



УДК: 531.384, 531.43, 531.7.08  
MSC 2010: 70E18, 70-05

## Об отрыве диска Эйлера

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Ю. Л. Караваев

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию катящегося круглого однородного диска по горизонтальной поверхности. Предложены два способа экспериментального определения отрыва катящегося диска от горизонтальной поверхности перед его остановкой. Представлены результаты экспериментов для дисков различной массы и изготовленных из различных материалов. Обсуждаются причины обнаруженных в процессе движения диска «микроотрывов».

Ключевые слова: диск Эйлера, потеря контакта, эксперимент

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию движения круглого однородного диска по шероховатой плоскости, в особенности его финальной стадии. Такой диск в последнее время называют диском Эйлера [1] (в силу не совсем ясных причин), хотя в неголономной механике (то есть когда диск движется по абсолютно шероховатой плоскости) задача о качении диска рассматривалась еще Аппелем [2], Кортевегом [3], Чаплыгиным [4] и другими. Обзор по современному состоянию проблемы имеется в работе [5]. Несмотря на большое количество работ (в том числе и в неголономной постановке), которые доказывают интегрируемость данной задачи, они не могут объяснить ряд эксперименталь-

---

Получено 19 июля 2013 года  
После доработки 20 августа 2013 года

---

Борисов Алексей Владимирович  
[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич  
[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований,  
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения  
Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН  
117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Институт математики и механики УрО РАН  
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Караваев Юрий Леонидович  
[karavaev\\_yury@istu.ru](mailto:karavaev_yury@istu.ru)

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова  
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 71



ных эффектов (возрастание частоты звука, сопровождающего движение диска, и внезапная остановка движения), очевидно, связанных с наличием диссипативных сил трения и вязкости воздуха.

Современный интерес к движению диска был инициирован работой К. Моффатта [6], в которой прекращение движения диска Эйлера объясняется наличием силы вязкого сопротивления воздуха. Ван ден Энг с соавторами [7], проведя эксперименты с диском Эйлера в сосуде, в котором создавались вакуум или избыточное давление воздуха, исключили ключевую роль силы вязкого сопротивления воздуха. С их точки зрения, характер движения диска Эйлера объясняется наличием силы трения скольжения, причем ее «импульсный» характер приводит к отрыву диска от поверхности в процессе движения и его остановке.

Авторы последующих работ проводили исследования влияния трения качения и трения скольжения на различных этапах движения диска [8–16]. Для степенного закона изменения угла наклона  $\theta$  и скорости прецессии  $\dot{\alpha}$  диска Эйлера в зависимости от рассматриваемого механизма диссипации исследователями определялись значения показателя  $n$ :

$$\theta(t) \propto (t_f - t)^n, \quad \dot{\alpha}(t) \propto (t_f - t)^{-\frac{1}{2}n}. \quad (1)$$

Подробный анализ данных работ представлен в работах [17, 18], в которых автор структурирует и сравнивает различные механизмы диссипации. В заключение он делает выводы, что в начале стадии стационарного качения превалирует сухое трение, а в последние одну-две секунды перед остановкой — вязкое трение. Данные выводы хорошо коррелируют с результатами экспериментальных исследований, однако, как утверждает сам автор, другие механизмы диссипации могут иметь аналогичные значения показателей степени в выражении (1).

В работе [19] авторы рассматривают уравнения движения с учетом скольжения диска и сопротивления воздуха, пренебрегая моментом трения и деформацией диска и поверхности; кроме того получены условия перехода от скольжения к качению и проведено моделирование, результатом которого является положительность реакции, то есть безотрывность диска в процессе движения.

Все экспериментальные работы, результаты которых также обобщены в [17, 18], условно можно разделить на две группы. В первую отнесем исследования параметров движения диска Эйлера (угла наклона, скорости прецессии, скорости вращения) с помощью высокоскоростных видеокамер [13, 17, 18, 20]. В зависимости от выбранной методики для определения рассматриваемых параметров съемка движущегося диска проводилась либо сбоку [17, 18] (оптическая ось объектива лежала в плоскости поверхности, по которой двигался диск), либо сверху [20] (оптическая ось объектива перпендикулярна плоскости поверхности); комбинированные съемки для определения каждого параметра в отдельности [13]. К этой же группе отнесем работу [12], авторы которой фиксировали с помощью фототранзистора отраженный от поверхности диска световой луч. Работы второй группы посвящены исследованию звуковых колебаний, сопровождающих движение диска Эйлера [15, 19]. Результаты данной работы указывают на нелинейность колебаний звука.

Похожие технические средства использовались авторами работ [21, 22] при экспериментальном исследовании движения сфероида по плоскому основанию. С помощью акустического, оптического (с помощью высокоскоростной камеры) и электрического (измерялась емкость системы «стол–сфероид») способов авторам удалось зафиксировать отрывы вращающегося сфероида от плоского основания во время движения. Однако скорость вращения сфероида, при которой удалось обнаружить отрывы, составляет более 1000 об/мин. Ре-

зультаты экспериментов хорошо коррелируют с результатами моделирования для случая малого коэффициента трения и большого начального кинетического момента сфероида.

Проблема потери контакта катящегося диска во время движения обсуждалась в теоретических работах М. Батисты [23, 24] и А. П. Иванова [25]. Так, в статье А. П. Иванова аналитически получены условия отрыва при качении тонкого диска для различных законов трения [25]; при рассмотрении диска ненулевой толщины данные условия не выполняются. М. Батиста получил условия отрыва как для катящегося диска, так и для сфероида в начале движения при отсутствии трения [24]. П. Кесслер и О. О'Рейли в работе [10] определили нормальную силу (реакцию) строго положительной, что исключает отрывы катящегося диска во время движения, хотя в заключение ими выдвинута гипотеза о резкой остановке диска, происходящей в результате потери контакта между диском и поверхностью в процессе вибраций при малом угле наклона.

Цель настоящей работы — экспериментальные исследования момента остановки диска Эйлера и экспериментальное подтверждение отрыва с соответствующим ударом.

Для достижения поставленной цели разработаны две методики, позволяющие исследовать наличие контакта как во время движения, так и в момент остановки диска.

Схема первого эксперимента представлена на рисунке 1. Для проведения эксперимента необходимо к листу бумаги 1 прикрепить один из концов канцелярской резинки 2. Вторым концом резинки 2 прижимается тяжелым предметом 4 к поверхности стола 5 (масса предмета 4 должна быть больше массы диска Эйлера 3). После этого лист бумаги по поверхности стола перемещается рукой на некоторое расстояние, обеспечивающее натяжение резинки (см. рис. 1b). Величина натяжения подбирается экспериментально в зависимости от массы диска Эйлера. В положении, когда резинка 2 натянута (лист бумаги можно удерживать рукой), на листе 1 запускается диск 3. На последних секундах движения диска следует освободить лист бумаги. При движении диска по листу резинка сохраняется в натянутом состоянии, а в момент остановки — при отрыве диска — резинка вырывает лист бумаги из-под диска.

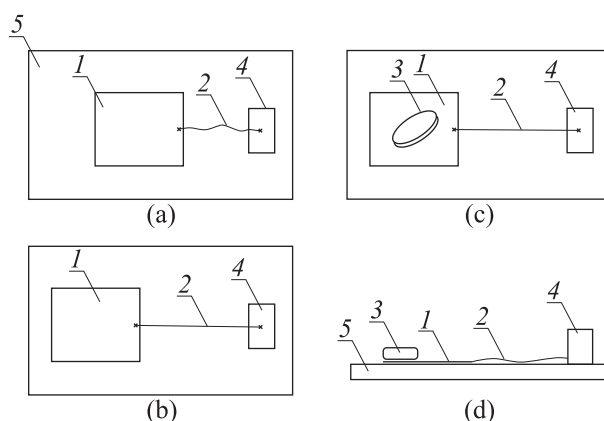


Рис. 1. Схема эксперимента. (a) Лист бумаги в исходном положении. (b) Лист бумаги отведен в сторону для обеспечения натяжения резинки и удерживается в таком положении. (c) На листе запускается диск Эйлера, в конце движения лист освобождается. (d) Лист под действием натяжения резинки вырывается из-под диска в момент его отрыва.

Для проведения более продвинутого экспериментального исследования движения диска, а также для определения факторов, влияющих на отрыв диска в момент его остановки, разработана экспериментальная установка, представленная на рисунке 2. Данная установ-

ка позволяет подтвердить наличие отрыва диска в момент его остановки, зафиксировать время отрыва, а также более подробно исследовать финальные движения.

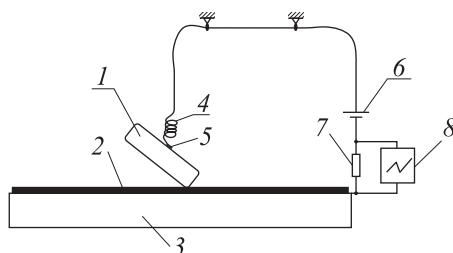


Рис. 2. Схема экспериментальной установки по определению времени отрыва диска Эйлера.

Диск 1 запускался по листу нержавеющей стали 2 толщиной 1.2 мм. Стол 3 устанавливался по цифровому уровню строго горизонтально, с погрешностью  $0.05^\circ$ . Провод 4 закреплялся к центру диска с помощью винта 5. Провод 4 выбирался таким образом, чтобы его масса и упругость не вносили вклада в характер поведения вращающегося диска. Через неподвижные опоры, как показано на рисунке 1, провод подключен к источнику питания постоянного тока 6, настроенного на напряжение 10 В. В случае отрыва диска происходил обрыв электрической цепи, состоящей из следующих элементов: диск 1 — провод 4 — источник питания 6 — лист нержавеющей стали 2 — резистор 7. Наличие или отсутствие электрического тока фиксировалось на резисторе 7 осциллографом 8 с частотой дискретизации 10 МГц. Захват сигнала осциллографом осуществлялся автоматически по триггеру, настроенному на задний фронт сигнала напряжением 2 В. При нахождении диска на поверхности 2 в рассматриваемой цепи протекает электрический ток, фиксируемый осциллографом (напряжение на резисторе +10 В или -10 В в зависимости от полярности подключения приборов). В случае отрыва диска от поверхности электрическая цепь размыкается и напряжение на резисторе составляет 0 В. Одновременно производилась запись звука, сопровождающего качение диска. Типовая осциллограмма отрыва диска представлена на рисунке 3.

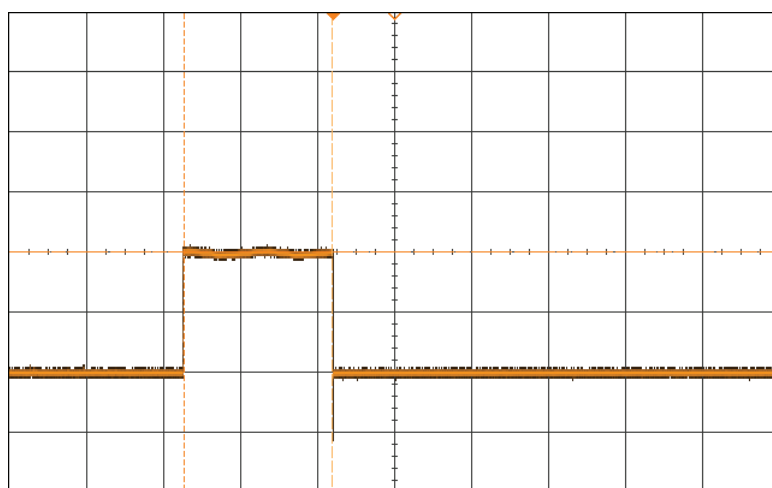


Рис. 3. Типовая осциллограмма отрыва диска (масштаб: по оси абсцисс 1 деление — 20 мс, по оси ординат 1 деление — 5 В).

Для поведения экспериментов выбраны три диска с характеристиками, представленными в таблице 1 (радиусы закруглений дисков — 2 мм, поверхности дисков обработаны шлифованием).

Таблица 1. Экспериментальные образцы

Обозначение диска	Диаметр, мм	Высота, мм	Масса, кг	Материал
Диск 1	100	20	0.435	дюралюминий
Диск 2	100	40	0.868	дюралюминий
Диск 3	100	20	1.215	нержавеющая сталь

С каждым диском проводилось по 3 эксперимента с различными начальными условиями, при этом время отрыва, фиксируемое осциллографом для одного диска, в разных опытах изменяется незначительно). Результаты экспериментов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты экспериментов

	Время отрыва диска в момент остановки, мс		
	Диск 1	Диск 2	Диск 3
Опыт 1	38.4	23.8	13.0
Опыт 2	38.6	21.6	13.0
Опыт 3	42	21.6	12.6
Среднее по трем опытам	36.97	23.33	12.87

В экспериментах на более жестком основании — дюралюминиевой плите размерами  $310 \times 310 \times 30$  мм — время отрыва диска в момент остановки для диска №1 составило в среднем 102 мс, что позволяет сделать вывод о существенном влиянии жесткости основания на характер движения диска.

По результатам экспериментов сделаем ряд выводов, имеющих неожиданный характер:

1. Чистота поверхности, по которой движется диск, а также качество обработки поверхностей вносят существенный вклад в характер движения диска, хотя время отрыва диска в момент его остановки остается прежним.

2. При проведении опытов обнаружено также, что диск отрывается не только в момент остановки, но и во время движения, однако время отрыва существенно меньше (до 0.7 мс) (рис. 4). Частота и длительность «микроотрывов» малопредсказуемы и имеют вероятностный характер. Однако за данный промежуток времени точка контакта для рассматриваемых дисков перемещается на расстояние до 3 мм.

3. Чем выше качество обработки поверхностей, тем отрывы во время движения менее продолжительны и количество отрывов меньше. Таким образом, можно сделать вывод, что основная причина отрывов диска во время движения — это микронеровности и шероховатости взаимодействующих поверхностей.

4. Анализ звуковых колебаний, сопровождающих качение диска, с помощью вейвлет-преобразований и преобразований Фурье показал наличие в сигнале большого количества гармоник, характерных для ударных импульсов. На отдельных участках всплески амплитуды колебаний коррелируют с колебаниями скорости движения точки контакта, как и в рабо-

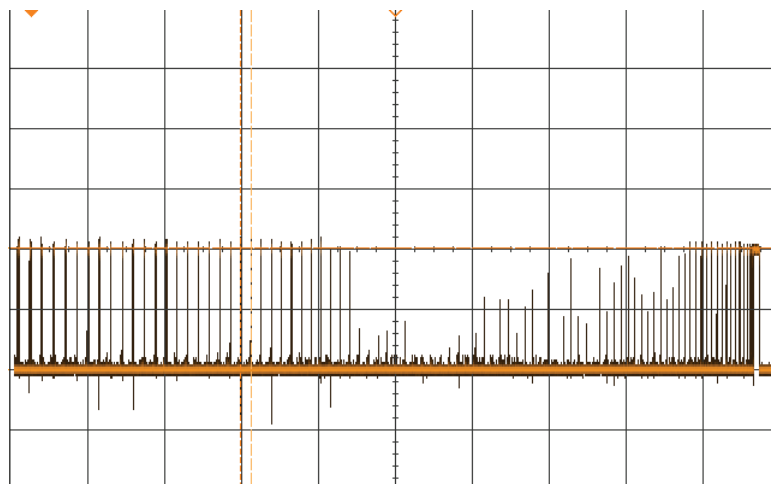


Рис. 4. Отрыв диска во время движения (последние 5 с движения).

тах [15, 19], что позволяет отнести их к числу основных гармоник. Зашумленность спектра акустического сигнала можно объяснить наличием «микроотрывов».

С помощью разработанных методик и экспериментальных установок удалось обнаружить наличие отрыва диска в момент его останковки и зафиксировать время отрыва. Кроме того, обнаружены «микроотрывы» катящегося диска от поверхности, сопровождающие движение диска от самого старта до падения и сильно зависящие от качества взаимодействующих поверхностей.

Задачей дальнейших исследований в данной области является разработка теоретической модели и проведение численного моделирования, что позволит сопоставить полученные результаты экспериментального исследования.

Авторы благодарны А. Руине (A. Ruina), А. П. Иванову, Д. В. Трещеву за полезные обсуждения, а также С. Р. Галлямову и С. А. Трефилову за помощь в технической реализации.

## Список литературы

- [1] Bendik J. The official Euler's disk website <http://www.eulerdisk.com>, Tangent Toy Co., Sausalito, CA, <http://www.tangenttoy.com>.
- [2] Appel P. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1900, vol. 14, pp. 1–6.
- [3] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Исследования по динамике неголономных систем / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. С. 9–27. (См. также: Чаплыгин С. А. Собр. соч.: т. 1. Москва–Ленинград: Огиз, 1948. С. 57–75.)
- [4] Korteweg D. Extrait d'une lettre à M. Appel // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1900, vol. 14, pp. 7–8.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Dynamic of rolling disk // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 2, pp. 201–212.
- [6] Moffatt H. K. Euler's disk and its finite-time singularity // Nature, 2000, vol. 404, pp. 833–834.
- [7] van den Engh G., Nelson P., Roach J. Numismatic gyrations // Nature, 2000, vol. 408, pp. 540.

- [8] Bildsten L. Viscous dissipation for Euler's disk // *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, 056309, 2 pp.
- [9] Villanueva R., Epstein M. Vibrations of Euler's disk // *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, 066609, 7 pp.
- [10] Kessler P., O'Reilly O. M. The ringing of Euler's disk // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 49–60.
- [11] O'Reilly O. M. The dynamics of rolling disks and sliding disks // *Nonlinear Dynam.*, 1996, vol. 10, pp. 287–305.
- [12] McDonald A. J., McDonald K. T. The rolling motion of a disk on a horizontal plane // Preprint Archive, Los Alamos National Laboratory, arXiv: physics/008227, 2000.
- [13] Le Saux C., Leine R. L., Glocker C. Dynamics of a rolling disk in the presence of dry friction // *J. Nonlinear Sci.*, 2005, vol. 15, no. 1, pp. 27–61.
- [14] Caps H., Dorbolo S., Ponte S., Croisier H., Vandewalle N. Rolling and slipping motion of Euler's disk // *Phys. Rev. E* (3), 2004, vol. 69, no. 5, 056610, 6 pp.
- [15] Stanislavsky A. A., Weron K. Nonlinear oscillations in the rolling motion of Euler's disk // *Phys. D*, 2001, vol. 156, no. 10, pp. 247–259.
- [16] Easwar K., Rouyer F., Menon N. Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk // *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, no. 4, 045102(R), 3 pp.
- [17] Leine R. L. Measurements of the finite-time singularity of the Euler disk // Proc. of the 7th EUROMECH Solid Mechanics Conf. (Lisbon, Portugal, September 7–11, 2009) / J. Ambrosio et al. (eds.).
- [18] Leine R. L. Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion // *Arch. Appl. Mech.*, 2009, vol. 79, no. 11, pp. 1063–1082.
- [19] Saje M., Zupan D. The rattling of Euler's disk // *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 2006, vol. 2, no. 1, pp. 49–66.
- [20] Petrie D., Hunt J. L., Gray C. G. Does the Euler disk slip during its motion? // *Amer. J. Phys.*, 2002, vol. 70, no. 10, pp. 1025–1028.
- [21] Mitsui T., Aihara K., Terayama C., Kobayashi H., Shimomura Y. Can a spinning egg really jump? // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2006, vol. 462, no. 2074, pp. 2897–2905.
- [22] Branicki M., Shimomura Y. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: 4. Stability of steady spin states and the «rising egg» phenomenon for convex axisymmetric bodies // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2006, vol. 462, no. 2075, pp. 3253–3275.
- [23] Batista M. The nearly horizontally rolling of a thick disk on a rough plane // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 344–354.
- [24] Batista M. Self-induced jumping of a rigid body of revolution on a smooth horizontal surface // *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2008, vol. 43, pp. 26–35.
- [25] Ivanov A. P. On detachment conditions in the problem on the motion of a rigid body on a rough plane // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 355–368.

## On the loss of contact of the Euler disk

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>2</sup>, Yury L. Karavaev<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Computer Science;

Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1,2</sup>A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS

Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

<sup>1,2</sup>Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia



<sup>3</sup>M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Studencheskaya st. 7, Izhevsk, 426069, Russia

<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>mamaev@rcd.ru, <sup>3</sup>karavaev\_yury@istu.ru

The paper presents experimental investigation of a homogeneous circular disk rolling on a horizontal plane. In this paper two methods of experimental determination of the loss of contact between the rolling disk and the horizontal surface before the abrupt halt are proposed. Experimental results for disks of different masses and different materials are presented. The reasons for “micro losses” of contact with surface revealed during the rolling are discussed.

MSC 2010: 70E18, 70-05

Keywords: Euler disk, loss of contact, experiment

Received July 19, 2013, accepted August 20, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 499–506 (Russian)