



УДК: 539.3; 531.37

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Динамика тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой плоскости

Н. Н. Ердакова, И. С. Мамаев

В данной работе мы исследуем динамику тела с плоским основанием, скользящего по горизонтальной шероховатой плоскости в предположении линейного распределения давления тела на опору как простейшей динамически согласованной модели трения. При этом для анализа мы пользуемся методом дескриптивной функции (аналогичным используемому в задачах гамильтоновой динамики с одной степенью свободы), позволяющим выполнить качественный анализ системы без явного интегрирования уравнений движения. Кроме того мы приведем здесь систематический обзор известных экспериментальных и теоретических результатов в этой области.

Ключевые слова: сухое трение, линейное распределение давления, плоское движение, закон Кулона

Получено 2 сентября 2013 года

После доработки 16 сентября 2013 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 «Динамические системы классической механики и проблемы управления». Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.1935, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2012–2014 годы, 1.7734.2013 «Разработка неголономных мобильных систем».

Ердакова Надежда Николаевна
enn@rcd.ru

Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Содержание

Введение	522
1. Уравнения движения в натуральном базисе траектории центра масс	527
2. Сила трения и момент при линейном распределении давления	529
3. Общие свойства системы и частные решения	531
4. Метод дескриптивной функции	534
4.1. Явное представление для тонкого кольца и круга	536
5. Дискуссия	542

Введение

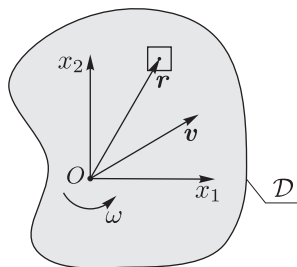


Рис. 1. Вид сверху на площадку контакта \mathcal{D} и связанную с ней систему координат.

Для описания движения мы рассмотрим здесь лишь простейшую модель трения, предполагая, что для всякой точки площадки контакта применим закон сухого трения Кулона. В плоской системе координат Ox_1x_2 , связанной с движущимся основанием (см. рис. 1), сила трения имеет вид (двойного) интеграла:

$$\mathbf{F} = -f \int_{\mathcal{D}} p(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})}{|\mathbf{v}(\mathbf{r})|} dx_1 dx_2,$$

где $p(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — нормальное давление и скорость в точке $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$, f — коэффициент трения. Скорость каждой точки \mathbf{r} площадки контакта выражается по формуле Эйлера через скорость \mathbf{v} начала координат O и угловую скорость тела ω :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} + \omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r},$$

где \mathbf{e}_3 — нормаль к плоскости контакта. Момент сил трения относительно начала координат O задается соотношением

$$\mathbf{M} = -f \int_{\mathcal{D}} p(\mathbf{r}) \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}), \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{v}(\mathbf{r})|} dx_1 dx_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывает значительное количество экспериментальных данных, такой подход к описанию трения является слишком упрощенным (см. работы [11–14, 17, 38] и библиографию к ним). В трибологии, теории смазки и смежных областях имеются десятки более сложных, чем сухое трение, моделей, описывающих процессы трения и износа в различных условиях. В то же время, как правило, все эти экспериментальные результаты и соответствующие математические модели получены для стационарных (в лучшем случае периодических) процессов, их приложение к динамическим системам и нестационарным условиям требует дополнительных исследований и до сих пор является открытой проблемой.

Напомним, что основная трудность в описании движения с трением соприкасающихся тел в рамках используемого подхода заключается в том, что распределение нормального

давления тела по площадке контакта $p(\mathbf{r})$ не может быть найдено в общем виде без учета упругих свойств контактирующих тел, микрорельефа их поверхностей и многих других факторов. К тому же, как показано в [1, 16], само существование трения может привести не только к заметному изменению давления, но и к невозможности движения. Существующие экспериментальные возможности пока также не позволяют непосредственно измерить давление в *нестационарных* условиях реальной динамической системы. Кроме того, имеющиеся в литературе теоретические исследования и предложенные модели, как правило, до сих пор не прошли необходимой экспериментальной проверки (это во многом обусловлено тем, что достаточно точные наблюдения и измерения необходимых нестационарных динамических процессов стали возможными сравнительно недавно с появлением высокоскоростных цифровых камер и производительных компьютеров). Поэтому до сих пор не существует экспериментально подтвержденных моделей трения, позволяющих с достаточной точностью описывать динамику систем с трением, хотя бы в специально подготовленных лабораторных условиях.

Далее обсудим известные в данном направлении результаты. Цитируемые работы будем группировать по исследуемым задачам и используемым предположениям, а не по мере их исторического появления.

1. Условия равновесия тела на площадке контакта. Прежде всего отметим работу Н. Е. Жуковского [3], в которой для произвольного *статического* распределения давления $p(\mathbf{r})$ обсуждаются свойства силы и момента трения для тела с плоским основанием и формулируются условия его равновесия при наличии внешних сил. Возможные обобщения этого подхода на случай анизотропного трения обсуждаются в [34].

Впоследствии В. Мак-Миллан (см. [39, гл. 5, разделы 71, 72]) уточняет условия и свойства равновесия при дополнительном предположении, что «плоскость незначительно деформируется под действием оказываемого на нее давления; величина деформации пропорциональна давлению, поверхность же соприкосновения остается плоской». Согласно закону Гука, распределение нормального давления при этом оказывается линейной функцией

$$p(\mathbf{r}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad (1)$$

где (x_1, x_2) — декартовы координаты в плоскости основания. В частности, для тела, находящегося в равновесии на горизонтальной плоскости, показано, что если проекция центра масс не совпадает с центром тяжести площади основания, то давление $p(\mathbf{r})$ *неравномерно* распределяется по основанию. В случае кругового основания В. Мак-Миллан выражает силу и момент трения через эллиптические интегралы.

Заметим, что первоначально общие условия равновесия тела с плоским основанием как для случая произвольного распределения давления $p(\mathbf{r})$, так и для линейного (1) были сформулированы в заметке [25].

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы не упоминаем здесь фундаментальные теоретические работы [16, 36] в связи с тем, что в них не обсуждается модель площадки контакта.

2. Динамически несогласованные стационарные модели. Следующие работы можно объединить в силу того, что в них для теоретического анализа *динамики* используется модель площадки контакта при условии, что распределение нормальных давлений $p(\mathbf{r})$ предполагается *статическим* (то есть не зависящим от поступательной и угловой скорости тела).

Так, в работах [7, 8, 31, 33, 35, 46, 48], описывающих скольжение тела с плоским участком, полагается, что нагрузка равномерно распределена по основанию

$$p(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (2)$$

Очевидно, что если тело не является пластиной, то эта модель динамически не согласована, поскольку предположение (2) *противоречит условию равенства нулю момента сил относительно осей, параллельных плоскости (то есть тело должно опрокинуться)*. Поэтому данная модель не может быть использована для более или менее точного описания движения тел по плоскости. Тем не менее, поскольку окончательный ответ о пригодности модели может дать лишь эксперимент, приведем основные результаты, полученные на основании предположения (2), чтобы иметь возможность сравнить с наблюдаемыми.

1. Для произвольного осесимметричного тела отделяется двумерная система, описывающая эволюцию величины поступательной скорости v и угловой скорости ω , при этом для всякого движения (за исключением чистого вращения) траектория центра масс прямолинейна.

2. В случае осесимметричного однородного кольцевого цилиндра (в том числе и для однородного кругового цилиндра):

- существуют особые движения — чисто поступательное и чисто вращательное, которые являются неустойчивыми,
- для всякого неособого движения скольжение и вращение прекращаются одновременно за конечное время,
- при приближении к остановке предельное отношение величины поступательной скорости v и угловой скорости ω тела не зависит от начальных условий и определяется только геометрией площадки контакта/основания; в случае однородного диска радиуса R :

$$\frac{v}{R\omega} = k_0 \approx 0.653, \quad (3)$$

- существует частное решение системы, для которого $v = k_0 R\omega$.

Заметим, что свойство 2 не выполняется для произвольных осесимметричных тел [35]; в работе [48] это подтверждено экспериментально: показано, что для тела, составленного из двух цилиндров различной высоты и радиуса (рис. 2), финальным движением может быть как чистое вращение, так и чисто поступательное движение, в зависимости от геометрических характеристик и соотношения масс цилиндров.

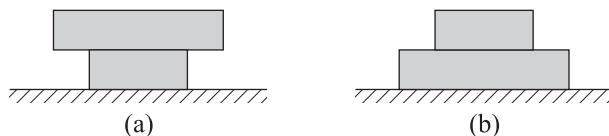


Рис. 2. Тела, составленные из двух цилиндров.

В работе [9] выполнен аналогичный анализ движения однородного диска на горизонтальной плоскости в предположении, что распределение нагрузки стационарно и описывается законом Буссинеска [29]

$$p(\mathbf{r}) = \frac{p_0}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}, \quad p_0 = \text{const.} \quad (4)$$

Это соотношение получено из решения стационарной контактной задачи в случае твердого диска и упругой плоскости. Показано, что свойства 1, 2 справедливы и в этом случае, но предельное соотношение (3) имеет вид

$$\frac{v}{\omega R} = 1.$$

Заметим, что в этом случае также не выполнено условие равновесия тела относительно горизонтальных осей.

В более общей ситуации, когда площадка контакта несимметрична [18, 35], трехмерная система, описывающая эволюцию скоростей (v_1, v_2, ω) , не может быть редуцирована к двумерной. При этом в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(v_1, v_2, \omega)\}$ выделяются *собственные направления*, к которым стремятся траектории при приближении тела к остановке.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для полноты отметим также ряд работ [4, 5, 30, 45], в которых рассматривается случай, когда обе соприкасающиеся поверхности являются (по крайней мере локально) сферическими, а распределение нормальных напряжений является статическим и определяется согласно теории контакта Герца:

$$p(\mathbf{r}) = p_0 \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}, \quad p_0 = \text{const}, \quad (5)$$

где R — радиус малой круговой площадки, по которой оба тела касаются друг друга. В этих работах показано, что если мало отношение $\frac{v}{\omega_3 R}$, где v — скорость точки тела в центре области контакта, ω_3 — проекция угловой скорости тела на вертикаль, то сила трения и момент пропорциональны v и ω_3 соответственно (то есть совпадают со случаем вязкого трения).

Основываясь на линеаризации трения скольжения при наличии верчения, Контенсу в работе [30] показал, что в динамике волчка со сферическим основанием качественные особенности поведения совпадают с выводами из экспериментальных наблюдений.

В работе [5] в рамках данной модели показано, что для однородного шара на горизонтальной шероховатой плоскости скольжение и верчение шара прекращается одновременно за конечное время, после чего шар катится без проскальзывания вдоль прямой линии с постоянной угловой скоростью.

В работе [24] также исследуется движение однородного шара по плоскости, но в предположении, что давление по площадке контакта распределено равномерно: $p(\mathbf{r}) = \text{const}$.

3. Модель линейного распределения. В работах [6, 20, 40] для анализа поведения тела с плоским участком на горизонтальной плоскости используется простейшая динамически согласованная модель трения (то есть выполнено условие равенства нулю проекции на плоскость суммарного момента сил). В данном случае распределение $p(\mathbf{r})$ предполагается линейным (1), при условии, что коэффициенты a_0, a_1, a_2 явно зависят от поступательной скорости v и угловой скорости ω тела. Это приводит к следующим свойствам.

1. Для осесимметричного тела при $v_0 \neq 0, \omega_0 \neq 0$ траектория центра масс искривляется: отклонение происходит вправо по ходу движения, если при взгляде сверху тело вращается против часовой стрелки, и влево — если вращается по часовой.
2. В случае однородного кругового цилиндра все свойства, указанные в предыдущем разделе, сохраняются, за исключением того, что предельное отношение $\frac{v}{\omega R}$ зависит теперь от коэффициента трения f и высоты центра масс h :

$$\frac{v}{\omega R} = G\left(\frac{fh}{R}\right).$$

Помимо этого, для однородного цилиндра в [20] показано:

- имеется частное решение, для которого сохраняется отношение $\frac{v}{\omega R} = \text{const}$ (аналогичное решение для случая кольцевой площадки контакта найдено в [40]),
- для неособого решения вектор скорости центра масс совершает бесконечное число оборотов,
- существует два класса типичных траекторий центра масс, таких, что траектории из одного класса получаются друг из друга преобразованием подобия плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [21] проведен качественный анализ движения тяжелого твердого тела в форме кругового цилиндра и показано, что при условиях кулоновского трения и равенства нулю момента сил относительно осей, параллельных плоскости движения, траектории тела при скольжении и вращении будут отклоняться от прямолинейной.

4. Модель точечных опор. Рассмотрим еще одну простейшую динамически согласованную модель движения тела по плоскости, когда оно опирается на опору в двух или трех точках (имеющих фиксированное положение в теле), для которых также справедлив закон сухого трения. В этом случае количество неизвестных реакций в точках контакта не превосходит числа уравнений для их определения. Хотя данная система не имеет прямого отношения к динамике тела с плоским основанием, закономерности ее поведения оказываются схожими со случаем, когда основание не является осесимметричным и трехмерная система в пространстве скоростей $\mathbb{R}^3 = \{(v_1, v_2, \omega)\}$ не редуцируется к двумерной.

Впервые скамейку с двумя точечными опорами («*двуногу*») в качестве примера применений условий равновесия системы с трением рассмотрел Н. Е. Жуковский [3]. Впоследствии некоторые частные движения этой системы обсуждались в работах [7, 18, 35, 49]. Так, были найдены чисто вращательные движения, для которых тело вращается вокруг одной из своих неподвижных опор [7], и численно показано [35], что эти решения могут быть предельными при приближении к остановке. В случае симметричной двуноги в работе [18] найдено частное решение, для которого $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = l\omega$, где (v_1, v_2) — поступательная скорость центра масс, ω — угловая скорость, а l — половина расстояния между опорами.

Движение тела с тремя точечными опорами («*треноги*») впервые, по-видимому, приближенно исследовалось в статье [32]. Некоторые частные решения этой системы и условия их существования и устойчивости указаны в [6, 19]. В работе [41] численно построены траектории для различных треног и, в частности, продемонстрировано, что для равносторонней треноги траектории близки к траекториям тела с кольцевой областью контакта.

Финальная динамика треноги (то есть при приближении тела к остановке) исследуется в работе [22]; показано, что здесь также имеются некоторые устойчивые и неустойчивые *собственные направления* в пространстве скоростей $\mathbb{R}^3 = \{(v_1, v_2, \omega)\}$.

5. Экспериментальные результаты. В заключение опишем также существующие экспериментальные результаты *по динамике* тел с плоским участком, скользящих по шероховатой плоскости (как уже отмечалось выше, большинство экспериментов в теории трения относится к областям трибологии, теории износа, смазки и т. п., но не к динамике). Прежде всего отметим работу [31], в которой при помощи скоростной цифровой камеры исследовалось скольжение с вращением дисков по горизонтальной плоскости. Путем аппроксимации полученных данных были вычислены линейная и угловая скорость и ускорение, что позволило построить экспериментальные зависимости силы трения и ее момента от величины $\frac{v}{R\omega}$. Приведенные в этой работе графики получены усреднением большого числа измерений

(530 бросков диска). Кроме того, в статье отмечается, что результаты этих экспериментов подтверждают, что скольжение и вращение прекращаются одновременно.

В работе [48] также с помощью скоростной цифровой камеры исследовалось финальное (вблизи остановки) поведение тел, составленных из двух однородных цилиндров. В этих экспериментах явно наблюдался следующий эффект: тела с малым радиусом инерции (рис. 2b) прекращали вращаться за некоторое время перед полной остановкой, тогда как тела с большим радиусом инерции (рис. 2a) сначала прекращали поступательное движение и лишь спустя некоторое время — вращение. Кроме того, в работе [48] приведены экспериментальные зависимости поведения отношения $\frac{v}{R\omega}$ от времени при приближении к остановке.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в работе не указаны способы обработки (аппроксимации) экспериментальных данных, хотя приведенные на графике экспериментальные кривые выглядят неправдоподобно гладко.

Имеется более ранняя работа [30] (не связанная непосредственно с экспериментом), в которой отмечается, что при линеаризации трения скольжения в модели площадки контакта для быстро вращающегося волчка со сферическим основанием (гироскоп Флериэ) теоретические результаты существенно лучше согласуются с экспериментальными данными.

Отметим также работу [10], в которой при помощи установки, представляющей собой разновидность машины для испытания тел на трение и износ, напрямую (посредством тензодатчика) измеряется зависимость силы трения для круговой площадки контакта от отношения $\frac{v}{R\omega}$. Полученные экспериментальные зависимости качественно отражают эффект зависимости силы трения от вращения площадки контакта. Однако предложенная схема измерения — не динамическая, а стационарная, поэтому имеющиеся конструктивные соединения вносят неконтролируемые возмущения, а значит не позволяет гарантировать, что найденные закономерности выполняются при свободном движении.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим также, что значительное количество работ (см., например, [42–44] и библиографию в них) посвящено проблеме скольжения по льду камней для игры кёрлинг. Тем не менее, удовлетворительных моделей и теоретического описания их динамики до сих пор не получено. Отметим, что в некоторых работах, посвященных кёрлингу, исследуется модель площадки контакта с сухим трением, как в данной работе. Большой экспериментальный материал по исследованию при помощи цифровой камеры поведения камней для игры в кёрлинг на различных ледяных поверхностях представлен в работе [37].

1. Уравнения движения в натуральном базисе траектории центра масс

Рассмотрим скольжение по горизонтальной плоскости тела (шайбы) с плоской кольцевой площадкой контакта, внутренний радиус которой R_0 , а внешний — R (см. рис. 3). Будем также предполагать, что тело является *сбалансированным* — это означает, что одна из главных осей инерции совпадает с осью симметрии площадки контакта и его центр масс также лежит на этой оси на высоте h .

Пусть \mathbf{v} — абсолютная скорость центра масс, а $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$ — угловая скорость тела, где \mathbf{e}_3 — орт вертикали. В неподвижной системе координат уравнения движения (выражающие закон изменения импульса и момента импульса относительно центра масс) имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^f + \mathbf{N} + m\mathbf{g}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})' = \mathbf{M}^f + \mathbf{M}^n, \quad (1.1)$$

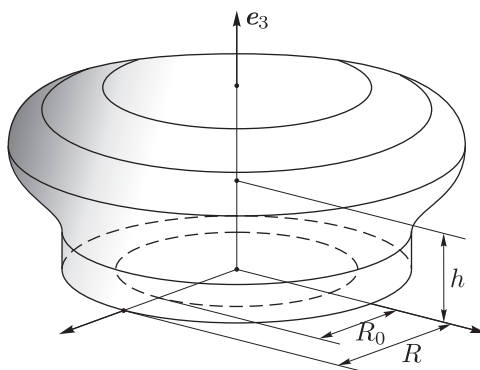


Рис. 3. Осесимметричное твердое тело с кольцевой площадкой контакта.

где F^f — сила трения, N — реакция опоры, M^f — момент силы трения, M^n — момент реакции опоры (вследствие того, что сила реакции вертикальна, ее момент параллелен плоскости опоры).

Оказывается, что в данном случае в скалярной форме эти уравнения удобнее записать при помощи подвижного репера Серре–Френе, связанного с (плоской) траекторией центра масс тела. Обозначим через $\xi(t)$ радиус-вектор центра масс в неподвижной (инерциальной) системе отсчета, тогда его абсолютная скорость может быть представлена как

$$\dot{\xi} = v = v\tau,$$

где v — модуль скорости, τ — единичный касательный вектор к траектории. Соответственно, ускорение записывается в виде

$$\ddot{\xi} = \dot{v} = \dot{v}\tau + v^2\kappa n,$$

где n — нормаль к траектории, κ — ее кривизна. Для плоской кривой репер τ , n допускает естественную параметризацию

$$\tau = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad n = (-\sin \alpha, \cos \alpha),$$

где α — угол поворота вектора скорости относительно неподвижных осей. Отсюда при помощи соотношений Серре–Френе ($\dot{\tau} = v\kappa n$, $\dot{n} = -v\kappa\tau$) получим

$$\dot{\alpha} = v\kappa.$$

Пользуясь этими соотношениями, перепишем уравнения (1.1) в проекциях на оси, задаваемые ортами τ , n , e_3 :

$$\begin{aligned} M_\tau^n + M_\tau^f &= M_n^n + M_n^f = 0, & N - mg &= 0, \\ \dot{v} &= \frac{F_\tau^f}{m}, & v\dot{\alpha} &= \frac{F_n^f}{m}, & \dot{\omega} &= \frac{M_3^f}{I_3}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где m — масса тела, I_3 — его момент инерции относительно оси динамической симметрии, проходящей через центр масс перпендикулярно площадке контакта. Здесь мы воспользовались тем, что τ , n параллельны опорной плоскости и тело динамически симметрично,

поэтому в данных осях тензор инерции имеет блочно-диагональную форму

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Дополним эти уравнения кинематическими соотношениями для радиус-вектора траектории ξ и угла поворота тела φ :

$$\dot{\xi}_1 = v \cos \alpha, \quad \dot{\xi}_2 = v \sin \alpha, \quad \dot{\varphi} = \omega; \tag{1.3}$$

таким образом, получаем полную систему (1.2) и (1.3) уравнений движения тела. Если в начальный момент положить $\alpha(0) = 0$, то величина ξ_2 будет описывать боковое отклонение траектории от первоначального курса.

2. Сила трения и момент при линейном распределении давления

Вычислим теперь входящие в уравнения движения силу и момент трения, предполагая, что распределение давления на опору линейно. В системе координат, связанной с геометрическим центром O площадки контакта \mathcal{D} и осями, направленными вдоль ортов τ , n , параметризуем радиус-вектор r элемента площади dS безразмерными декартовыми координатами:

$$r = (Rx_\tau, Rx_n),$$

безразмерный элемент площади обозначим как $ds = dx_\tau dx_n = R^{-2} dS$.

Распределение давления по \mathcal{D} представим в виде

$$p(r) = p_0(1 + a_\tau x_\tau + a_n x_n), \quad p_0 = \frac{mg}{S}, \tag{2.1}$$

$$S = \pi R^2 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right),$$

при этом заведомо выполнено одно из уравнений (1.2):

$$N = R^2 \int_{\mathcal{D}} p(r) ds = mg.$$

В пределе бесконечно тонкого кольца $\left(\frac{R_0}{R} \rightarrow 1\right)$ удобно перейти к одномерному распределению давления вида

$$p(\theta) = p_0(1 + a_\tau \cos \theta + a_n \sin \theta), \quad p_0 = \frac{mg}{2\pi}. \tag{2.2}$$

Пользуясь введенными обозначениями, запишем силу реакции и силу трения элемента площади ds :

$$e_3 dN = e_3 R^2 p(r) ds, \quad d\mathbf{F} = R^2 p(r) \frac{\mathbf{v} + \omega e_3 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} + \omega e_3 \times \mathbf{r}|} ds, \quad e_3 dM_3^f = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}. \tag{2.3}$$

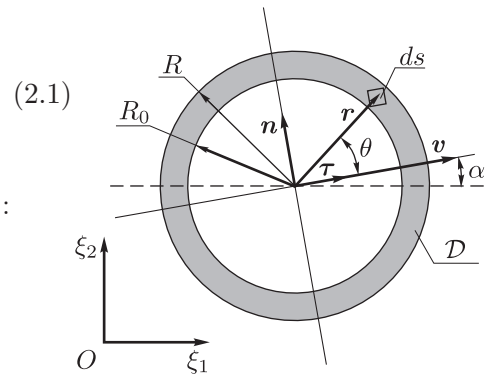


Рис. 4



Замечая, что при интегрировании по симметричной области \mathcal{D} все нечетные по x_τ слагаемые сокращаются, представим компоненты силы трения и момент M_3^f в форме

$$\begin{aligned} F_\tau^f &= -fp_0R^2 \int_{\overline{\mathcal{D}}} (1 + a_n x_n) \frac{v - ux_n}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \\ F_n^f &= -fp_0R^2 a_\tau \int_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{ux_\tau^2}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \\ M_3^f &= -fp_0R^3 \int_{\overline{\mathcal{D}}} (1 + a_n x_n) \frac{ux_\tau^2 - x_n(v - ux_n)}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \quad u = R\omega, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\overline{\mathcal{D}}$ — область интегрирования по безразмерным переменным x_τ, x_n , которая является кольцом с внешним радиусом $R_{\text{out}} = 1$ и внутренним радиусом $R_{\text{in}} = \frac{R_0}{R}$.

Чтобы найти неизвестные коэффициенты a_τ, a_n , воспользуемся оставшимися алгебраическими уравнениями в (1.2). Из (2.3) следует, что проекции момента сил трения и реакции на горизонтальную плоскость можно представить в форме

$$M_\tau^f \boldsymbol{\tau} + M_n^f \mathbf{n} = -h\mathbf{e}_3 \times \int d\mathbf{F}, \quad M_\tau^n \boldsymbol{\tau} + M_n^n \mathbf{n} = -\mathbf{e}_3 \times \int \mathbf{r} dN.$$

Отсюда, исключая при интегрировании нечетные по x_τ слагаемые, находим

$$\begin{aligned} hF_\tau &= -R^3 p_0 J a_\tau, \quad hF_n = -R^3 p_0 J a_n, \\ J &= \int_{\overline{\mathcal{D}}} x_\tau^2 ds = \int_{\overline{\mathcal{D}}} x_n^2 ds = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{R_0^4}{R^4} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и приведя подобные, получим систему уравнений для a_τ, a_n :

$$\begin{aligned} a_\tau - \eta A_{12} a_n &= \eta B, \quad -\eta A_{21} a_\tau + a_n = 0, \\ A_{12} &= \int_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{x_n(v - ux_n)}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \quad A_{21} = \int_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{ux_\tau^2}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \\ B &= \int_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{v - ux_n}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\eta = \frac{fh}{RJ}$ — безразмерный параметр.

Разрешая эти уравнения и подставляя в (2.5), для компонент силы трения получим:

$$F_\tau^f = -fp_0R^2 \frac{B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}}, \quad F_n^f = -fp_0R^2 \frac{\eta A_{21} B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}}. \quad (2.7)$$

Из (2.4) находим момент силы трения в виде

$$\begin{aligned} M_3^f &= -fp_0R^2 \left(A_{21} - A_{12} + \frac{\eta^2 A_{21} B C}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right), \\ C &= \int_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{x_n(ux_\tau^2 - x_n(v - ux_n))}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставляя найденные выражения в (1.2) и (1.3) и производя необходимые упрощения, получим:

уравнения движения сбалансированного тела, опирающегося на горизонтальную шероховатую плоскость кольцевой площадкой, могут быть представлены в виде

$$\dot{v} = -\frac{fg}{s_0} \frac{B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}}, \quad \dot{u} = -\frac{fg}{s_0} \frac{mR^2}{I_3} \left(A_{21} - A_{12} + \frac{\eta^2 A_{21} BC}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right),$$

$$v\dot{\alpha} = -\frac{fg}{s_0} \frac{\eta A_{21} B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}}, \quad s_0 = \pi \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right), \tag{2.9.1}$$

$$\dot{\xi}_1 = v \cos \alpha, \quad \dot{\xi}_2 = v \sin \alpha, \quad \dot{\varphi} = \frac{u}{R}. \tag{2.9.2}$$

Таким образом, мы видим, что отделяется система, описывающая эволюцию переменных v, u , по решениям которой остальные переменные получаются в виде последовательных квадратур. Кроме того, из (2.9) следует, что динамика данной системы существенно зависит от трех безразмерных величин:

$$\eta = \frac{fh}{RJ}, \quad \rho^2 = \frac{mR^2}{I_3}, \quad r_0 = \frac{R_0}{R}.$$

Отметим, что постоянная $\frac{fg}{s_0}$ исключается при помощи замены времени $t \rightarrow \sqrt{\frac{fg}{s_0}} t$ и соответствующего преобразования скоростей $v \rightarrow \sqrt{\frac{fg}{s_0}} v, u \rightarrow \sqrt{\frac{fg}{s_0}} u$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\eta = 0$ уравнения движения (2.9.1) сводятся к случаю постоянного распределения давления $p(\mathbf{r}) = \text{const}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Помимо простейшего закона (2.1) для построения динамически согласованных моделей трения можно использовать более сложные распределения давления вида

$$p(\mathbf{r}) = p_c^{(0)}(\mathbf{r})(1 + a_\tau x_\tau + a_n x_n),$$

где $p_c^{(0)}(\mathbf{r})$ — распределение, полученное из решения стационарной контекстной задачи (например, закон Буссинеска (4) или Герца (5)), а коэффициенты a_τ, a_n также находятся из первых двух уравнений в системе (1.2).

3. Общие свойства системы и частные решения

Покажем, что правые части уравнений, описывающих эволюцию скоростей, обладают естественными свойствами четности по переменной u (напомним, что в силу определения $v > 0$). Пользуясь осевой симметрией области интегрирования \bar{D} и свойствами четности подынтегральных функций в (2.6) и (2.8) по x_n , можно доказать следующий результат.

Предложение 1. *Если v, u не обращаются одновременно в нуль, то справедливы следующие соотношения:*

$$A_{12}(v, -u) = -A_{12}(v, u), \quad A_{21}(v, -u) = -A_{21}(v, u), \quad B(v, -u) = B(v, u), \quad C(v, -u) = C(v, u),$$

$$A_{12}(v, 0) = 0, \quad A_{21}(v, 0) = 0, \quad B(v, 0) = s_0, \quad C(v, 0) = -J,$$

$$A_{12}(0, u) = -a \operatorname{sgn}(u), \quad A_{21}(0, u) = a \operatorname{sgn}(u), \quad B(0, u) = 0, \quad C(0, u) = 0,$$

$$a = \int_{\bar{D}} \frac{x_n^2}{\sqrt{x_n^2 + x_\tau^2}} ds = \int_{\bar{D}} \frac{x_\tau^2}{\sqrt{x_n^2 + x_\tau^2}} ds = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3} \right). \tag{3.1}$$



В дальнейшем мы подробнее остановимся на анализе подсистемы (2.9.1), описывающей эволюцию переменных v , u , α (которые определяют поступательную и угловую скорость тела). На основании свойств (3.1) заключаем, что система (2.9.1) допускает два очевидных частных решения:

1. *чистое вращение:*

$$v \equiv 0, \quad u = u_0 - \operatorname{sgn}(u_0) \frac{2fa\rho^2}{s_0} gt, \quad u_0 = \operatorname{const},$$

давление при этом распределено равномерно

$$p(\mathbf{r}) = p_0;$$

2. *чистое скольжение:*

$$u \equiv 0, \quad v = v_0 - fgt, \quad \alpha = \alpha_0, \quad v_0, \alpha_0 = \operatorname{const},$$

давление при этом распределено по закону

$$p(\mathbf{r}) = p_0(1 + \eta s_0 x_\tau). \quad (3.2)$$

Из этих соотношений, в частности, следует, что плоскость $u = 0$ является инвариантным многообразием, поэтому для всякого решения системы (2.9) *знак величины $u(t)$ не может измениться во время движения*. Кроме того, из свойств четности (3.1) заключаем

Предложение 2. *Если $u(0) \neq 0$, то траектории системы (2.9) с разными знаками $u(t)$ отображаются друг в друга с помощью преобразования*

$$v \rightarrow v, \quad u \rightarrow -u, \quad \alpha \rightarrow -\alpha, \quad \xi_1 \rightarrow \xi_1, \quad \xi_2 \rightarrow -\xi_2, \quad \varphi \rightarrow -\varphi. \quad (3.3)$$

Пользуясь этим, в дальнейшем всюду будем полагать

$$u \geq 0.$$

При этом вследствие однородности правые части уравнений (2.9.1) зависят лишь от отношения $k = \frac{v}{u} \in [0, +\infty)$.

Проанализируем теперь знакоопределенность правых частей (2.9.1). Для этого перейдем к полярным координатам $x_\tau = r \cos \theta$, $x_n = r \sin \theta$ и представим интегралы (2.6), (2.8) в форме

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{R_0/R}^1 A_{12}^{(c)} \left(\frac{k}{r} \right) r^2 dr, & A_{21} &= \int_{R_0/R}^1 A_{21}^{(c)} \left(\frac{k}{r} \right) r^2 dr, \\ B &= \int_{R_0/R}^1 B^{(c)} \left(\frac{k}{r} \right) r dr, & C &= \int_{R_0/R}^1 C^{(c)} \left(\frac{k}{r} \right) r^3 dr. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь подынтегральные функции $A_{12}^{(c)}(k)$, $A_{21}^{(c)}(k)$, $B^{(c)}(k)$, $C^{(c)}(k)$ соответствуют случаю бесконечно тонкого кольца (2.2) и задаются следующим образом:

$$A_{12}^{(c)}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta (k - \sin \theta)}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \sin \theta}} d\theta, \quad A_{21}^{(c)}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \sin \theta}} d\theta,$$

$$B^{(c)}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{k - \sin \theta}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \sin \theta}} d\theta, \quad C^{(c)}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta (1 - k \sin \theta)}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \sin \theta}} d\theta.$$

Графики этих функций приведены на рисунке 5, откуда можно заключить, что все они *знакоопределены и ограничены на интервале $k \in [0, +\infty)$* . Из этого согласно (3.4) будет следовать знакоопределенность и ограниченность исходных функций (3.4).

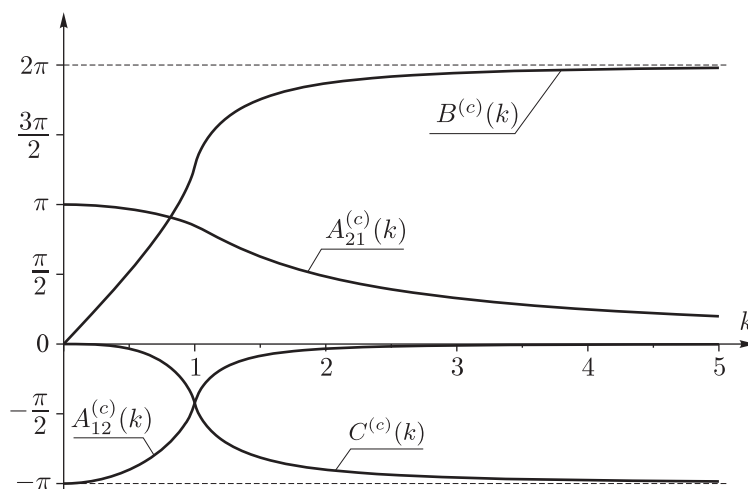


Рис. 5

Пользуясь рисунком 5, находим, что если $k \in (0, +\infty)$, то $\dot{\alpha} < 0$. Пользуясь дополнительно преобразованием (3.3), получим обобщение сформулированного во введении результата.

Предложение 3. *Если для сбалансированного тела распределение давления на опору линейно, то в случае неособого решения имеем:*

- $\dot{\alpha} < 0$ при $\omega < 0$ и $\dot{\alpha} > 0$ при $\omega > 0$, то есть центр масс отклоняется вправо по ходу движения при вращении против часовой стрелки (при взгляде сверху) и влево – при вращении по часовой;
- $\dot{v} < 0$ – величина скорости центра масс всегда уменьшается.

В заключение этого раздела обсудим условия применимости данной модели, обусловленные тем, что давление на площадку контакта $p(\mathbf{r})$ должно быть всюду положительным. (В противном случае нужно полагать, что часть площадки не оказывает давление и все вычисления усложняются [39].) Как хорошо известно, линейная функция принимает свои экстремальные значения на границе области определения, в данном случае $\bar{\mathcal{D}}$. Следовательно,

$$p_{\min} = p_0(1 - \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}) = p_0 \left(1 - \frac{\eta B \sqrt{1 + \eta^2 A_{21}^2}}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right) \geq 0. \tag{3.5}$$



Таким образом, граница области применимости на плоскости величин (k, η) определяется кривой:

$$p_{\min}(k, \eta) = 0.$$

Можно показать, что при всех величинах $\frac{R_0}{R}$ эта кривая имеет горизонтальную асимптоту $\eta = \eta_*$ (см. рис. 7, 8), которая соответствует чисто поступательному движению (то есть $\omega = 0, k \rightarrow \infty$). Всюду под ней давление $p(\mathbf{r})$ положительно определено. При помощи (3.2) находим, что $\eta_* = 1/s_0$, и окончательно получим, что

если $\eta < 1/s_0$, то распределение давления $p(\mathbf{r})$ положительно определено на всей площадке контакта при произвольных значениях скоростей v, ω .

4. Метод дескриптивной функции

Как было показано выше, в уравнениях движения (2.9.1) отделяется система уравнений вида

$$\dot{v} = F(k), \quad \dot{k} = M(k), \quad k = \frac{v}{u}, \quad (4.1)$$

где $u, v \geq 0$. При этом $F(k) < 0$ для всех $k \geq 0$. Кроме того, поскольку чистое скольжение и вращение являются частными решениями, справедливы следующие соотношения:

$$M(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad F(k) \text{ ограничено при } k \rightarrow \infty,$$

$$F(k) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} 0, \quad M(k) < 0 \text{ и ограничено при } k \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что все траектории в квадранте $u > 0, v > 0$ стремятся к началу координат (состоянию покоя), а границы квадранта являются особыми траекториями системы (4.1).

Траектории системы (4.1) могут быть получены при помощи квадратуры

$$\frac{u}{u_0} = \exp \left(\int_{k_0}^k \frac{M(k) dk}{F(k) - kM(k)} \right).$$

Вместо того, чтобы анализировать эту квадратуру, выясним качественные свойства поведения системы, пользуясь непосредственно уравнением

$$u \frac{dk}{dt} = V(k), \quad V(k) = F(k) - kM(k). \quad (4.2)$$

Вследствие того, что $u > 0$, отсюда получаем:

- знак $\dot{k}(t)$ совпадает со знаком функции $V(k)$,
- если k_0 – корень уравнения $V(k_0) = 0$, то существует частное решение системы (4.1), для которого

$$\frac{v}{u} = k_0 = \text{const},$$

- это решение устойчиво при $V'(k_0) < 0$ и неустойчиво при $V'(k_0) > 0$.

Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

качественный вид траекторий системы (4.1) на плоскости (u, v) полностью определяется графиком дескриптивной функции $V(k)$, то есть качественно фазовый портрет системы может быть построен по графику $V(k)$ практически без вычислений.

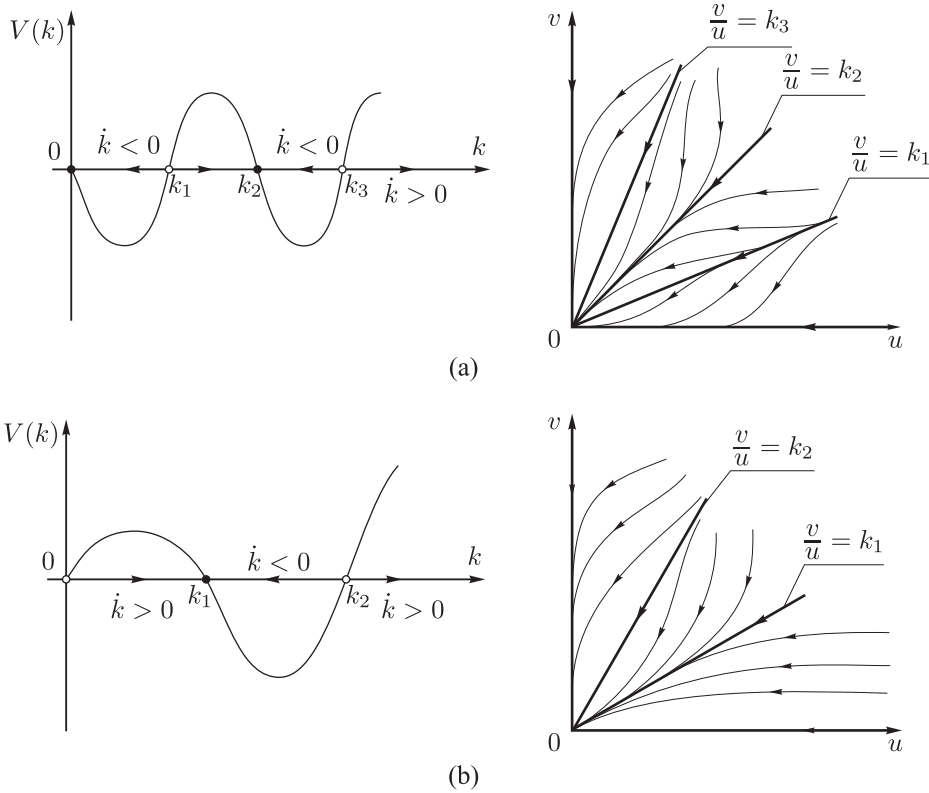


Рис. 6. Два примера дескриптивных функций $V(k)$ системы (4.2) и соответствующие им фазовые портреты. На рисунках слева стрелки на оси абсцисс указывают направление изменения $k(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичный подход к анализу динамики шайбы в предположении, что $p(\mathbf{r}) = \text{const}$, применялся в работах [9, 31, 46, 48] без использования графического представления и фазовых портретов. Используемая нами дескриптивная функция $V(k)$ отличается знаком от функции $\Phi(k)$ работы [23], в которой построены графики $\Phi(k)$ для всевозможных стационарных распределений давления $p(\mathbf{r})$ в динамически несогласованной модели.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно [3, 15], в случае динамически несогласованных моделей, когда распределение $p(\mathbf{r})$ не зависит от скоростей, сила F_τ^f и момент M_3^f могут быть выражены через момент силы трения L относительно мгновенного центра скоростей. (Напомним, что для динамически несогласованных моделей $F_n^f = 0$.) В используемых выше обозначениях получим

$$L = fR^2 \int_{\overline{D}} p(\mathbf{r}) \sqrt{(k - x_n)^2 + x_\tau^2} ds,$$

$$F_\tau^f = -\frac{\partial L}{\partial k}, \quad M_3^f = -R \left(L - \frac{\partial L}{\partial k} \right),$$

отсюда для дескриптивной функции (4.2) получим соотношение

$$mV(k) = \frac{mR^2}{I_3} k \left(L - k \frac{\partial L}{\partial k} \right) - \frac{\partial L}{\partial k}.$$



4.1. Явное представление для тонкого кольца и круга

Выполним качественный анализ динамики для тела с основанием в форме бесконечно тонкого кольца и для тела с основанием в форме круга.

1. Бесконечно тонкое кольцо. Распределение давления описывается уравнением (2.2). Таким образом оказывается, что коэффициенты в соотношениях (2.6)–(2.9) задаются однократными интегралами (3.5). Чтобы выразить их явно через полные эллиптические интегралы, воспользуемся известными соотношениями [2]:

$$I_{1/2}(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+k^2-2k\sin\theta} d\theta = 4(k+1)\mathbf{E}(k_e),$$

$$I_{-1/2}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1+k^2-2k\sin\theta}} d\theta = \frac{4}{k+1}\mathbf{K}(k_e),$$

$$k_e = \frac{2\sqrt{k}}{k+1},$$

где $k \geq 0$, \mathbf{K} , \mathbf{E} — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (4.3)$$

Используя различные подстановки и интегрирование по частям, находим:

$$B^{(c)}(k) = \frac{dI_{1/2}(k)}{dk} = \frac{2}{k} \left((k+1)\mathbf{E}(k_e) + (k-1)\mathbf{K}(k_e) \right),$$

$$A_{21}^{(c)}(k) = \frac{1}{3} \left((1-k^2)I_{-1/2}(k) + \frac{1+k^2}{k}B^{(c)}(k) \right) = \frac{2(k+1)}{3k^2} \left((k^2+1)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)^2\mathbf{K}(k_e) \right),$$

$$A_{12}^{(c)}(k) = -\frac{d}{dk} \left(kA_{21}^{(c)}(k) \right) = -\frac{2}{3k^2} \left((k+1)(2k^2-1)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)(2k^2+1)\mathbf{K}(k_e) \right),$$

$$C^{(c)}(k) = A_{12}^{(c)} \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{2}{3k} \left((k+1)(k^2-2)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)(k^2+2)\mathbf{K}(k_e) \right).$$

Теперь построим на плоскости величин k , η область положительной определенности давления на опору (3.5), получим рисунок 7, где область $p_{\min} > 0$ обозначена серым цветом. Мы видим, что кривая $p_{\min}(k, \eta) = 0$ имеет одну горизонтальную асимптоту $\eta = \eta_*$ и одну вертикальную асимптоту $k = k_*$; следовательно, справедливо следующее утверждение:

если $\eta < \eta_$, то $p(\mathbf{r})$ положительно определена при всех $k \in [0, +\infty)$, то есть данная модель применима во всем диапазоне скоростей тела.*

Значение η_* соответствует пределу $k \rightarrow +\infty$, то есть случаю чисто поступательного движения тела (3.2). Вычисляя пределы интегралов (3.5) в случае кольца, получим

$$\eta_* = \frac{1}{2\pi} \approx 0.159.$$

Учитывая, что для кольца $J = \pi$, находим, что условие $\eta < \eta_*$ равносильно неравенству $\frac{fh}{R} < \frac{1}{2}$.



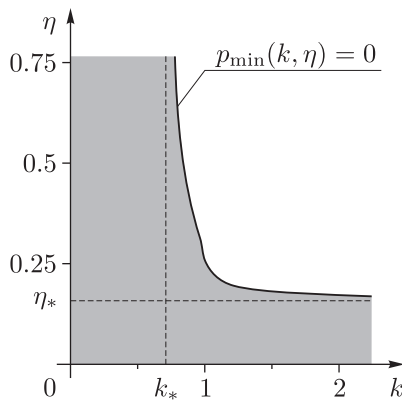


Рис. 7. Область положительной определенности $p(\mathbf{r})$ в случае бесконечно тонкого кольца (обозначена серым цветом).

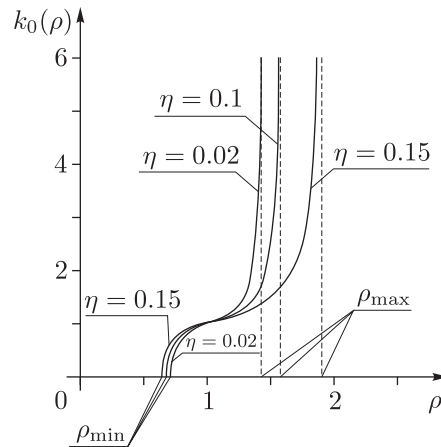


Рис. 8. Зависимость корня k_0 дескриптивной функции $V(k)$ от величины ρ при различных фиксированных η .

Для анализа динамики системы построим график дескриптивной функции $V(k)$ и соответствующий фазовый портрет на плоскости (u, v) при различных значениях $\eta < \eta_*$ и ρ .

Прежде всего заметим, что при каждом фиксированном η функция $V(k)$ ограничена, $V(0) = 0$ и в зависимости от величины ρ она либо не имеет корней, либо имеет один корень $k_0 \in (0, +\infty)$. Характерные графики $k_0(\rho)$ при различных η приведены на рисунке 8.

Таким образом, в данном случае выделяется три качественно различных типа графика $V(k)$ и соответствующих ему фазовых портретов на плоскости (u, v) (см. рис. 9):

- I. $\rho_{\max}(\eta) < \rho$, тогда $V(k) > 0$ при всех $k \in (0, +\infty)$, при этом
 - чистое скольжение ($u \equiv 0$) – устойчиво, а чистое вращение ($v \equiv 0$) – неустойчиво,
 - частного решения с $v/u = \text{const}$ не существует;
- II. $\rho_{\min}(\eta) < \rho < \rho_{\max}(\eta)$, тогда имеется один корень $V(k_0) = 0$, $k_0 \in (0, +\infty)$, при этом
 - как чистое скольжение ($u \equiv 0$), так и чистое вращение ($v \equiv 0$) – неустойчивы,
 - существует устойчивое частное решение, для которого $v/u = k_0 = \text{const}$;
- III. $\rho < \rho_{\min}(\eta)$, тогда $V(k) < 0$ при всех $k \in (0, +\infty)$, при этом
 - чистое скольжение ($u \equiv 0$) – неустойчиво, чистое вращение ($v \equiv 0$) – устойчиво,
 - частных решений с $v/u = \text{const}$ не существует.

Соответствующие фазовые портреты на плоскости (u, v) приведены на рисунке 9.

Решая уравнения $V(k)|_{k \rightarrow \infty} = 0$ и $V'(k)|_{k=0} = 0$, находим:

$$\rho_{\min}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{\eta^2}{2\eta_*^2}}}, \quad \rho_{\max}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{2 - \frac{\eta^2}{\eta_*^2}}}, \quad \eta_* = \frac{1}{2\pi}.$$



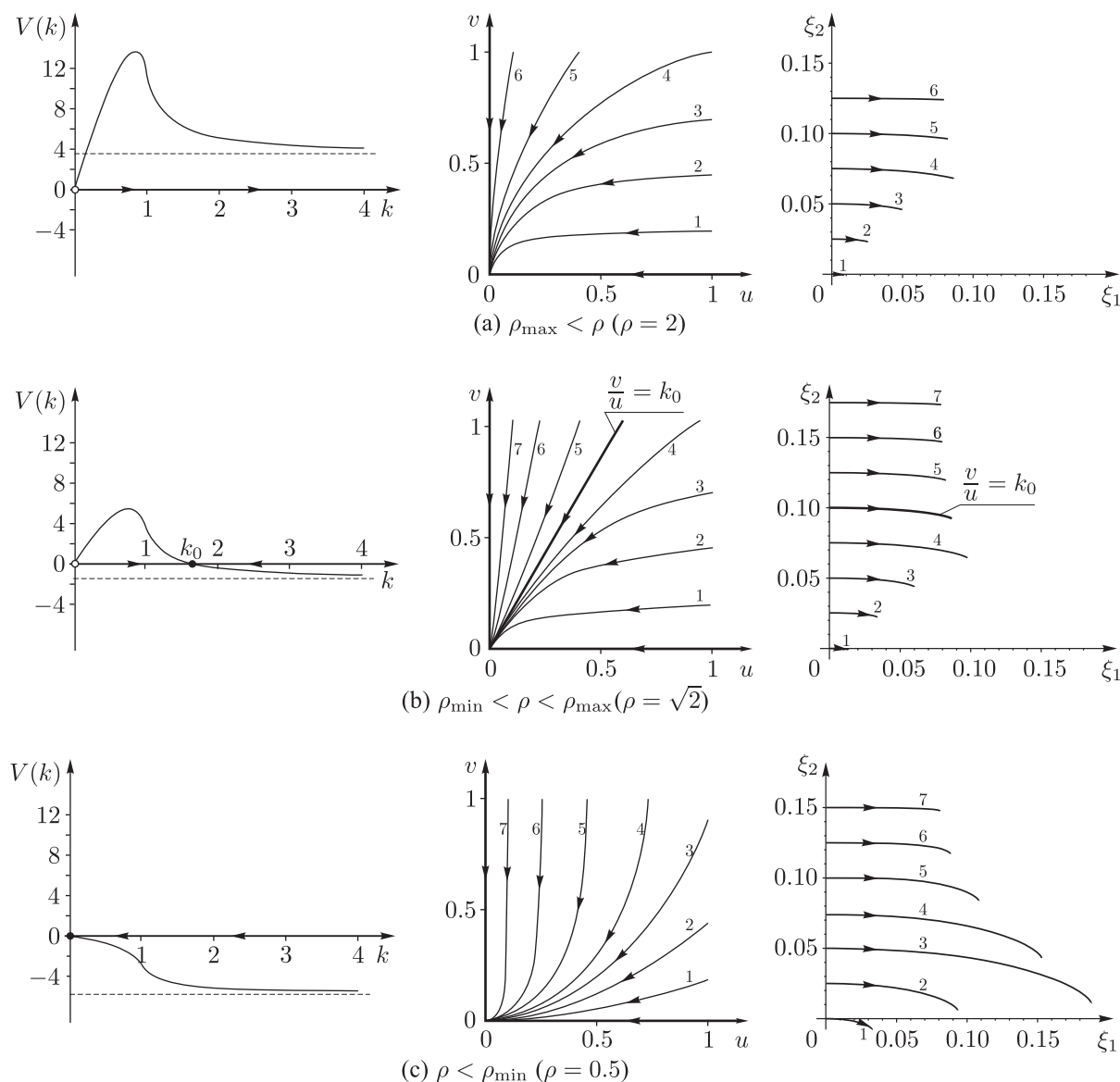


Рис. 9. Три возможных типа дескриптивной функции $V(k)$ при $\eta = 0.1$, отвечающие им фазовые портреты на плоскости (u, v) и траектории центра масс тела (соответствующие траектории на плоскостях (u, v) и (ξ_1, ξ_2) имеют одни и те же номера). На рисунках в левом столбце стрелки на оси абсцисс указывают направление изменения величины $k(t)$.

2. Круг. В этом случае распределение давления записывается в общем виде (2.1) и зависит от двух переменных x_n, x_τ . Тем не менее, проинтегрировав сначала по переменной x_τ , а затем — по частям по переменной x_n , удастся представить выражения для коэффициентов в соотношениях (2.6)–(2.9) через полные эллиптические интегралы:

$$A_{12}(k) = \frac{2}{45k^2} \left((k+1)(8k^4 - 13k^2 + 3)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)(8k^4 - 5k^2 - 3)\mathbf{K}(k_e) \right),$$

$$A_{21}(k) = \frac{2(k+1)}{45k^2} \left((2k^2 - 3)(k-1)^2\mathbf{K}(k_e) - (2k^4 - 7k^2 - 3)\mathbf{E}(k_e) \right),$$

$$B(k) = \frac{2(k+1)}{3k} \left((k^2+1)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)^2\mathbf{K}(k_e) \right),$$

$$C(k) = \frac{4}{15k} \left((k^5 - k^4 - k + 1)\mathbf{K}(k_e) - (k^5 + k^4 - k^3 - k^2 + k + 1)\mathbf{E}(k_e) \right).$$

В случае круглого основания графики функций $A_{12}(k)$, $A_{21}(k)$, $B(k)$, $C(k)$ приведены на рисунке 10.

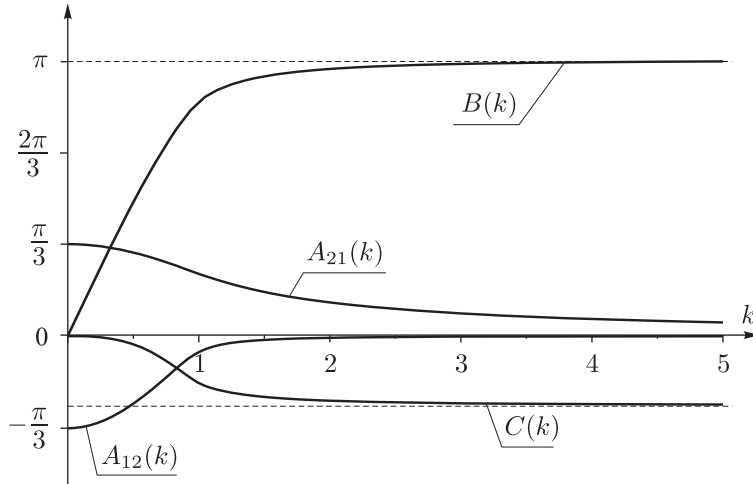


Рис. 10

Аналогично случаю бесконечно тонкого кольца, строим на плоскости величин k, η область положительной определенности давления (2.1) на опору (рис. 11). Вычисляем значение η_* , ограничивающее сверху область положительной определенности давления при всех положительных k ; в этом случае $\eta_* = \frac{1}{\pi} \approx 0.318$, а учитывая, что для круга $J = \frac{\pi}{4}$, находим что условие $\eta < \eta_*$ равносильно неравенству $\frac{fh}{R} < \frac{1}{4}$.

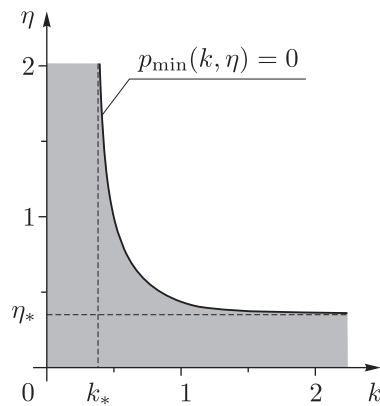


Рис. 11. Область положительной определенности $p(r)$ в случае круглого основания (обозначена серым цветом).

Отметим одну особенность в движении тела: все траектории системы на плоскости (u, v) не пересекают координатные оси $u = 0, v = 0$ и заканчиваются в точке $u = 0, v = 0$; следовательно, теоретически верчение и поступательное движение прекращаются одновременно.



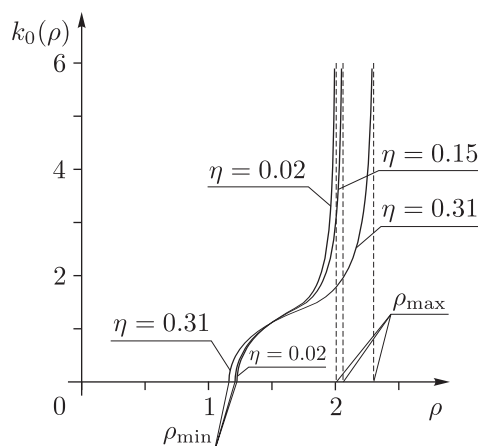


Рис. 12. Зависимость корня k_0 дескриптивной функции $V(k)$ для случая круглого основания шайбы от величины ρ при различных фиксированных значениях η .

Тем не менее, как видно на рисунке 9 и рисунке 13, поведение траекторий в окрестности осей может различаться, что приводит к существенным различиям в динамике тела (см. также [48]):

- траектории касаются оси $v = 0$ (рис. 9с, рис. 13с, см. также рис. 6), на практике это приводит к тому, что сначала прекращается поступательное движение, и лишь спустя некоторое время — вращение тела;
- траектории касаются оси $u = 0$ (рис. 9а, рис. 13а), при этом на практике сначала прекращается вращение, после чего тело некоторое время движется чисто поступательно;
- траектории касаются прямой $\frac{v}{u} = k_0$ (рис. 9b, рис. 13b), в эксперименте наблюдается одновременное прекращение вращательного и поступательного движения; кроме того, чистое вращение и чисто поступательное движение неустойчивы: так, при попытке запустить тело скользить без вращения оно (вследствие малых возмущений) начнет вращаться, и наоборот.

Таким образом, в финальный момент движения предельное значение отношения $k = \frac{v}{R\omega}$ зависит от безразмерного радиуса инерции тела ρ , но в случае линейного распределения давления появляется дополнительная зависимость от параметра η . Для каждого значения η существует интервал значений радиуса инерции $(\rho_{\min}, \rho_{\max})$, такой, что при $\rho > \rho_{\max}$ имеем $k \rightarrow \infty$, что соответствует чистому скольжению на финальном этапе движения, при $\rho < \rho_{\min}$ имеем $k \rightarrow 0$, что соответствует чистому вращению на финальном этапе движения, при $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$ имеем $k \rightarrow k_0$, что соответствует одновременному прекращению вращения и скольжения тела.

Кроме того, найденные условия положительной определенности давления цилиндра на опору (безотрывности движения) в случае кольцевого и круглого оснований согласуются с условиями, приведенными ранее в [6, 20]. Показано, что данная модель применима во всем диапазоне скоростей тела при условии $\eta < \frac{1}{2\pi}$ (равнозначного условию $\frac{fh}{R} < \frac{1}{2}$ для тонкого кольца) и при условии $\eta < \frac{1}{\pi}$ (равнозначного условию $\frac{fh}{R} < \frac{1}{4}$ для круглого основания).

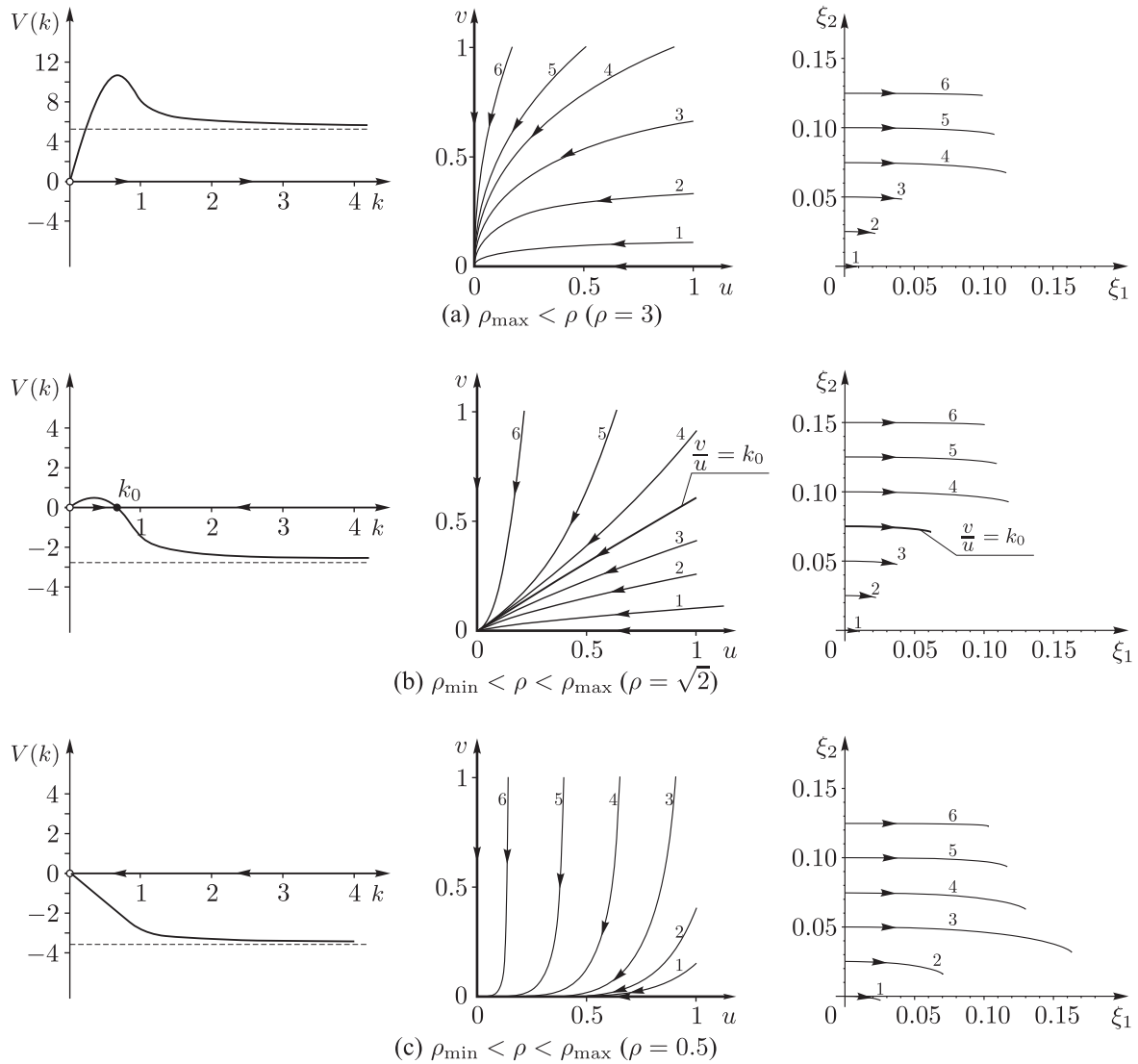


Рис. 13. Три возможных типа дескриптивной функции $V(k)$ для случая круглого основания шайбы при $\eta = 0.15$, отвечающие им фазовые портреты на плоскости (u, v) и траектории центра масс тела (соответствующие траектории на плоскости (u, v) и (ξ_1, ξ_2) имеют одни и те же номера). На рисунках в левом столбце стрелки на оси абсцисс указывают направление изменения величины $k(t)$. В случае (b) $k_0 \approx 0.659$.

Полагая $\eta = 0$ в выражениях для силы (2.7) и момента трения (2.8), получим выражения для тонкого диска $F(k) = \frac{1}{\pi}B(k)$ и $M(k) = \frac{1}{\pi}(A_{21}(k) - A_{12}(k))$, которые совпадают с опубликованными ранее в [7, 48] (см. рис. 14). Однако, при сравнении надо иметь в виду, что эллиптические интегралы в литературе представляют в виде функций различных аргументов. Напомним, что в данной работе используется представление (4.3). Из рисунка 14 видно, отмеченную еще в [48], неточность в формульном представлении момента трения, приведенном в [31] при $k \geq 1$. Также отметим, что в работе [48] авторы исправили несколько неточностей в выражении (3а) своей более ранней работы [47].



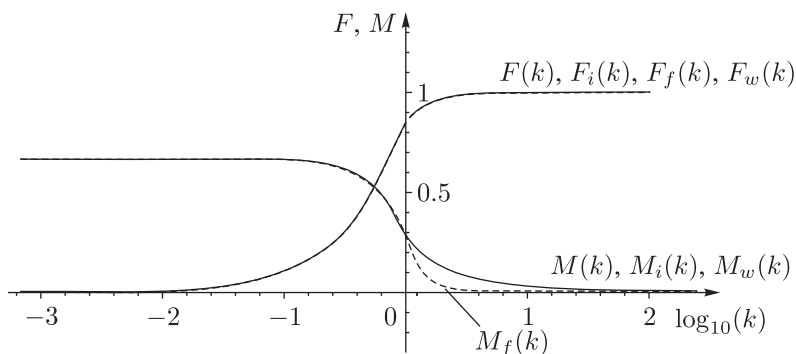


Рис. 14. Безразмерные силы трения и моменты трения как функции безразмерного параметра k : полученные в настоящей работе — $F(k)$, $M(k)$, в работе [7] — $F_i(k)$, $M_i(k)$, в работе [48] — $F_w(k)$, $M_w(k)$ (сплошная линия) и в работе [31] — $F_f(k)$, $M_f(k)$ (пунктирная линия). Для удобства графического представления ось абсцисс представлена в логарифмическом масштабе $\log_{10}(k)$.

5. Дискуссия

Как было показано выше, в задаче о скольжении сбалансированного тела с осесимметричной площадкой контакта, в предположении линейного распределения давления тела на опору и закона сухого трения, качественные свойства поведения системы существенно зависят от трех безразмерных параметров η , ρ , r_0 . При этом в общем случае наблюдается отклонение траектории от прямолинейной (направление отклонения противоположно отклонению камней в игре в кёрлинг и отклонению тела в случае эффекта Магнуса).

Открытой проблемой остается экспериментальная проверка найденных закономерностей и выяснение условий применимости данной модели (материалы тел и поверхностей, их размеры, степень обработки и т. д.) как на качественном, так и на количественном уровне.

Другая нерешенная задача связана с описанием движения катящихся по шероховатой поверхности тел с возможным проскальзыванием на площадке контакта, при учете динамического распределения сил реакции на опорной площадке. Данная проблема осложняется еще и тем, что в процессе движения явление качения с проскальзыванием может чередоваться с чистым качением. Как правило, для описания движения без проскальзывания используются две модели с различными неголономными связями, приводящие в некоторых случаях к существенному различию возможного типа поведения [26–28].

Авторы благодарят А. В. Борисова, А. А. Килина, А. П. Иванова, Т. Б. Иванову, Ю. В. Каравая и Д. В. Трещева за обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Болотов Е. А. О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением. Москва: Университетская тип., 1906. 147 с.
- [2] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. 4-е изд. Москва: Физматгиз, 1963. 1100 с.
- [3] Жуковский Н. Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Полное собр. соч.: В 16 тт.: Т. 1 / Н. Е. Жуковский; ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского, Комис. по изданию трудов Н. Е. Жуковского, Ред. коллегия: С. А. Чаплыгин, А. И. Некрасов, В. А. Архангельский и др. Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1937. С. 433–449. [Первоначально напечатана

- в «Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии», 1897, т. 9, вып. 1, с. 339–354.]
- [4] Журавлёв В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, № 5, с. 762–767.
- [5] Журавлёв В. Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // МГТ, 2006, № 6, с. 3–9.
- [6] Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ, 2009, т. 73, № 2, с. 189–203.
- [7] Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // МГТ, 1981, № 4, с. 17–28.
- [8] Карапетян А. В., Русинова А. М. Качественный анализ динамики диска на наклонной плоскости с трением // ПММ, 2011, т. 75, № 5, с. 731–737.
- [9] Киреенков А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // МГТ, 2002, № 1, с. 60–67.
- [10] Киреенков А. А., Семендяев С. В., Филатов В. Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // МГТ, 2010, № 6, с. 192–202.
- [11] Крагельский И. В. Трение и износ. Москва: Машиностроение, 1968. 480 с.
- [12] Крагельский И. В., Виноградова И. Э. Коэффициенты трения: Справочное пособие. Москва: Машгиз, 1962. 220 с.
- [13] Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. Москва: Машиностроение, 1977. 526 с.
- [14] Крагельский И. В., Щедров В. С. Развитие науки о трении. Сухое трение. Москва: АН СССР, 1956. 236 с.
- [15] Лурье А. И. Аналитическая механика. Москва: Наука, 1961. 824 с.
- [16] Пенлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. 316 с.
- [17] Петров П. Н., Рейнольдс О., Зоммерфельд А., Мичель А., Жуковский Н. Е., Чаплыгин С. А. Гидродинамическая теория смазки. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. 576 с.
- [18] Розенблат Г. М. Динамические системы с сухим трением. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 204 с.
- [19] Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками // Докл. РАН, 2010, т. 435, № 4, с. 475–478.
- [20] Сальникова Т. В., Трещев Д. В., Галлямов С. Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 83–101.
- [21] Самсонов В. А. О трения при скольжения и верчении тела // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 1981, № 2, с. 76–78.
- [22] Трещев Д. В., Ермакова Н. Н., Иванова Т. Б. О финальном движении цилиндрических тел по шероховатой плоскости // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 2–20.
- [23] Федичев О. Б., Федичев П. О. Торможение и остановка плоских тел, скользящих по шероховатой горизонтальной поверхности // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 549–558.
- [24] Фуфаев Н. А. Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения // ПММ, 1966, т. 30, № 1, с. 67–72.
- [25] Шиллер Н. Н. Заметка о равновесии твердого тела при действии трения на некоторую плоскую часть его поверхности // Тр. Отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания, 1892, т. 5, № 1, с. 17–19.
- [26] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [27] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.



- [28] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 8, no. 3, pp. 277–328.
- [29] Boussinesq J. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885. 721 pp.
- [30] Contensou P. Couplage entre frottement de pivotement et frottement de pivotement dans la théorie de latoupie // Kreiselprobleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina. Berlin: Springer, 1963. P. 201–216. (См. также: Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии: Сб. научн. ст. / Г. Циглер (ред.). Москва: Мир, 1967. С. 60–77.)
- [31] Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. E. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett., 2003, vol. 90, no. 24, 248302, 4 pp. (См. также: Фаркаш З., Бартельс Г., Унгер Т., Вольф Д. О силе трения при поступательном и вращательном движении плоского тела // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 1, с. 139–146.)
- [32] Field P. On the motion of a disc with three supports on a rough plane // Phys. Rev. (Series I), 1912, vol. 35, no. 3, pp. 177–184.
- [33] Goyal S. Planar sliding of a rigid body with dry friction: Limit surfaces and dynamics of motion: Ph. D. Thesis. Cornell University, Ithaca, 1989.
- [34] Goyal S., Ruina A., Papadopoulos J. Planar sliding with dry friction: Part 1: Limit surface and moment function // Wear, 1991, vol. 143, pp. 307–330.
- [35] Goyal S., Ruina A., Papadopoulos J. Planar sliding with dry friction: Part 2: Dynamics of motion // Wear, 1991, vol. 143, pp. 331–352.
- [36] Jellett J. H. A treatise on the theory on friction. London: MacMillan, 1872. 220 pp. (См. также: Джеллетт Д. Х. Трактат по теории трения. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 264 с.)
- [37] Jensen M. T., Shegelski M. R. A. The motion of curling rocks: Experimental investigation and semi-phenomenological description // Can. J. Phys., 2004, vol. 82, pp. 1–19.
- [38] Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 452 pp. (См. также: Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989. 510 с.)
- [39] MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies. New York: McGraw-Hill, 1936. 478 pp. (См. также: Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. Москва: ИИЛ, 1951. 468 с.)
- [40] Shegelski M. R. A., Holenstein R. Rapidly rotating sliding cylinders: Trajectories with large lateral displacements // Can. J. Phys., 2002, vol. 80, pp. 141–147.
- [41] Shegelski M. R. A., Goodvin G. L., Booth R., Bagnall P., Reid M. Exact normal forces and trajectories for a rotating tripod sliding on a smooth surface // Can. J. Phys., 2004, vol. 82, pp. 875–890.
- [42] Shegelski M. R. A., Niebergall R., Walton M. A. The motion of a curling rock // Can. J. Phys., 1996, vol. 74, pp. 663–670.
- [43] Shegelski M. R. A., Reid M. Comment on: «Curling rock dynamics — The motion of a curling rock: inertial vs. noninertial reference frames» // Can. J. Phys., 1999, vol. 77, pp. 903–922.
- [44] Shegelski M. R. A. The motion of a curling rock: Analytical approach // Can. J. Phys., 2000, vol. 78, pp. 857–864.
- [45] Erismann Th. Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes // Z. Angew. Math. Phys., 1954, vol. 5, no. 5, pp. 355–388.
- [46] Voyerli K., Eriksen E. On the motion of an ice hockey puck // Amer. J. Phys., 1985, vol. 53, pp. 1149–1153.
- [47] Weidman P. D., Malhotra C. P. Regimes of terminal motion of sliding spinning disks // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, 264303, 4 pp.
- [48] Weidman P. D., Malhotra Ch. P. On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction // Phys. D, 2007, vol. 233, no. 1, pp. 1–13. (См. также: Вайдман П. Д., Мальотра Ч. О финальном движении скользящих и вращающихся дисков с однородным кулоновым трением // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 339–365.)

- [49] Wittenburg J. Ebene Bewegungen bei flächenhaft verteilten Reibungskräften // Z. Angew. Math. Phys., 1970, vol. 5, pp. 637–640.

On the dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane

Nadezhda N. Erdakova¹, Ivan S. Mamaev²

¹Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles

^{1,2}Udmurt State University

²Institute of Computer Science

Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

¹enn@rcd.ru, ²mamaev@rcd.ru

In this paper we investigate the dynamics of a body with a flat base sliding on a horizontal plane under the assumption of linear pressure distribution of the body on the plane as the simplest dynamically consistent friction model.

For analysis we use the descriptive function method similar to the methods used in the problems of Hamiltonian dynamics with one degree of freedom and allowing a qualitative analysis of the system to be made without explicit integration of equations of motion. In addition, we give a systematic review of the well-known experimental and theoretical results in this area.

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Keywords: dry friction, linear pressure distribution, two-dimensional motion, planar motion, Coulomb law

Received September 2, 2013, accepted September 16, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 521–545 (Russian)