН явление расщепления стохастического цикла возможно и в других системах, где наблюдаются «циклы-утки». Так, например, подобное явление отмечено в работе [26], где изучалась популяционная модель «фитопланктон–зоопланктон».

## Приложение

Стандартной математической моделью систем со случайными возмущениями являются стохастические дифференциальные уравнения. Рассмотрим общую  $n$ -мерную стохастическую систему уравнений Ито [27]

$$dx = f(x) dt + \varepsilon \sigma(x) dw(t), \quad (2.2)$$

где  $x$  —  $n$ -вектор,  $w(t)$  —  $m$ -мерный стандартный винеровский процесс,  $f(x)$  и  $\sigma(x)$  — достаточно гладкие функции соответствующих размерностей,  $\varepsilon$  — параметр интенсивности возмущений.

Стохастическая система Фицью–Нагумо (2.1) является частным случаем системы (2.2) при  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,

$$f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta} \left( x - \frac{x^3}{3} - y \right) \\ x + a \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что соответствующая (2.2) детерминированная система ( $\varepsilon = 0$ ) имеет  $T$ -периодическое решение  $x = \xi(t)$ , задающее экспоненциально устойчивый предельный цикл  $\Gamma$ . В результате действия невырожденных шумов случайные траектории системы (2.2) покидают детерминированный цикл  $\Gamma$  и формируют вокруг него некоторый пучок. Детальное вероятностное описание случайных траекторий в этом пучке в терминах плотности распределения дается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [28].

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся режим, то можно ограничиться рассмотрением стационарной плотности распределения  $\rho(x, \varepsilon)$ , задаваемой стационарным уравнением ФПК. Непосредственное использование этого уравнения уже в двумерном случае весьма затруднительно, поэтому для аппроксимации стационарной плотности используются аппроксимации и асимптотики [14, 29, 30]. Для аппроксимации решений ФПК может быть использован известный метод квазипотенциала [31, 32] и техника функции стохастической чувствительности [23–25].

Пусть  $\Pi_t$  — гиперплоскость, ортогональная циклу в точке  $\xi(t)$ . В этом случае с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазипотенциала вблизи цикла для сечения Пуанкаре  $\Pi_t$  можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику

$$\rho_t(x, \varepsilon) = K \exp \left( - \frac{(x - \xi(t))^T W^+(t) (x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением  $m_t = \xi(t)$  и ковариационной матрицей  $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$ . Матрица  $W(t)$  — функция стохастической чувствительности цикла — является решением краевой задачи

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t), \quad W(t+T) = W(t), \quad W(t)r(t) = 0. \quad (2.3)$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^T(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)),$$

$$r(t) = f(\xi(t)), \quad P(t) = P_{r(t)}, \quad P_r = I - \frac{rr^T}{r^T r}.$$

Система (2.3), благодаря экспоненциальной устойчивости цикла, имеет единственное решение [24].

В случае цикла на плоскости ( $n = 2$ ) матрицы  $W(t)$  и  $P(t)$  имеют ранг, равный единице, и могут быть представлены в виде

$$W(t) = m(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^T(t).$$

Здесь  $p(t)$  — нормированный вектор, ортогональный касательному вектору  $f(\xi(t))$ , а  $m(t) > 0$  —  $T$ -периодическая скалярная функция, задающая дисперсию  $D(t) = \varepsilon^2 m(t)$  пучка случайных траекторий по нормали к циклу в точке  $\xi(t)$ .

Функция  $m(t)$  удовлетворяет [33] краевой задаче

$$\dot{m} = a(t)m + b(t), \quad m(0) = m(T)$$

с  $T$ -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^T(t)S(t)p(t).$$

Функция  $m(t)$  определяет локальную стохастическую чувствительность цикла в точке  $\xi(t)$ . Удобной характеристикой стохастического цикла в целом является коэффициент стохастической чувствительности  $M = \max_{(0,T)} m(t)$ .



## Список литературы

- [1] Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance // *Rev. Mod. Phys.*, 1998, vol. 70, no. 1, pp. 223–287.
- [2] McDonnell M.D., Stocks N.G., Pearce C.E.M., Abbott D. Stochastic resonance: From suprathreshold stochastic resonance to stochastic signal quantization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. 425 pp.
- [3] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. 544 с.
- [4] Horsthemke W., Lefever R. Noise-induced transitions: Theory and applications in physics, chemistry, and biology. (Springer Ser. Synergetics, vol. 15.) Berlin: Springer, 1984. 318 pp.
- [5] Berglund N., Gentz B. Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems: A sample-paths approach. Berlin: Springer, 2006. 289 pp.
- [6] Matsumoto K., Tsuda I. Noise-induced order // *J. Stat. Phys.*, 1983, vol. 33, no. 3, p. 757.
- [7] Gassmann F. Noise-induced chaos-order transitions // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, no. 3, pp. 2215–2221.
- [8] Gao J. B., Hwang S. K., Liu J. M. When can noise induce chaos? // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 82, no. 6, pp. 1132–1135.
- [9] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.*, 1961, vol. 1, pp. 445–466.
- [10] Izhikevich E. M. Dynamical systems in neuroscience: The geometry of excitability and bursting. Computational neuroscience. Cambridge: MIT Press, 2007. 441 pp.
- [11] Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // *Phys. Rep.*, 2004, vol. 392, pp. 321–424.
- [12] Treutlein H., Schulten K. Noise-induced neural impulses // *Eur. Biophys. J.*, 1986, vol. 13, pp. 355–356.
- [13] Pikovsky A. S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, no. 5, pp. 775–778.
- [14] Lindner B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E*, 1999, vol. 60, no. 6, pp. 7270–7276.
- [15] Makarov V. A., Nekorkin V. I., Velarde M. G. Spiking behavior in a noise-driven system combining oscillatory and excitatory properties // *Phys. Rev. Lett.*, 2001, vol. 86, no. 15, pp. 3431–3434.
- [16] Lacasta A. M., Sagues F., Sancho J. M. Coherence and anticoherence resonance tuned by noise // *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, no. 4, 045105(R), 4 pp.
- [17] DeVille R. E. L., Vanden-Eijnden E., Wavetrain response of an excitable medium to local stochastic forcing // *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 72, no. 3, 031105, 10 pp.
- [18] Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh–Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique // *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 83, no. 6, 061109, 8 pp.
- [19] Arnold L. Random dynamical systems. Berlin: Springer, 1998. 586 pp.
- [20] Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С. Стохастические бифуркации // *ПНД*, 2009, т. 17, № 5, с. 3–16.
- [21] Diener F., Diener M. Chasse au canard: 1. Les canards // *Collect. Math.*, 1981, vol. 32, no. 1, pp. 37–119.
- [22] Berglund N., Gentz B., Kuehn C. Hunting french ducks in a noisy environment // *J. Differential Equations*, 2012, vol. 252, no. 9, pp. 4786–4841.
- [23] Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // *ПНД*, 2001, т. 9, № 6, с. 104–113.
- [24] Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Math. Comput. Simulation*, 2004, vol. 66, pp. 55–67.

- [25] Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // *Chaos*, 2011, vol. 21, no. 4, 047514, 4 pp.
- [26] Ryashko L., Bashkirtseva I. Analysis of stochastic attractors for population dynamical systems with environmental noise // *Neural Parallel Sci. Comput.*, 2010, vol. 18, nos. 3–4, pp. 433–440.
- [27] Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.
- [28] Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. Москва: Мир, 1986. 528 с.
- [29] Kurrer C., Schulten K. Effect of noise and perturbations on limit cycle systems // *Phys. D*, 1991, vol. 50, no. 3, pp. 311–320.
- [30] Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // *ПММ*, 1995, т. 59, № 1, с. 53–63.
- [31] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. Москва: Наука, 1979. 424 с.
- [32] Dembo M., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995. 346 pp.
- [33] Башкирцева И. А., Перевалова Т. В. Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя–цикл // *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 10, с. 53–69.

### Splitting bifurcation of stochastic cycles in the FitzHugh – Nagumo model

Irina A. Bashkirtseva<sup>1</sup>, Lev B. Ryashko<sup>2</sup>, Evdokia S. Slepukhina<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Ural Federal University

Lenina 51, Ekaterinburg, 620083, Russia

<sup>1</sup>[irina.bashkirtseva@usu.ru](mailto:irina.bashkirtseva@usu.ru), <sup>2</sup>[lev.ryashko@usu.ru](mailto:lev.ryashko@usu.ru), <sup>3</sup>[eudokiya@yandex.ru](mailto:eudokiya@yandex.ru)

We study the stochastic dynamics of FitzHugh–Nagumo model in the zone of limit cycles. For weak noise, random trajectories are concentrated in a small neighborhood of the initial deterministic unperturbed orbit of the limit cycle. As noise increases, in the zone of Canard cycles of the FitzHugh–Nagumo model, the bundle of random trajectories begins to split into two parts. This phenomenon is investigated using the density distribution of random trajectories. It is shown that the threshold noise intensity corresponding to the splitting bifurcation depends essentially on the degree of the stochastic sensitivity of the cycle. Using the stochastic sensitivity functions technique, a critical value corresponding to the supersensitive cycle is found and comparative parametric analysis of the effect of the stochastic cycle splitting in the vicinity of the critical value is carried out.

MSC 2010: 37H20, 60H10

Keywords: FitzHugh–Nagumo model, stochastic sensitivity, cycles, splitting bifurcation

Received February 18, 2013, accepted May 15, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 295–307 (Russian)

