Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 3. С. 459–478.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.9
MSC 2010: 34C14

Замечания об интегрируемых системах

В. В. Козлов

Обсуждается задача об условиях интегрируемости систем дифференциальных уравнений. Обобщаются классические результаты Дарбу об интегрируемости линейных неавтономных систем с неполным набором частных решений. Особое внимание уделяется линейным гамильтоновым системам. Обсуждается общая задача об интегрируемости автономных систем дифференциальных уравнений в n-мерном фазовом пространстве, допускающих алгебру полей симметрий размерности $\geqslant n$. С помощью одного приема Лиувилля эта задача сводится к исследованию условий интегрируемости гамильтоновых систем с линейными по импульсам гамильтонианами в фазовом пространстве вдвое большей размерности. В заключение доказывается интегрируемость автономной системы в трехмерном пространстве с двумя независимыми нетривиальными полями симметрий. Следует подчеркнуть, что при этом никаких дополнительных условий на эти поля не накладывается.

Ключевые слова: интегрируемость в квадратурах, сопряженная система, уравнения Гамильтона, теорема Эйлера – Якоби, теорема Ли, симметрии

1. Введение

Мы будем обсуждать задачу об интегрировании в квадратурах систем дифференциальных уравнений. Интегрирование в квадратурах означает предъявление алгоритма из конечного числа операций, позволяющего найти все решения уравнения. В число разрешенных операций включаются все алгебраические операции над функциями, простые квадратуры (вычисление интегралов от функций одного переменного), а также эффективное использование теоремы о неявных функциях.

Этот круг вопросов естественным образом примыкает к дифференциальной алгебре — аналогу теории Галуа для дифференциальных уравнений (см., например, [1]). В связи с этим замечанием упомянем классический результат Лиувилля: линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = tx$$

Получено 2 сентября 2013 года
После доработки 23 сентября 2013 года

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

не интегрируется в квадратурах. Более точно, его решения не лежат ни в каком из полей, которые можно получить из поля рациональных функций времени t последовательностью конечных алгебраических расширений, присоединением интегралов и присоединений экспонент интегралов.

Что касается методов точного интегрирования общих нелинейных систем, то здесь основополагающими результатами служат теорема Эйлера–Якоби об интегрирующем множителе и теорема Ли о разрешимой алгебре симметрий. В работе [2] предложена общая теория, соединяющая оба эти подхода. Различные аспекты теории интегрирования в квадратурах обсуждаются в книгах [3, 4].

Теоремы Эйлера–Якоби и Ли — это фундамент классических механизмов точного интегрирования дифференциальных уравнений? В статье предложены новые конструкции, позволяющие сводить задачу точного интегрирования к этим стандартным механизмам. В основе нашего подхода лежат две идеи: это интерпретация частных решений и полей симметрий как первых интегралов (законов сохранения) некоторой динамической системы, которую полезно изучать с точки зрения интегрирования исходных дифференциальных уравнений.

В §§2 и 3 рассматривается следующая задача. Предположим, что известны $k < n$ линейно независимых решений линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Спрашивается, при каких условиях можно найти с помощью квадратур остальные $n-k$ линейно независимых решений? Ясно, что ответ на этот вопрос кроме всего прочего зависит от структуры исходной системы (1.1), а также от свойств известных решений. Дифференциально-алгебраический аспект этой задачи состоит в следующем: лежат ли решения заданного линейного дифференциального уравнения n-го порядка в конечном расширении поля функций, порожденного коэффициентами этого уравнения, а также $k < n$ известными его решениями.

Эта задача восходит к Дарбу, рассматривавшему случай, когда $n = 3$ и оператор A кососимметрический [5]. Дарбу показал, что если известно только одно нетривиальное (ненулевое) решение линейного уравнения (1.1), то остальные два линейно независимых решения находятся с помощью квадратур. Дарбу связал эту задачу с уравнением Риккати, а также с теорией ангармонических отношений. Мы дополняем и развиваем классические идеи Дарбу, уделяя особое внимание линейным гамильтоновым системам.

В §§4 и 5 обсуждается общая задача об интегрируемости автономных систем дифференциальных уравнений, допускающих набор полей симметрий. С помощью одного старого приема Лиувилля мы сводим эту задачу к исследованию интегрируемости гамильтоновых систем с линейными по импульсам гамильтонианами в расширенном фазовом пространстве вдвое большей размерности. В частности, оказывается, что если исходная система допускает «полную» абелеву группу симметрий, то ее явное интегрирование можно вывести из классического метода Гамильтона–Якоби. В §5 указаны новые условия интегрируемости систем дифференциальных уравнений общего вида, основанные на применении условий некоммутативной интегрируемости гамильтоновых систем (восходящих к В. А. Стеклову).

В §6 исследуются условия интегрируемости систем с «избыточным» набором нетривиальных полей симметрий (их число совпадает с размерностью фазового пространства). Для таких систем в явном виде указан интегральный инвариант, играющий существенную роль в задаче точного интегрирования (он используется и в построениях §7). Прием Лиувилля позволяет свести задачу интегрирования таких систем к продвинутой теории инвариантных многообразий, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство («общая теория вихрей» [6]).

В § 7 рассматриваются динамические системы на трехмерных многообразиях. Показана возможность точного интегрирования таких систем при условии существования двух полей симметрий, которые вместе с исходным векторным полем линейно независимы во всех точках фазового пространства. Подчеркнем, что при этом никаких дополнительных условий на эти поля не накладывается. В частности, порождаемая ими алгебра векторных полей симметрий может оказаться бесконечномерной.

Наконец, в § 8 рассматривается задача об условиях интегрируемости неавтономных систем дифференциальных уравнений. Роль полей симметрий играют векторные поля, вмороженные в поток исходной системы. Они удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, хорошо известным в гидродинамике идеальной жидкости.

2. Самосопряженные системы

Сначала напомним известный результат о свойствах сопряженного уравнения

$$\dot{y} = -A^{\mathrm{T}}(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

восходящий к Лагранжу. Если

$$t \mapsto x(t), \quad t \mapsto y(t)$$

— решения уравнений (1.1) и (2.1) соответственно, то

$$(y, x) = c = \mathrm{const}. \tag{2.2}$$

Здесь (,) обозначает спаривание: значение ковектора на векторе (и наоборот).

Таким образом, если

$$\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$$

— набор линейно независимых решений сопряженной системы, то решения исходной системы (1.1) найдутся из линейных алгебраических соотношений

$$(\eta_1, x) = c_1, \ \ldots, \ (\eta_n, x) = c_n.$$

В частности, линейная система интегрируется одновременно со своей сопряженной системой.

Теорема 1. *Пусть*

$$\mathrm{tr}\, A = 0 \tag{2.3}$$

и известны $n-1$ линейно независимых решений системы (1.1)*. Тогда оставшееся решение системы* (1.1) *находится с помощью квадратур.*

Ясно, что сопряженная система (2.1) также удовлетворяет условию (2.3). Это условие означает, что поток системы (1.1) (как и системы (2.1)) сохраняет стандартную меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, из (2.3) вытекает наличие дополнительного тензорного инварианта — n-формы объема

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\xi_1(t), \ldots, \xi_{n-1}(t)$$

— известные линейно независимые решения системы (1.1). Тогда сопряженная система допускает $n-1$ функционально независмых первых интегралов

$$(y, \xi_1), \ldots, (y, \xi_{n-1}). \tag{2.4}$$

Расширим теперь сопряженную систему (2.1) до автономной системы дифференциальных уравнений в $(n+1)$-мерном пространстве:

$$\dot{y} = -A^{\mathrm{T}}(t)y, \quad \dot{t} = 1. \tag{2.5}$$

Эта динамическая система нелинейная, но (ввиду условия (2.3)) ее фазовый поток допускает интегральный инвариант — $(n+1)$-форму объема

$$dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \wedge dt.$$

Кроме этого, динамическая система (2.5) в $\mathbb{R}^{n+1}$ допускает $n-1$ независимых первых интегралов (2.4). Следовательно, по теореме Эйлера–Якоби (см., например, [7, гл. X]), сопряженная система интегрируется в квадратурах. Но тогда и исходная система (1.1) также интегрируется в квадратурах. Что и требовалось.

Для самосопряженных линейных систем (когда $A^{\mathrm{T}} = -A$) можно пойти еще дальше. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $A^{\mathrm{T}}(t) = -A(t)$ для всех значений t и известны $n-2$ линейно независимых решений системы* (1.1)*. Тогда оставшиеся два линейно независимые решения системы* (1.1) *находятся квадратурами.*

Действительно, самосопряженные системы, очевидно, обладают свойством (2.3). Кроме того, система (1.1) имеет дополнительный квадратичный первый интеграл

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{2.6}$$

Остается воспользоваться редукцией к автономному случаю и снова применить теорему Эйлера–Якоби.

При $n = 3$ теорема 2 содержит как частный случай классический результат Дарбу. Похоже, сам Дарбу не связывал свою теорему с теорией интегрирующего множителя Эйлера–Якоби.

Наличие положительно определенного квадратичного интеграла (2.6) — критерий самосопряженности линейной системы (1.1). Теорема 2 имеет место и для более общих линейных систем, допускающих независимый от времени первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы

$$f = \frac{1}{2}(Bx, x), \quad |B| \neq 0. \tag{2.7}$$

Собственно, надо показать, что и в этом случае линейная система (1.1), — бездивергентная. Действительно, поскольку (2.7) — первый интеграл и симметрический оператор B не зависит от времени, то

$$BA + A^{\mathrm{T}}B = 0. \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$A^{\mathrm{T}} = -BAB^{-1}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} = -\operatorname{tr}\left(BAB^{-1}\right) = -\operatorname{tr}\left(AB^{-1}B\right) = -\operatorname{tr} A,$$

откуда получаем $\operatorname{tr} A = 0$. Что и требовалось.

В этом случае система (1.1) будет самосопряженной относительно метрики в $\mathbb{R}^n$ (в общем случае псевдоевклидовой), которая задается квадратичной формой (2.7). Покажем, что невырожденную линейную систему (1.1) ($|A(t)| \neq 0$) можно представить в «гамильтоновой» форме

$$\Omega \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2.9}$$

где $\Omega = BA^{-1}$ — невырожденный кососимметрический оператор (зависящий от времени), а «гамильтониан» f задается формулой (2.7). Неочевидным здесь является кососимметричность оператора Ω, вытекающая из равенства (2.8). Действительно, из (2.8) имеем:

$$B^{-1}(A^{\mathrm{T}})^{-1} = -A^{-1}B^{-1}.$$

Следовательно,

$$\Omega^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}B = -\left(BA^{-1}B^{-1}\right)B = -\Omega.$$

Симплектическая структура задается невырожденной кососимметрической матрицей Ω, которая в общем случае зависит от времени. Поэтому система (2.9) будет гамильтоновой в обычном смысле, если исходная линейная система (1.1) автономная.

Из (2.9) выводится (как и в гамильтоновом случае), что f — первый интеграл. Действительно, умножая обе части (2.9) на $\dot{x}$, получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \dot{x}\right) = (\Omega \dot{x}, \dot{x}) = 0.$$

3. Гамильтоновы системы

Рассмотрим теперь линейную гамильтонову систему

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$
$$H = \frac{1}{2}(Ax, x) + (Bx, y) + \frac{1}{2}(Cy, y),$$

операторы A и C симметрические; A, B и C известным образом зависят от t. Положим

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь E_n — единичная матрица n-го порядка. Тогда систему (3.1) можно представить в более компактном виде:

$$J\dot{z} = -Wz = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad H = \frac{1}{2}(Wz, z). \tag{3.2}$$

Так как $J^2 = -E_{2n}$, то

$$\dot{z} = JWz.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{u} = WJu. \tag{3.3}$$

Если положить $v = Ju$, то сопряженная система (3.3) примет исходный гамильтонов вид:

$$J\dot{v} = -Wv.$$

Следовательно, согласно Лагранжу, если $u(t)$ — решение системы (3.3), то гамильтонова система (3.2) допускает линейный интеграл

$$(u(t), z) = (v(t), Jz) = \mathrm{const}.$$

В исходных канонических переменных получаем следующее утверждение Пуанкаре: если $x = a(t)$, $y = b(t)$ — решение линейных уравнений Гамильтона (3.1), то эта система допускает линейный первый интеграл

$$f = (y, a(t)) - (x, b(t)).$$

Кстати сказать, систему уравнений (1.1) и (2.1) можно представить в каноническом виде (3.1), если положить

$$H = (Ax, y).$$

Пусть $a_1(t)$ и $b_1(t)$ — еще одно решение уравнений (3.1). Тогда эти уравнения допускают еще один линейный интеграл

$$f_1 = (y, a_1(t)) - (x, b_1(t)).$$

Их скобка Пуассона

$$\{f, f_1\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \right)$$

равна константе

$$(a, b_1) - (a_1, b).$$

Теорема 3. *Предположим, что известны n линейно независимых решений гамильтоновой системы* (3.1)

$$x = a_i(t), \quad y = b_i(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

причем все числа

$$\lambda_{ij} = (a_i, b_j) - (a_j, b_i) \tag{3.4}$$

равны нулю. Тогда линейная система дифференциальных уравнений (3.1) *интегрируется в квадратурах.*

Это утверждение — простое следствие классической теоремы Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем: n линейных функций

$$(y, a_i) - (x, b_i)$$

— первые интегралы, которые функционально независимы и находятся попарно в инволюции.

Явное интегрирование линейных уравнений (3.1) в условиях теоремы 3 (как, собственно, и доказательство теоремы Лиувилля) можно осуществить методом Гамильтона–Якоби. Продемонстрируем это на примере неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы ($n = 1$) и гамильтонианом

$$H = \frac{y^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}.$$

Здесь ω — не обращающаяся в нуль функция времени. Предположим, что известно одно из решений этой системы:

$$y = a(t), \quad x = b(t). \tag{3.5}$$

Функции a и b удовлетворяют соотношениям

$$\dot{b} = a, \quad \dot{a} = -\omega^2 b.$$

Уравнения Гамильтона допускают первый интеграл

$$yb - xa = c \ (= \mathrm{const}).$$

Будем считать, что $b \neq 0$. Тогда

$$y = \frac{a}{b}\, x + \frac{c}{b}. \tag{3.6}$$

Согласно методу Гамильтона–Якоби, следует найти функцию $S(t, x, c)$ (c — параметр), которая удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

где импульс y и гамильтониан H представляются как функции x и t с помощью соотношения (3.6). Опуская элементарные вычисления, получаем

$$S = \frac{a}{2b}\, x^2 + \frac{c}{b}\, x - \frac{c^2}{2} \int \frac{dt}{b^2(t)}.$$

По теореме Якоби координата x находится из соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial c} = d,$$

где d — некоторая постоянная. Следовательно,

$$x = db + bc \int \frac{dt}{b^2(t)}, \quad y = \frac{c}{b} + da + ac \int \frac{dt}{b^2(t)}.$$

Коэффициенты при новом параметре d дают уже заранее известное решение уравнений Гамильтона, поэтому новое решение можно представить формулами

$$x(t) = b \int \frac{dt}{b^2}, \quad y(t) = \frac{1}{b} + a \int \frac{dt}{b^2}.$$

Этим формулам можно придать смысл и в том случае, когда в некоторый момент $t = \tau$ функция $b(t)$ обращается в нуль. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, имеем:

$$\lim_{t \to \tau} x(t) = -\frac{1}{a(\tau)}, \quad \lim_{t \to \tau} y(t) = 0.$$

Ясно, что $a(\tau) \neq 0$, иначе решение (3.5) вырождалось бы в тривиальное равновесие.

Теорему 3 можно обобщить. Предположим, что известны $k \geqslant n$ линейно независимых решений $x = a_i(t)$, $y = b_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ линейной гамильтоновой системы (3.1). Введем в рассмотрение матрицу $k \times k$

$$\Lambda = \|\lambda_{ij}\|,$$

составленную из чисел (3.4). Это кососимметрическая матрица, и поэтому ее ранг четное число; обозначим его $2s$. В симплектической геометрии хорошо известно неравенство

$$n + s \geqslant k.$$

Теорема 4. *Если*

$$n + s = k, \tag{3.7}$$

то линейные уравнения Гамильтона (3.1) *интегрируются в квадратурах.*

При $s = 0$ $(k = n)$ получаем теорему 3. Равенство (3.7) известно как условие некоммутативной интегрируемости гамильтоновых систем: гамильтонова система допускает $k \geqslant n$ функционально независимых первых интегралов, однако не все они попарно в инволюции. Обычно рассматривают автономные гамильтоновы системы. Однако любую неавтономную гамильтонову систему можно сделать автономной, увеличивая число степеней свободы на единицу. При этом количество первых интегралов также увеличивается на единицу без увеличения ранга матрицы их скобок Пуассона. Существенное условие применимости теории некоммутативной интегрируемости состоит в том, чтобы скобка Пуассона любой пары интегралов была функцией от всех первых интегралов. В нашем случае это условие выполнено автоматически, поскольку все скобки Пуассона — константы во всем фазовом пространстве.

Теорию некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем принято связывать с работами [8] и [9], в которых акцент сделан на изучение топологии совместных уровней всех первых интегралов и строения их фазовых потоков. Интегрируемость в квадратурах была позже установлена А. В. Браиловым [10] сведением к известной теореме Ли об интегрируемости динамических систем с полной абелевой группой симметрий. В действительности общие идеи теории некоммутативного интегрирования фактически содержатся в работах С. Ли (и затем Э. Картана) и в явном виде сформулированы В. А. Стекловым в краткой заметке [11]. Исторический комментарий можно найти в работе [12], где изложен вариант расширения классического метода Гамильтона–Якоби, который может быть полезен для целей явного интегрирования линейных уравнений Гамильтона в условиях теоремы 4.

4. Интегрирование систем с абелевой группой симметрий и метод Гамильтона–Якоби

Теорему Лиувилля об интегрируемости в квадратурах гамильтоновых систем с полным набором инволютивных интегралов принято доказывать методом Гамильтона–Якоби (см., например, [7]). Однако можно поступить по-другому, применив известную теорему Ли к ограничению гамильтоновых систем на многообразия уровня известных первых интегралов. Так же доказывается и более общая теорема о некоммутативном интегрировании гамильтоновых систем (см. [10]). Напомним формулировку теоремы Ли, ограничившись ее локальным аспектом.

Пусть в некоторой области $\mathbb{R}^n = \{x\}$ имеется n векторных полей $v_1, \ldots, v_n$, которые

- линейно независимы в каждой точке области,
- попарно коммутируют между собой (то есть $[v_i, v_j] = 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$).

Тогда каждое из дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v_i(x)$$

интегрируется в квадратурах.

Оказывается, саму теорему Ли можно доказать методом Гамильтона – Якоби. На первый взгляд это кажется удивительным (и даже парадоксальным), поскольку в формулировке теоремы Ли ни слова не говорится о симплектических структурах и об уравнениях Гамильтона.

Наше доказательство использует одно давнее наблюдение Лиувилля: любую систему дифференциальных уравнений всегда можно рассматривать как половину некоторой гамильтоновой системы в фазовом пространстве удвоенной размерности. Действительно, рассмотрим динамическую систему общего вида

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M. \tag{4.1}$$

Введем пространство кокасательного расслоения $\Gamma = T^*M$ со стандартной симплектической структурой (элементы $T^*_x M$ — это ковекторы y в точке x) и функцию Гамильтона

$$H = (y, v(x)) \tag{4.2}$$

— значение ковектора y на векторе v. Первое из дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

совпадает с (4.1), а второе

$$\dot{y} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} y$$

есть сопряженное к (4.1) уравнение в вариациях. Согласно общему наблюдению Лагранжа, спаривание (4.2) есть первый интеграл уравнений Гамильтона (что, конечно, и так ясно).

Теперь векторным полям $v_1, \ldots, v_n$ ставим в соответствие линейные по импульсам функции

$$F_1 = H = (y, v_1), \ \ldots, \ F_n = (y, v_n). \tag{4.3}$$

Легко проверяется следующее равенство для скобок Пуассона:

$$\{F_i, F_j\} = (y, [v_i, v_j]).$$

Следовательно, функции (4.3) находятся в инволюции и функционально независимы:

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0 \tag{4.4}$$

ввиду предположения о линейной независимости векторов $v_1, \ldots, v_n$.

После этого можно воспользоваться доказательством теоремы Лиувилля, которое опирается на метод Гамильтона – Якоби. Чтобы найти полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}, v_1\right) = 0, \tag{4.5}$$

надо приравнять функции (4.3) произвольным постоянным

$$(y, v_1) = c_1,\ \ldots,\ (y, v_n) = c_n,$$

выразить отсюда импульсы y как функции от x и c и рассмотреть дифференциальную 1-форму

$$\sum \widehat{y}_i\,dx_i - \widehat{H}\,dt. \tag{4.6}$$

Крышка обозначает результат подстановки; ясно, что $\widehat{H} = c_1$. Ввиду свойства инволюции функций (4.3) 1-форма (4.6) замкнута: локально это полный дифференциал некоторой функции от x и t (а также параметров $c = (c_1, \ldots, c_n)$)

$$S(x, t, c). \tag{4.7}$$

Чтобы ее найти, достаточно n простых квадратур. Функция (4.7) — полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби (4.5), поскольку

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial c}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|, \tag{4.8}$$

что отлично от нуля согласно (4.4).

Функция (4.7) имеет следующий вид:

$$S = \sum s_j(x)c_j - c_1 t,$$

где $s_1, \ldots, s_n$ выражаются с помощью алгебраических операций и квадратур через компоненты векторных полей $v_1, \ldots, v_n$. Следовательно, по теореме Якоби, координаты x как функции t (то есть решения исходной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = v_1(x)$) находятся из следующей алгебраической системы

$$s_1(x) - t = d_1, \quad s_2(x) = d_2, \ldots, s_n(x) = d_n, \tag{4.9}$$

где $d_1, \ldots, d_n$ — произвольные постоянные. Согласно (4.8) эту систему можно обратить и представить координаты x как функции времени и произвольных постоянных $d_1, \ldots, d_n$. Что и требовалось.

Это доказательство полезно сравнить с оригинальным доказательством С. Ли (см., например, [3, 13]). Оно только по форме отличается от нашего доказательства. Во всяком случае, Ли также выводит равенства (4.9), но другим способом. Отметим еще, что замена переменных

$$z_1 = s_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ z_n = s_n(x_1, \ldots, x_n)$$

выпрямляет траектории: в новых переменных уравнения принимают совсем простой вид

$$\dot{z}_1 = 1, \quad \dot{z}_2 = \ldots = \dot{z}_n = 0.$$

Кстати сказать, Софус Ли в своих оригинальных работах тоже использовал теорию гамильтоновых систем и скобок Пуассона для доказательства некоторых фактов, которые на первый взгляд с этим не связаны. Именно на идее «гамильтонизации» основано его собственное доказательство фундаментальной теоремы о том, что любой абстрактной алгебре Ли соответствует некоторая локальная группа Ли.

5. Условия интегрируемости дифференциальных уравнений с избыточной некоммутативной группой симметрий

Приведенное в § 4 доказательство теоремы Ли подсказывает путь ее обобщения. Пусть задана автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u(x), \quad x \in M. \tag{5.1}$$

Фазовые потоки векторных полей, коммутирующих с полем u, являются однопараметрическими группами симметрий: каждое такое преобразование переводит решение системы (5.1) в решение той же системы.

Рассмотрим набор векторных полей

$$v_1\,(= u), v_2, \ldots, v_m, \tag{5.2}$$

который порождает алгебру Ли $\mathcal{G}$ относительно операции коммутирования:

$$[v_i, v_j] = \sum c_{ij}^k v_k, \quad c_{ij}^k = \mathrm{const}.$$

Будем считать, что поля $v_2, \ldots, v_m$ — это поля симметрий для системы (5.1):

$$[v_1, v_i] = 0, \quad i \geqslant 1.$$

Определим теперь размерность ($\dim \mathcal{G}$) и ранг ($\operatorname{rank} \mathcal{G}$) алгебры $\mathcal{G}$.

Вначале сопоставим векторным полям (5.2) набор линейных по импульсам функций

$$F_1 = (y, v_1), \ \ldots, \ F_m = (y, v_m), \tag{5.3}$$

определенных в расширенном фазовом пространстве $\Gamma = T^*M$. Линейные комбинации этих функций порождают конечномерную алгебру Ли относительно скобки Пуассона, изоморфную, очевидно, алгебре $\mathcal{G}$.

Под размерностью алгебры $\mathcal{G}$ будем понимать максимальный ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n)}.$$

Ранг этой матрицы, вообще говоря, зависит от точки расширенного фазового пространства, и почти всюду ее ранг максимален. Без ущерба для общности можно считать, что

$$\dim \mathcal{G} = m. \tag{5.4}$$

Другими словами, функции (5.3) составляют функционально независимый набор.

Так определенную размерность можно назвать функциональной. Можно было бы ввести «алгебраическую» размерность алгебры $\mathcal{G}$ как максимальное число ее линейно независимых элементов (5.3). Эта величина равна размерности пространства линейных комбинаций векторных полей (5.2) (стоит помнить, что линейно независимые векторные поля могут быть линейно зависимыми во всех точках M). Алгебраическая размерность всегда не меньше функциональной размерности; но эти числа могут и не совпадать.

Ранг алгебры $\mathcal{G}$ — это максимальный ранг кососимметрической матрицы скобок Пуассона функций (5.3):

$$\operatorname{rank} \mathcal{G} = \max_{x,y} \operatorname{rank} \|\{F_i, F_j\}\|.$$

Скобки $\{F_i, F_j\}$ линейно выражаются через значения функций (5.3). Этот ранг максимален при почти всех значениях $F_1, \ldots, F_m$. Ранг всегда четен; положим $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 2s$.

Теорема 5. *Если*

$$\dim \mathcal{G} = \dim M + \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}\,\mathcal{G}, \tag{5.5}$$

то дифференциальное уравнение (5.1) *интегрируется в квадратурах.*

Если выполнено (5.4), то условие (5.5) принимает вид $m = n + s$. Теорема 5 просто выводится из теории некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем с использованием конструкции из § 4. Если алгебра векторных полей симметрий абелева ($\mathrm{rank}\,\mathcal{G} = 0$), то теорема 5 переходит в классическую теорему С. Ли.

Приведем простой иллюстративный пример. Пусть $M = \mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x_1, x_2, x_3. Введем четыре векторных поля $u = v_1, v_2, v_3, v_4$, которые определяются дифференциальными операторами

$$\begin{gathered} L_1 = x_1 g\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 g\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 g\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad L_2 = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ L_3 = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad L_4 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Здесь g — произвольная ненулевая функция от расстояния $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Отметим, что векторные поля v_2, v_3, v_4 линейно зависимы в каждой точке, но ни одна их нетривиальная линейная комбинация с постоянными коэффициентами не дает тождественный нуль.

Ясно, что

$$[v_1, v_j] = 0 \ \ (j \geqslant 1), \quad [v_2, v_3] = v_4, \quad [v_3, v_4] = v_2, \quad [v_4, v_2] = v_3.$$

Легко проверяется, что $\dim \mathcal{G} = 4$, а $\mathrm{rank}\,\mathcal{G} = 2$. Следовательно, условие (5.5) выполняется, что влечет интегрируемость в квадратурах уравнения

$$\dot{x} = gx, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Впрочем, это очевидно с самого начала.

Подчеркнем, что по теореме 5 интегрирование системы дифференциальных уравнений (5.1), заданной на n-мерном многообразии M, на самом деле проводится в $2n$-мерном расширенном фазовом пространстве $\Gamma = T^*M$. Покажем, как это делается в только что рассмотренном примере. Сопоставим векторным полям (5.6) четыре функции

$$F_1 = g\sum x_i y_i, \quad F_2 = x_3 y_2 - x_2 y_3, \quad F_3 = x_1 y_3 - x_3 y_1, \quad F_4 = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Ясно, что три функции

$$F_1, \ F_2 \text{ и } F = F_2^2 + F_3^2 + F_4^2$$

независимы в шестимерном фазовом пространстве и находятся попарно в инволюции. Следовательно (по теореме Лиувилля), дифференциальные уравнения Гамильтона с гамильтонианом F_1 интегрируются в квадратурах. Но функции F уже нельзя сопоставить векторное поле на $M = \mathbb{R}^3$, поскольку она квадратична по импульсам.

Дополним теорему 5 одним утверждением, которое выводится из теоремы Эйлера–Якоби об интегрирующем множителе. Снова рассмотрим набор векторых полей (5.2) с условием коммутирования

$$[v_1, v_j] = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Но здесь уже не предполагается, что эти поля порождают алгебру Ли. Поставим им в соответствие линейные по импульсам функции (5.3) и будем считать их функционально независимыми:

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x, y)} = m.$$

Теорема 6. *Если $m = 2n - 2$, то система дифференциальных уравнений* (5.1) *интегрируется в квадратурах.*

Если $n = 2$, то $m = 2$. В этом случае теорема 6 переходит в классическую теорему Ли. Если $n = 3$, то для интегрирования в квадратурах достаточно трех «нетривиальных» полей симметрий (как в рассмотренном примере (5.6), но только эти поля не обязаны порождать трехмерную алгебру Ли).

Теорема 6 доказывается совсем просто. Гамильтонова система с гамильтонианом $F_1 = (y, u)$ допускает $m = 2n - 2$ функционально независимых первых интегралов $F_1, \ldots, F_m$ и ее фазовый поток сохраняет стандартную форму объема в $2n$-мерном фазовом пространстве.

6. Системы с избыточным набором симметрий и общая теория вихрей

Пусть снова M — n-мерное многообразие с локальными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Предположим, что динамическая система

$$\dot{x} = u(x), \quad x \in M, \tag{6.1}$$

допускает n полей симметрий

$$v_1, \ldots, v_n, \tag{6.2}$$

которые линейно независимы в каждой точке $x \in M$: $[u, v_i] = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Само поле u порождает тривиальную группу симметрий — семейство сдвигов вдоль траекторий системы (6.1). Так что мы рассматриваем простейший вариант системы с «избыточными» симметриями.

Так как векторы (6.2) линейно независимы во всех точках, то мы имеем однозначное представление

$$u = \sum \lambda_i v_i, \tag{6.3}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — гладкие функции от x. Введем еще элемент объема (меру) $d\mu$ на M, положив

$$d\mu = |V|^{-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \tag{6.4}$$

где столбцы (или строки) $n \times n$-матрицы V составлены из компонент векторов (6.2).

Теорема 7. *Функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из* (6.3) *постоянны на траекториях системы* (6.1), *а* (6.4) *— интегральный инвариант этой системы.*

Ясно, что инвариантная мера (6.4) корректно определена в области фазового пространства M, где векторы (6.2) линейно независимы. Что касается функций

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \tag{6.5}$$

то часть из них (или даже все они) могут оказаться постоянными. Тогда они бесполезны для целей интегрирования исходной системы (6.1). Во всяком случае, если поле u не имеет нулей, то среди функций (6.5) может быть только $n-1$ независимых.

Приведем пример, показывающий возможность существования ровно $n-1$ функционально независимых коэффициентов из набора (6.5). Пусть $M = \mathbb{R}^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$; предположим, что поле u задается дифференциальным оператором

$$\frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{6.6}$$

Пусть полям (6.2) соответствуют дифференциальные операторы

$$e^{-x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + e^{-x_2-x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad -e^{-2x_3}\frac{\partial}{\partial x_2} + e^{-x_3-x_4}\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad -e^{-2x_4}\frac{\partial}{\partial x_3} + e^{-x_4-x_5}\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \ldots,$$
$$-e^{-2x_n}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + e^{-x_n-x_2}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad -e^{-2x_2}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

При $n > 1$ все эти операторы коммутируют с оператором (6.6), поэтому они порождают поля симметрий. При этом

$$\lambda_1 = e^{x_2},\ \lambda_2 = e^{x_3}, \ldots, \lambda_{n-1} = e^{x_n},\ \lambda_n = e^{x_2}.$$

Первые $n-1$ из них, очевидно, функционально независимы.

Мы докажем теорему 7 с помощью общей теории вихрей [6], изучающей геометрию и динамику инвариантных многообразий уравнений Гамильтона, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство. Как и в §§ 4, 5, снова введем расширенное фазовое пространство $\Gamma = T^*M$ с естественной симплектической структурой и сопоставим полю u и векторным полям (6.2) функции на Γ, линейные по импульсам:

$$H = (y, u), \quad F_1 = (y, v_1),\ \ldots,\ F_n = (y, v_n).$$

Поскольку поле u коммутирует с векторными полями (6.2), то $\{H, F_i\} = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, функции $F_1, \ldots, F_n$ — первые интегралы гамильтоновой системы с гамильтонианом H. В частности, интегральные поверхности

$$\{x, y\colon F_1 = c_1, \ldots, F_n = c_n\} \tag{6.7}$$

будут инвариантными многообразиями гамильтоновых уравнений с функцией Гамильтона H. Поскольку векторные поля (6.2) линейно независимы во всех точках M, то (6.7) — гладкие n-мерные многообразия, однозначно проектирующиеся на M.

Выражая импульсы через координаты, получим поле импульсов на M

$$y = p(x, c), \quad x \in M,$$

линейно зависящее от параметров $c_1, \ldots, c_n$. Это поле удовлетворяет уравнению Ламба [6]:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right] u = -\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{6.8}$$

где $h = (p(x, c), u)$ — ограничение гамильтониана на инвариантное многообразие (6.7). Согласно общей теории, в уравнении Ламба на месте поля u должно стоять векторное поле

$$\left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=p}.$$

Но это векторное поле не зависит от c и в точности совпадает с полем u.

Из (6.8) сразу же вытекает, что функция h постоянна на траекториях исходной динамической системы (6.1). Легко понять, что

$$h = \sum \lambda_i(x)c_i.$$

Поскольку параметры $c_1, \ldots, c_n$ могут независимо принимать произвольные значения, то отсюда вытекает первая часть заключения теоремы 7.

Инвариантность меры (6.4) вытекает из общего результата об инвариантности меры с плотностью

$$\rho = \left|\frac{\partial p}{\partial c}\right| = \left|V^{-1}\right| = |V|^{-1}$$

(см. [6, гл. II]).

Кстати сказать, постоянство функций (6.5) на траекториях системы (6.1) можно доказать и непосредственно. Действительно, из (6.3) получаем:

$$0 = [u, u] = \sum [u, \lambda_i v_i] = \sum \lambda_i [u, v_i] + \sum \dot{\lambda}_i v_i = \sum \dot{\lambda}_i v_i, \tag{6.9}$$

где

$$\dot{\lambda}_i = L_u \lambda_i = \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} u^{(j)}$$

— полная производная от функции λ_i в силу системы (6.1). Поскольку векторные поля (6.2) линейно независимы во всех точках M, то $\dot{\lambda}_1 = \ldots = \dot{\lambda}_n = 0$. Что и требовалось.

Из теоремы 7 (с учетом теоремы Эйлера–Якоби) вытекает

Следствие. *Если среди n функций* (6.5) *имеется $n - 2$ функционально независимых, то дифференциальные уравнения* (6.1) *интегрируются в квадратурах.*

7. Системы на трехмерных многообразиях

Для систем с малоразмерным фазовым пространством можно указать простые и практически окончательные условия точной интегрируемости. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = u(x), \quad x \in M \tag{7.1}$$

без положений равновесия. Для простоты формулировок мы будем считать все объекты аналитическими. В частности, связное многообразие M имеет аналитическую структуру, компоненты векторного поля u (и полей симметрий) аналитически зависят от локальных координат на M.

Теорема 8. *Пусть* $\dim M = 3$ *и имеются два поля симметрий* v_2 *и* v_3 $([u, v_j] = 0, j = 2, 3)$, *причем векторы*

$$u = v_1(x),\ v_2(x)\ \text{и}\ v_3(x) \tag{7.2}$$

линейно независимы хотя бы в одной точке M (*значит, они независимы почти всюду*). *Тогда почти все решения дифференциального уравнения* (7.1) *находятся с помощью квадратур.*

Подчеркнем, что (в отличие от теоремы Ли) мы не накладываем никаких дополнительных условий на векторные поля симметрий v_2 и v_3. Априори алгебра векторных полей симметрий может быть и бесконечномерной.

Доказательство теоремы 8. Пусть U — открытая область в M, где векторы (7.2) линейно независимы. Ввиду аналитичности, множество $M \setminus U$ имеет нулевую меру. В области U динамическая система (7.1) допускает интегральный инвариант вида (6.4). Это вытекает из теоремы 7, примененной к векторным полям $v_1 = u$, v_2, v_3, линейно независимым в каждой точке области U.

Разложим теперь коммутатор

$$[v_2, v_3] = w$$

по линейно независимым векторам (7.2) как по базису:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3. \tag{7.3}$$

Коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3 — аналитические функции в области U. Согласно тождеству Якоби

$$[u, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, u]] + [v_3, [u, v_2]] = 0,$$

коммутатор $[v_2, v_3]$ также является полем симметрий:

$$[u, w] = 0.$$

Из (7.3) получаем:

$$[v_1, w] = \sum \dot{\lambda}_i v_i = 0$$

(ср. с (6.9)). Но тогда λ_1, λ_2 и λ_3 — первые интегралы динамической системы (7.1). Если не все они постоянны, то интегрирование в квадратурах уравнения (7.1) вытекает из теоремы Эйлера–Якоби об интегрирующем множителе.

Нам осталось рассмотреть случай, когда все коэффициенты разложения (7.3) постоянны. Покажем, что в этом случае линейные комбинации векторных полей (7.2) порождают трехмерную разрешимую алгебру Ли $\mathcal{G}$ относительно операции коммутирования.

Воспользуемся коммутационными соотношениями

$$[w, v_1] = 0, \quad [w, v_2] = -\lambda_3 w, \quad [w, v_3] = \lambda_2 w \tag{7.4}$$

и рассмотрим три случая:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,
2. $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$,
3. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

В первом случае алгебра векторных полей $\mathcal{G}$ коммутативна (следовательно, она разрешима). Рассмотрим второй случай, и пусть, например, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда

$$v_2 = \frac{1}{\lambda_2}\, w - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\, v_3$$

и базис в $\mathcal{G}$ составляют поля

$$w,\ v_3,\ v_1.$$

Согласно (7.4), имеем цепочку вложенных идеалов

$$\{w\} \subset \{w; v_3\} \subset \{w; v_3; v_1\},$$

что означает разрешимость алгебры $\mathcal{G}$.

В третьем случае базис в $\mathcal{G}$ составляют поля

$$w = \lambda_1 v_1,\ v_2,\ v_3.$$

Разрешимость алгебры $\mathcal{G}$ вытекает из следующей последовательности вложенных идеалов:

$$\{w\} \subset \{w; v_2\} \subset \{w; v_2; v_3\}$$

(см. (7.4)).

Интегрируемость в квадратурах исходной системы (7.1) в случаях 1 и 3 вытекает из классической теоремы С. Ли, а интегрируемость во втором случае — из усиленной теоремы Ли, установленной в работе [14]. Это усиление состоит в том, что вместе с дифференциальным уравнением $\dot{x} = w(x)$ в квадратурах интегрируются также дифференциальные уравнения $\dot{x} = v_3(x)$ и $\dot{x} = v_1(x)$. Что и требовалось.

8. Вмороженные поля и нтегрирование неавтономных систем дифференциальных уравнений

Наблюдения §§ 4 и 5 можно перенести на неавтономный случай. Итак, рассмотрим неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u(x, t), \quad x \in M^n. \tag{8.1}$$

Роль полей симметрий будут играть векторные поля

$$v_1(x, t), \ldots, v_m(x, t), \tag{8.2}$$

вмороженные в поток системы (8.1). Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + [v_i, u] = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{8.3}$$

Здесь коммутатор вычисляется при фиксированных t. Эти соотношения можно представить в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L_u v = 0, \tag{8.4}$$

где L_u — производная Ли вдоль векторного поля u. Уравнение (8.4) выражает тот факт, что поток системы (8.1) «переносит» векторное поле v.

Уравнение (8.3) известно в гидродинамике как уравнение Гельмгольца. В частности, ему удовлетворяет вектор вихря баротропных течений несжимаемой идеальной жидкости. Из (8.3) выводится классическая теорема Гельмгольца о вмороженности вихревых линий.

Теорема 9. *Пусть $m = n$, в каждый момент времени векторные поля* (8.2) *линейно независимы во всех точках $x \in M$, коммутируют между собой* ($[v_i, v_j] = 0$) *и удовлетворяют уравнениям* (8.3). *Тогда исходная система* (8.1) *интегрируется в квадратурах.*

Это утверждение — вариация на тему теоремы Ли о системах с полной абелевой группой симметрий. Сначала покажем как ее можно свести к автономному случаю, а затем выведем ее из теоремы Лиувилля о вполне интегрируемых гамильтоновых системах.

Расширим фазовое пространство M до $(n+1)$-мерного, добавив в качестве независимой переменной время t. Тогда система (8.1) превращается в автономную:

$$\dot{x} = u(x, t), \quad \dot{t} = 1. \tag{8.5}$$

Векторные поля v_i продолжим иным способом, сопоставив им дифференциальные уравнения

$$x' = v_i(x, t), \quad t' = 0. \tag{8.6}$$

Пусть $\widetilde{u}$ ($\widetilde{v}_i$) — векторное поле в $M \times \mathbb{R}_t$, которое определяется правой частью (8.5) (соответственно (8.6)). Ясно, что соотношения (8.3) эквивалентны условиям коммутирования

$$[\widetilde{u}, \widetilde{v}_i] = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

а предположение о коммутируемости векторных полей $v_1, \ldots, v_n$ при фиксированных t означает коммутируемость $\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n$. Остается заметить, что векторы $\widetilde{u}, \widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n$ линейно независимы во всех точках расширенного фазового пространства.

Приведем теперь «гамильтонов» вариант доказательства теоремы 9. На расширенном фазовом пространстве $\Gamma = T^*M$ введем гамильтониан

$$H = (y, u(x, t))$$

и n функций

$$F_1 = (y, v_1(x, t)), \ldots, F_n = (y, v_n(x, t)). \tag{8.7}$$

Ясно, что полные производные этих функций в силу гамильтоновой системы

$$\dot{F}_i = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \{H, F_i\}$$

равны нулю ввиду соотношений (8.3). Далее,

$$\{F_i, F_j\} = 0$$

и функции (8.7) функционально независимы на Γ при всех t. Следовательно (по теореме Лиувилля [7]) уравнения Гамильтона с гамильтонианом H находятся с помощью квадратур. Но тогда и замкнутая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = u(x, t)$$

также интегрируется в квадратурах.

Теорема 9 дает любопытные явные формулы для решений неавтономных систем. Продемонстрируем это в простейшем случае, когда $n = 1$. Итак, рассмотрим неавтономное дифференциальное уравнение на прямой

$$\dot{x} = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8.8}$$

Пусть $v(x,t) \neq 0$ — еще одно векторное поле, удовлетворяющее уравнению (8.3):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u = \frac{\partial u}{\partial x} v. \tag{8.9}$$

Решение (8.8) задается формулой

$$\int\limits_0^x \frac{dp}{v(p,t)} - \int\limits_0^t \frac{u(0,s)}{v(0,s)}\, ds = \alpha, \tag{8.10}$$

где α — произвольная постоянная. Эту формулу можно проверить дифференцированием с использованием (8.9). Однако мы дадим ее вывод с помощью метода Гамильтона–Якоби.

Уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} u = 0. \tag{8.11}$$

Положим $F = y \cdot v(x,t)$. Это — первый интеграл ввиду (8.9). Полагая $F = c$, найдем импульс

$$y = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{c}{v}. \tag{8.12}$$

Согласно (8.11) и (8.12) действие S удовлетворяет следующей системе

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{c}{v}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -c\frac{u}{v}.$$

Эта система совместна ввиду предположения (8.9). Интегрируя эти уравнения, получаем с точностью до несущественной аддитивной постоянной

$$S = c\int\limits_0^x \frac{dp}{v(p,t)} - c\int\limits_0^t \frac{u(0,s)}{v(0,s)}\, ds.$$

По теореме Якоби,

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \alpha = \mathrm{const},$$

откуда следует (8.10).

Пусть, например, переменные в (8.8) разделяются: $u = \lambda(t)\mu(x)$. Тогда (8.9) имеет очевидное решение $v = \mu(x)$. После этого (8.10) превращается в классическую формулу для решений уравнения с разделяющимися переменными.

Сказанное выше позволяет без труда сформулировать и доказать аналоги теорем 5 и 6 в неавтономном случае.

Автор благодарен рецензенту за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Kaplansky I. An introduction to differential algebra. Paris: Hermann, 1957. 63 pp.
[2] Kozlov V. V. The Euler – Jacobi – Lie integrability theorem // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 4, pp. 329–343.
[3] Olver P. J. Applications of Lie groups to differential equations. (Grad. Texts in Math., vol. 107.) New York: Springer, 1986. 497 pp.
[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.
[5] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal: T. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1914. 618 pp.
[6] Kozlov V. V. General theory of vortices. (Encyclopaedia Math. Sci., vol. 67.) Berlin: Springer, 2003. 184 pp.
[7] Whittaker E. T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. 4th ed. New York: Cambridge Univ. Press, 1959. 456 pp.
[8] Нехорошев Н. Н. Переменные действие–угол и их обобщения // Тр. Моск. матем. общ-ва, 1972, т. 26, с. 181–198.
[9] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, № 2, с. 46–56.
[10] Браилов А. В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами // Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 2, с. 273–276.
[11] Stekloff W. Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Jacobi – Lie // C. R. Acad. Sci. Paris, 1909, vol. 148, pp. 465–468.
[12] Kozlov V. V. An extended Hamilton – Jacobi method // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 580–596.
[13] Kozlov V. V. Symmetries, topology, and resonances in Hamiltonian mechanics. (Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 31.) Berlin: Springer, 1996. 378 pp.
[14] Козлов В. В. Замечания об одной теореме Ли, касающейся точной интегрируемости дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, № 4, с. 553–555.

Notes on integrable systems

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

The problem of integrability conditions for systems of differential equations is discussed. Darboux's classical results on the integrability of linear non-autonomous systems with an incomplete set of particular solutions are generalized. Special attention is paid to linear Hamiltonian systems. The paper discusses the general problem of integrability of the systems of autonomous differential equations in an n-dimensional space which permit the algebra of symmetry fields of dimension $\geqslant n$. Using a method due to Liouville, this problem is reduced to investigating the integrability conditions for Hamiltonian systems with Hamiltonians linear in the momentums in phase space of dimension that is twice as large. In conclusion, the integrability of an autonomous system in three-dimensional space with two independent non-trivial symmetry fields is proved. It should be emphasized that no additional conditions are imposed on these fields.

MSC 2010: 34C14
Keywords: integrability by quadratures, adjoint system, Hamilton equations,
Euler – Jacobi theorem, Lie theorem, symmetries

Received September 2, 2013, accepted September 23, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 459–478 (Russian)