



КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

УДК: 531.44+531.384

MSC 2010: 70F40, 70E18

Динамика твердого тела, опирающегося острым краем на наклонную плоскость, при наличии сухого трения

И. С. Мамаев, Т. Б. Иванова

В работе изучается динамика твердого тела (стержня), опирающегося острым концом на шероховатую плоскость, которое может двигаться так, что точка контакта либо неподвижна, либо проскальзывает, и, кроме того, может также отрываться от опоры. В работе динамика системы рассмотрена в рамках трех механических моделей, которые описывают различные режимы движения. Приведены границы области определения каждой из моделей и проанализированы переходы между ними при различных коэффициентах трения на горизонтальной и наклонной поверхностях.

Ключевые слова: стержень, парадокс Пенлеве, сухое трение, отрыв, удар трением

Получено 28 марта 2013 года

После доработки 13 мая 2013 года

Работа выполнена при поддержке АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2012–2014 годы, № 1.1248.2011 «Неголономные динамические системы и проблемы управления», гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1. Работа Т. Б. Ивановой поддержана грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук МД-2324.2013.1.

Мамаев Иван Сергеевич

mamaev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований;

лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Иванова Татьяна Борисовна

tbesp@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Содержание

1. Введение	568
2. Математические модели, описывающие различные типы движения	570
2.1. Перевернутый маятник	571
2.2. Скользящий стержень	572
2.3. Свободный стержень	573
2.4. Проблемы непротиворечивой смены режимов движения	574
3. Границы области возможных движений в различных моделях, их пересечение и области парадоксов	575
3.1. Область возможного отрыва	576
3.2. ОВД скользящего стержня	576
3.3. ОВД перевернутого маятника	577
4. Качественный анализ динамики, смена режимов и парадоксы	580
4.1. Коэффициент трения меньше критического ($\mu \leq \mu^*$)	580
4.2. Пример траектории со сменой режимов движения при $\mu < \mu^*$	585
4.3. Коэффициент трения больше критического для горизонтальной плоскости ($\varepsilon = 0, \mu > \mu^*$)	586
4.4. Коэффициент трения скольжения больше критического для наклонной плоскости ($\varepsilon > 0, \mu > \mu^*$)	590
5. Заключение	591

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем плоское движение тела, которое опирается острым концом на шероховатую плоскость, точнее — однородного стержня, который одной точкой соприкасается с опорной плоскостью, но полученные результаты могут быть обобщены на случай более сложных тел и соприкасающихся поверхностей. Применение различных математических моделей, позволяющих объяснить получаемые противоречия (парадоксы) в рассматриваемой системе, может в дальнейшем быть перенесено на более сложные системы (например, диск Эйлера) и объяснение динамических эффектов, в частности отрывов, наблюдаемых при его их движении [2, 11].

Так как плоскость реализует одностороннюю связь и тело может двигаться так, что его конец, опирающийся на плоскость, либо неподвижен, либо проскальзывает, либо отрывается от опоры, в работе динамика системы рассмотрена в рамках трех механических моделей, которые описывают различные режимы движения. Также предполагается, что в точке контакта с плоскостью действует закон сухого трения Кулона.

Но, как известно, в системах с кулоновским трением в сочетании с предположением об абсолютной твердости тела и поверхности могут возникать различные парадоксальные ситуации, когда решение либо не существует, либо неединственно при одних и тех же начальных условиях. Такого рода парадоксы, называемые парадоксами Пенлеве, относительно плоского движения тела с одной точкой контакта впервые, по-видимому, исследовал Е. А. Болотов [8], продолжая дискуссию, начатую П. Пенлеве [20], Л. Лекорню [16], Де Спарром [9], Ф. Пфейфером [21] и другими, в ходе которой для разрешения полученных парадоксов в системе Пенлеве–Клейна авторами были введены дополнительные гипотезы



о наличии упругих деформаций в точке контакта и мгновенной остановке (заклинивании) при достижении границы парадоксальной области. Аналогичный подход для системы с многими степенями свободы развит в работе Ле Суан Аня [17].

Отметим, что на сегодняшний день известно немало механических систем с кулоновским трением, в которых встречаются парадоксы неединственности или несуществования решения (например, тормозная колодка [24], лестница, опирающаяся на горизонтальный пол и вертикальную стену [5], система Пенлеве – Аппеля [20] и другие). Из недавних исследований парадоксов в системах с кулоновым трением выделим работы Н. А. Фуфаева [25], Ю. И. Неймарка [18] и В. А. Самсонова [23], в которых исследуются различные типы движений систем на основе анализа фазовых траекторий в зависимости от значений параметров системы (наглядность и эффективность использования анализа фазовой плоскости продемонстрирована авторами [19, 23] также на примере тормозной колодки).

В отличие от указанных (физических) подходов к разрешению парадоксов существуют и другие подходы, более формальные, зачастую не раскрывающие механического смысла полученного результата, но при этом требующие привлечения довольно громоздкого математического аппарата. В частности, в работе Д. Стюарта [4] парадокс несуществования решения объясняется наличием «импульсивных» сил, возникающих при столкновении с поверхностью. Автор [4] использует «принцип» максимума диссипации, теорию дифференциальных вариационных неравенств, условия дополненности и другие нетривиальные математические методы. Однако в рассматриваемой Стюартом задаче о падении однородного стержня развитая теория применена лишь в отношении парадокса несуществования, хотя, как известно, в этой системе существуют области начальных условий, для которых решение неединственно (см., например [14]). Кроме того, для полученного «разрешения парадокса» механический смысл не понятен и автором не поясняется.

Некоторые из приведенных в данной работе результатов для однородного стержня были ранее получены в работах [1, 22]. Так, в работе [1] приводится критическое значение коэффициента трения, при котором возникают парадоксы несуществования и неединственности плоского движения стержня, и очень подробно анализируется поведение системы вблизи особой точки на границе области отрыва при коэффициентах трения больше критического. В работе [22] исследуются условия, которым должны удовлетворять начальные данные и параметры тела при безотрывном движении, то есть фактически приведена лишь граница, на которой нормальное ускорение точки контакта становится положительным. Тем не менее, приведенного в указанных работах анализа явно недостаточно для понимания динамики системы в целом.

Вопрос о возможности отрыва точки контакта однородного стержня от плоскости обсуждается также в работах А. П. Иванова [10, 11, 13, 14] в связи с исследованием движения систем с односторонними связями в более общих постановках. В частности, в работе [13] с помощью геометрического подхода, основанного на введении некоторого вспомогательного пространства параметров, разбитого на непересекающиеся области по числу возможных видов движения, получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи о движении тела по поверхности с трением. В случае скольжения и покоя показана возможность существования трех решений одновременно (отрыв, покой и скольжение точки контакта). В [14] подробно исследовано движение стержня по абсолютно шероховатой опоре, определены области несогласованности знака нормальной реакции и нормального ускорения (парадоксов), показано, что исключение из рассмотрения движений с проскальзыванием точки контакта приводит к возникновению парадокса несуществования решения, которого не наблюдается при учете ограниченности реального коэффициента трения.

Данная работа является дополнением и обобщением ранее полученных результатов для плоского движения тела с одной точкой контакта на шероховатой плоскости. Для доказательства большинства утверждений мы воспользуемся методом построения фазовых портретов, дополнив его построением границ областей возможных движений соответствующих моделей. Данный метод является наглядным и позволяет избежать громоздких аналитических вычислений, но при этом ввести классификацию различных решений в зависимости от параметров системы.

2. Математические модели, описывающие различные типы движения

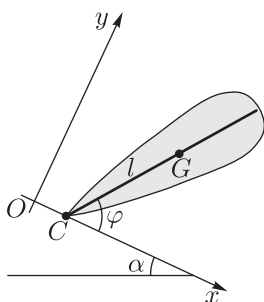


Рис. 1. Тело, опирающееся одной точкой на наклонную плоскость.

Рассмотрим плоское движение тела, опирающегося одной точкой C на шероховатую плоскость. Введем обозначения (рис. 1):

α — угол наклона плоскости к горизонту,

(x, y) — координаты центра масс G тела относительно неподвижной системы координат (ось Ox — вдоль плоскости),

φ — угол между прямой CG и плоскостью,

m — масса тела,

I — центральный момент инерции,

l — расстояние от центра масс до точки контакта тела.

Будем предполагать, что к центру масс стержня приложена внешняя сила, нормальная и тангенциальная составляющие которой равны, соответственно, P_n и P_t (если кроме силы тяжести mg нет других сил, то $P_n = mg \cos \alpha$, $P_t = mg \sin \alpha$). Нормальную и тангенциальную составляющие сил реакции, действующих на стержень в точке контакта со стороны плоскости, обозначим R_n и R_t соответственно.

Как было отмечено выше, описать движение системы при помощи одной механической модели невозможно, так как в зависимости от начальных условий точка контакта либо неподвижна, либо проскальзывает, либо отрывается от опоры. Это приводит к тому, что необходимо использовать как минимум три механические модели, описывающие различные режимы движения: модель перевернутого маятника, скользящего стержня и свободного стержня. В случае необходимости индексы переменных для описания каждой из систем будем обозначать, соответственно, p (*pendulum* — маятник), s (*sliding* — скольжение), f (*free* — свободный).

При исследовании системы будем полагать, что

– контакт с плоскостью точечный,

– в точке контакта действует закон сухого трения Кулона.

Других дополнительных гипотез, связанных с проблемами реализации такого контакта, и возможных ограничений на коэффициент трения мы здесь делать не будем.

Для удобства все уравнения движения будем записывать в безразмерном виде. Для этого выберем в качестве единицы измерения времени величину $\sqrt{l/g}$ и в качестве единицы расстояния — величину l , то есть в уравнениях сделаем замену координат и времени:

$$\frac{x}{l} \rightarrow x, \quad \frac{y}{l} \rightarrow y, \quad \sqrt{\frac{g}{l}} dt \rightarrow dt. \quad (2.1)$$

Кроме того, определим следующие безразмерные величины:

$$\kappa = \frac{I}{ml^2}, \quad \varepsilon = \frac{P_t}{mg}, \quad N = \frac{R_n}{mg}, \quad R_\tau = \frac{R_t}{mg}. \quad (2.2)$$

В дальнейшем при анализе динамики системы в качестве конкретного примера будем рассматривать случай, когда тело является однородным стержнем, при этом $I = ml^2/3$, $\kappa = 1/3$, $\varphi \in [0, \pi]$.

2.1. Перевернутый маятник

Данная модель соответствует тому, что точка контакта C не проскальзывает и не отрывается от поверхности (рис. 2а), то есть в данном случае на стержень наложены две связи,

$$x_c \equiv \text{const}, \quad y_c \equiv 0, \quad (2.3)$$

где (x_c, y_c) — координаты точки контакта, связанные с координатами центра масс (x, y) следующим образом:

$$x_c = x - \cos \varphi, \quad y_c = y - \sin \varphi. \quad (2.4)$$

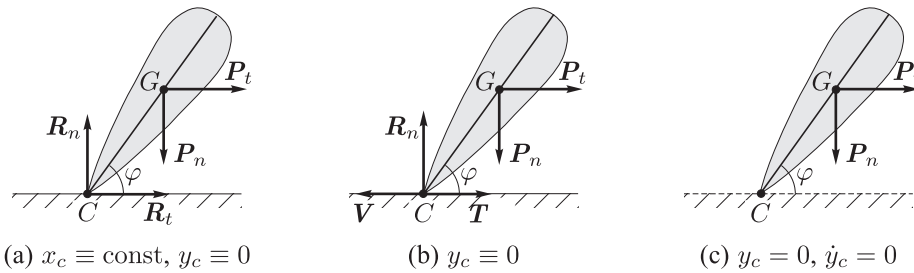


Рис. 2. Схематическое изображение рассматриваемых механических моделей динамики с указанием действующих сил (знак тождественного равенства обозначает, что наложена соответствующая связь, в то время как знак равенства в случае (с) отвечает специальному выбору начальных условий).

Следовательно, реакция со стороны плоскости в точке C имеет нормальную N и тангенциальную R_τ составляющие.

Уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot{x} = R_\tau + \varepsilon, \quad \ddot{y} = N - 1, \quad \kappa \ddot{\varphi} = R_\tau \sin \varphi - N \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Область применимости данной модели определяется условиями безотрывности и отсутствия скольжения (то есть сила реакции лежит внутри конуса трения):

$$N > 0, \quad \mu N > |R_\tau|,$$

где μ — коэффициент трения.

Таким образом, для тех режимов движения системы, которые описываются моделью перевернутого маятника, область возможных движений (в дальнейшем ОВД) является трехмерным многообразием (с краем), задаваемым следующим образом:

$$M_p^3 = \{(x_c, \varphi, \dot{\varphi}) \mid x_c = \text{const}, 0 \leq \varphi \leq \pi, N = N_p(\varphi, \dot{\varphi}) \geq 0, \mu N - |R_\tau| = f_r(\varphi, \dot{\varphi}) \geq 0\}. \quad (2.6)$$



ЗАМЕЧАНИЕ 1. Необходимость рассматривать в этом случае семейство двумерных многообразий $(\varphi, \dot{\varphi})$, параметризуемое координатой точки контакта x_c , вызвана тем, что при возможной смене режимов движения (между перевернутым маятником и скользящим стержнем) остановка точки контакта происходит при различных значениях x_c .

Дифференцируя уравнение связи (2.3), с учетом соотношений (2.4) найдем компоненты силы реакции со стороны плоскости:

$$\begin{aligned} N &= N_p(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\kappa + \sin^2 \varphi - \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi}{1 + \kappa} - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ R_\tau &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \varepsilon (\kappa + \cos^2 \varphi)}{1 + \kappa} - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя эти выражения в (2.5), получим:

– динамика перевернутого маятника в фазовом пространстве \mathcal{M}_p^3 описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1 + \kappa} (\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi),$$

– траектории системы являются линиями уровня интеграла энергии

$$E = \frac{1 + \kappa}{2} \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi - \varepsilon \cos \varphi = \text{const.}$$

2.2. Скользящий стержень

В данной модели точка контакта C движется по плоскости без отрыва со скоростью $V = \dot{x}_c$ (рис. 2b), что соответствует одной связи:

$$y_c \equiv 0. \quad (2.8)$$

Поэтому сила реакции в точке контакта имеет только нормальную составляющую N . Кроме того, в точке контакта действует сила трения

$$T = -\sigma \mu N, \quad \sigma = \text{sign} V. \quad (2.9)$$

Уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot{x} = \varepsilon - \sigma \mu N, \quad \ddot{y} = N - 1, \quad \kappa \ddot{\varphi} = -\sigma \mu N \sin \varphi - N \cos \varphi. \quad (2.10)$$

Область применимости данной модели определяется неравенством $N > 0$, $\dot{x}_c \neq 0$.

Таким образом, в модели скользящего стержня ОВД состоит из двух четырехмерных многообразий

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s^{4(+)} &= \{(\varphi, \dot{\varphi}, x_c, \dot{x}_c) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, N = N_s(\varphi, \dot{\varphi}, x_c, \dot{x}_c) \geq 0, \dot{x}_c > 0\}, \\ \mathcal{M}_s^{4(-)} &= \{(\varphi, \dot{\varphi}, x_c, \dot{x}_c) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, N = N_s(\varphi, \dot{\varphi}, x_c, \dot{x}_c) \geq 0, \dot{x}_c < 0\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

которые граничат друг с другом по многообразию $\{\dot{x}_c = 0\}$.

Дифференцируя (2.4), с учетом (2.8), (2.10) получим условие сохранения связи в форме

$$\begin{aligned} \ddot{y}_c &= -B(\varphi, \dot{\varphi}) + A(\varphi)N = 0, \\ B(\varphi, \dot{\varphi}) &= 1 - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad A(\varphi) = \frac{1}{\kappa} (\kappa + \cos^2 \varphi + \sigma \mu \cos \varphi \sin \varphi). \end{aligned} \quad (2.12)$$



Знак $B(\varphi, \dot{\varphi})$ в данном случае выбран аналогично обозначениям, часто используемым в литературе (см., например, [1, 12]).

Из (2.12) находим силу реакции и соответствующую силу трения:

$$N = N_s(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{B(\varphi, \dot{\varphi})}{A(\varphi)}, \quad T = -\sigma\mu N = -\frac{\sigma\mu B(\varphi, \dot{\varphi})}{A(\varphi)}. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.10), получим:

– динамика скользящего стержня в фазовом пространстве M_s^4 описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - 1)(\sigma\mu \sin \varphi + \cos \varphi)}{\kappa + \cos^2 \varphi + \sigma\mu \cos \varphi \sin \varphi}, \\ \dot{V} &= \frac{(\sigma\mu \sin \varphi + \cos \varphi)(\dot{\varphi}^2(\kappa + 1) - \sin \varphi) - \sigma\mu\kappa}{\kappa + \cos^2 \varphi + \sigma\mu \cos \varphi \sin \varphi} + \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.14)$$

– полная энергия

$$E = \frac{\kappa + 1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{V^2}{2} - V\dot{\varphi} \sin \varphi + \sin \varphi - \varepsilon(x_c + \cos \varphi)$$

в результате работы силы трения уменьшается:

$$\frac{dE}{dt} = -\mu|V|N_s. \quad (2.15)$$

Так как первое уравнение (2.14) явно зависит только от $\sigma = \text{sign}V = \pm 1$, а не от величины скорости V , при анализе области возможных движений и фазовых траекторий скользящего стержня будем проецировать их на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$. Таких проекций также будет две: при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$.

2.3. Свободный стержень

Уравнения движения системы в момент отрыва, когда со стороны опоры на тело не действуют силы реакции (рис. 2с), имеют наиболее простой вид

$$\ddot{x} = \varepsilon, \quad \ddot{y} = -1, \quad \ddot{\varphi} = 0. \quad (2.16)$$

Дифференцируя (2.4), с учетом (2.16) получим, что нормальная составляющая ускорения точки контакта в момент отрыва зависит только от $\varphi, \dot{\varphi}$ и представляется в форме

$$\ddot{y}_c = -B(\varphi, \dot{\varphi}) = -1 + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (2.17)$$

Отметим, что $B(\varphi, \dot{\varphi})$ — та же функция, определенная выше для скользящего стержня (2.12).

Область применимости определяется тем, что данная модель используется лишь для анализа отрыва, поэтому среди всей совокупности траекторий необходимо рассмотреть лишь те, начальные условия которых лежат на подмногообразии, отвечающем соприкосновению точки контакта C с неподвижной плоскостью и задаваемом уравнениями

$$M_0^4: y_c = y - \sin \varphi = 0, \quad \dot{y}_c = \dot{y} - \dot{\varphi} \cos \varphi = 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, в шестимерном фазовом пространстве свободной системы нас интересуют лишь фазовые траектории, которые начинаются на подмногообразии M_0^4 в малой его окрестности и задают некоторое пятимерное многообразие

$$M_f^5 = \{(\varphi, \dot{\varphi}, x_c, \dot{x}_c, y_c, \dot{y}_c) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, y_c|_{t=0} = 0, \dot{y}_c|_{t=0} = 0, 0 \leq y_c \leq \varepsilon_1, 0 \leq \dot{y}_c \leq \varepsilon_2\}, \quad (2.19)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — сколь угодно малые положительные постоянные.

2.4. Проблемы непротиворечивой смены режимов движения

В данной работе мы будем рассматривать движение тела лишь до момента *падения* на опорную плоскость либо *отрыва* точки контакта. В случае, когда рассматриваемые модели вполне описывают динамику системы, ее общая фазовая траектория (в зависимости от начальных условий) может состоять из участков траекторий перевернутого маятника и скользящего стержня, которые должны непротиворечиво склеиваться между собой. В момент отрыва траектория должна заканчиваться на границе определения свободной системы. Отсюда, в частности, следует, что при этом и границы определения всех трех моделей должны «состыковываться» между собой также непротиворечиво.

Тем не менее, как известно, в системах с кулоновским трением непротиворечивое описание движения с помощью таких простых моделей во всей области возможных параметров, как правило, невозможно — встречаются парадоксальные ситуации.

В классической работе Пенлеве [20] приведены примеры систем с *двусторонними* связями, в которых возникают парадоксы неединственности решений в рамках одной модели, связанные с неоднозначностью определения силы реакции при больших коэффициентах трения. В системах с *односторонними* связями в рамках одной модели парадоксов неединственности не может быть, так как знак вертикальной реакции определен однозначно условиями рассматриваемой модели.

Тем не менее, в системах с односторонними связями могут возникать парадоксы неединственности, связанные с возможным наложением ОВД различных математических моделей. Кроме того, в фазовом пространстве могут существовать области, в которых не определена ни одна из рассматриваемых моделей, что соответствует парадоксу несуществования решения. Данные парадоксы можно условно назвать *алгебраическими*.

Кроме того, в таких системах могут возникать *динамические* парадоксы, связанные с тем, что при стыковке моделей на общих границах ОВД направления на траекториях различных моделей могут быть не согласованы (что соответствует несуществованию решения). При некоторых значениях параметров могут появляться такие области, что при равной нулю скорости точки контакта ($V = 0$) корректно определены движения перевернутого маятника, но при малых отклонениях ($|V| > 0$) все траектории в модели скользящего стержня стремятся покинуть окрестность многообразия $\{V = 0\}$, то есть, с математической точки зрения, возникает неустойчивость.

Таким образом, одной из задач при исследовании динамики данной системы является анализ непротиворечивости и степени гладкости при переходе с траектории, описываемой одной математической моделью, на траекторию, описываемую другой моделью, то есть при смене режима движения.

Изобразим схематически три рассматриваемые модели как секторы на круговой диаграмме (рис. 3). Эти секторы разделены отрезками, соответствующими участкам границ определения данных систем B_{ij} , по которым они могут соприкасаться друг с другом (индексы i, j обозначают соответствующую модель). Отметим, что размерность границ различна, хотя на схеме они выглядят одинаково.

Так, граница B_{ps} двумерна и определяется равенством $f_r^p(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$ (см. (2.6)), в то время как размерность границы B_{sf} равна трем и она задается уравнением $N_s(\varphi, \dot{\varphi}, x_c, \dot{x}_c) = 0$ в четырехмерном пространстве (см. (2.11)). Граница B_{pf} также двумерна и задается соотношением $N_p(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$.

На границах отрыва B_{pf} и B_{sf} мы рассматриваем лишь переход в одну сторону — отрыв (обратное падение на плоскость требует привлечения дополнительной модели удара). С другой стороны, на границе B_{ps} , в принципе, возможны переходы в обе стороны. Реакция может выйти за пределы конуса трения, и в этом случае начнется проскальзывание точки контакта. Кроме того, при движении точки контакта ($\dot{x}_c \neq 0$) в результате действия силы трения траектория может достигнуть границы ($\dot{x}_c = 0$) и, в зависимости от знака $f_r^p(\varphi, \dot{\varphi})$, точка контакта остановится (то есть перейдет в режим перевернутого маятника) или продолжит скользить, но \dot{x}_c меняет знак.

Данная диаграмма является схематичной, и в действительности некоторые границы могут отсутствовать (например, если одна из областей полностью лежит внутри другой, не пересекаясь с третьей).

Отметим некоторые проблемы, которые анализируются ниже.

– В динамике подобного рода систем достаточно широко известна гипотеза о том, что граница между системой перевернутого маятника и свободной системой отсутствует: ОВД перевернутого маятника находится «внутри» ОВД скользящего стержня, то есть перед отрывом точка контакта всегда скользит. Ниже мы покажем, что *если коэффициент трения меньше некоторого критического значения, эта гипотеза верна, и мера траекторий перевернутого маятника, достигающих границы B_{pf} , равна нулю.*

– Как было сказано выше, в рамках рассматриваемых моделей, в принципе, возможен переход от движения с проскальзыванием к перевернутому маятнику, то есть *выход на связь $x_c = \text{const}$. Покажем, что в данном случае непротиворечивый (непарадоксальный) выход на связь действительно возможен.*

– Покажем также, что при коэффициенте трения больше критического могут возникнуть парадоксальные ситуации разного типа.

Важной особенностью всех трех моделей является то, что как их траектории, так и границы ОВД проецируются на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ без особенностей (складок, самопересечений и т. п.), это дает возможность для анализа использовать более наглядный графический метод, что во многих случаях позволяет заменить длинные выкладки серией соответствующих рисунков.

3. Границы области возможных движений в различных моделях, их пересечение и области парадоксов

Границы областей возможных движений (ОВД) фактически являются границами соответствующих фазовых пространств, определение которых для каждой из моделей приведено выше. В данном разделе рассмотрим ОВД каждой из моделей более подробно, определим области их возможных наложений (область алгебраических парадоксов), если таковые имеются.



Рис. 3. Схематическое изображение возможных переходов между режимами движения, которые описываются используемыми математическими моделями.

В областях стыковки или наложения ОВД различных моделей будем дополнительно исследовать фазовые траектории для выявления и исследования возможных *динамических* парадоксов в данной системе.

3.1. Область возможного отрыва

Согласно (2.17), в момент отрыва ускорение точки контакта $\ddot{y}_c = -B(\varphi, \dot{\varphi})$. Очевидно, что если $B(\varphi, \dot{\varphi}) < 0$ (то есть $\ddot{y}_c > 0$, заштрихованная область на рис. 4), то тело отрывается и переходит в свободное движение. В противном случае ($B(\varphi, \dot{\varphi}) > 0$) тело стремится деформировать опорную поверхность, то есть выходит на связь и должно быть описано одной из двух других моделей. Таким образом, граница отрыва не зависит от параметров ε и μ и задается уравнением

$$B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0. \quad (3.1)$$

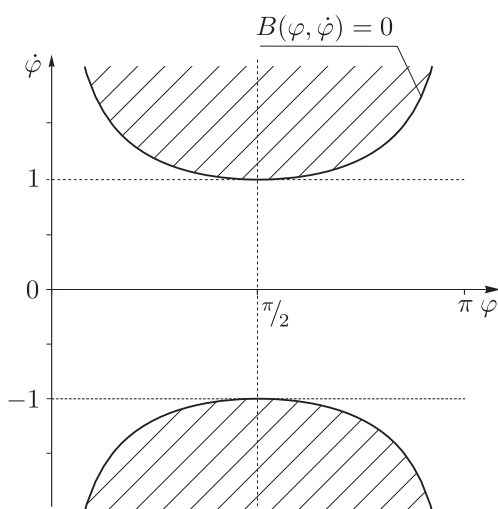


Рис. 4. Область, в которой $\ddot{y}_c > 0$, обозначена штрихом. Линия границы ОВД свободного стержня (2.17) обозначена сплошной линией.

3.2. ОВД скользящего стержня

Согласно (2.11) и (2.13), область возможных движений в \mathcal{M}_s^4 не зависит от ε и задается соотношениями

$$\frac{B(\varphi, \dot{\varphi})}{A(\varphi)} > 0, \quad (3.2)$$

то есть величины $A(\varphi)$ и $B(\varphi, \dot{\varphi})$ должны быть одного знака.

Из соотношений (2.12) и (3.2) следует существование критического значения

$$\mu = \mu^* = 2\sqrt{\kappa(1 + \kappa)},$$

такого, что

- при $\mu \leq \mu^*$ функция $A(\varphi)$ положительно определена при всех $\varphi \in [0, \pi]$, следовательно, область $N_s > 0$ определяется неравенством

$$\dot{\varphi}^2 > 1/\sin \varphi, \quad (3.3)$$

то есть не зависит от σ и ограничена кривыми (3.1) (см. рис. 5а);

— при $\mu > \mu^*$ имеется интервал, в котором функция $A(\varphi)$ принимает отрицательные значения. В этом случае условие $N_s > 0$ эквивалентно следующим условиям (см. рис. 5b, c):

- $B(\varphi, \dot{\varphi}) > 0$, при $\sigma = 1$, $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ и при $\sigma = -1$, $\varphi \in (\varphi_3, \varphi_4)$,
- $B(\varphi, \dot{\varphi}) < 0$, при $\sigma = 1$, $\varphi \notin (\varphi_1, \varphi_2)$ и при $\sigma = -1$, $\varphi \notin (\varphi_3, \varphi_4)$,

где $\varphi_i, i = 1, \dots, 4$, — корни функции $A(\varphi)$ при соответствующем значении σ .

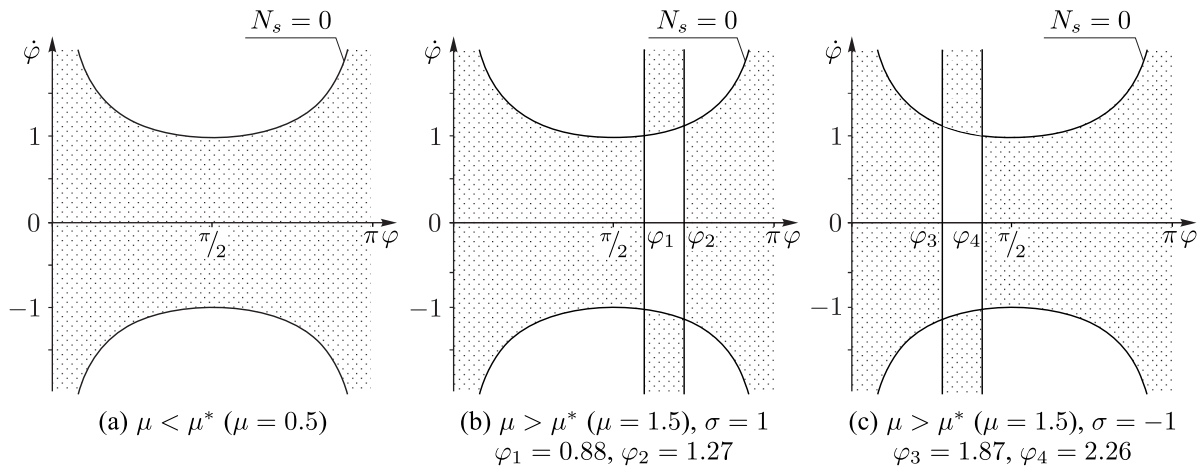


Рис. 5. Проекция ОВД скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ (обозначена точечной заливкой) при $\varepsilon = 0$, $\sigma = \pm 1$ и различных значениях μ . При $\varphi = \varphi_i$ (корни $A(\varphi)$) знаменатель силы реакции N_s (2.13) обращается в нуль.

3.3. ОВД перевернутого маятника

Согласно (2.6), ОВД перевернутого маятника в \mathcal{M}_p^3 задается двумя условиями.

1. Сила реакции $N_p > 0$, то есть, согласно (2.7),

$$\dot{\varphi}^2 < \frac{\kappa + \sin^2 \varphi - \varepsilon \cos \varphi \sin \varphi}{\sin \varphi (1 + \kappa)}. \tag{3.4}$$

Заметим, что кривая $N_p = 0$, отвечающая границе области отрыва точки контакта, не зависит от μ .

2. Полная реакция лежит внутри конуса трения, то есть выполняется условие

$$f_r(\varphi, \dot{\varphi}) = \mu N_p - |R_\tau| \geq 0,$$

или, согласно (2.7),

$$\begin{aligned} (\cos \varphi - \mu \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 &> \frac{(\cos \varphi - \mu \sin \varphi) (\sin \varphi - \varepsilon \cos \varphi) - \kappa(\mu + \varepsilon)}{(1 + \kappa)} \quad \text{при } R_\tau > 0, \\ (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 &< \frac{(\cos \varphi + \mu \sin \varphi) (\sin \varphi - \varepsilon \cos \varphi) + \kappa(\mu - \varepsilon)}{(1 + \kappa)} \quad \text{при } R_\tau < 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$



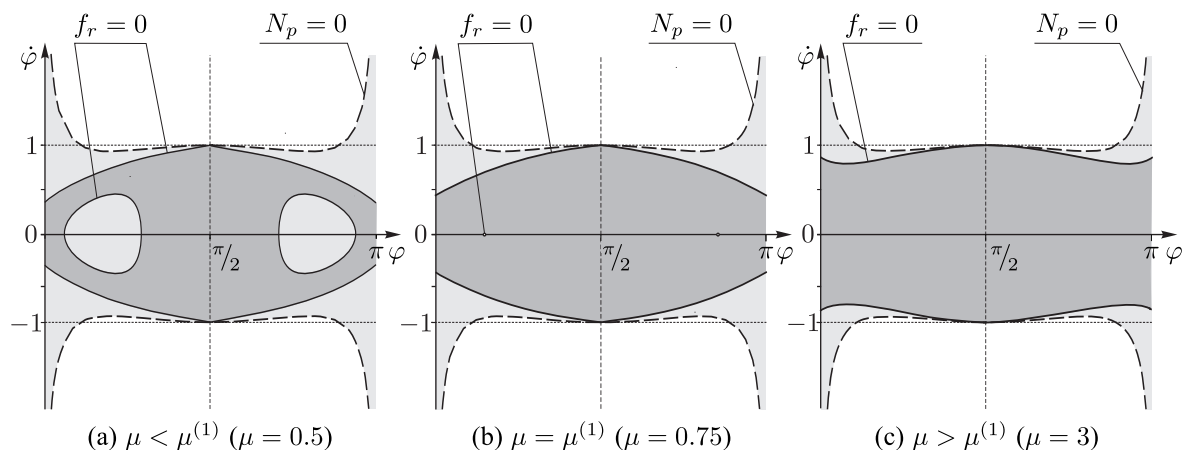


Рис. 6. ОВД перевернутого маятника при различных значениях μ и $\varepsilon = 0$ (обозначена темно-серым цветом). Граница области отрыва (3.4) обозначена пунктирной линией. Светло-серым цветом обозначена область, в которой $N_p > 0$.

Типичные ОВД, определяемые соотношениями (3.4), (3.5) при различных значениях μ и $\varepsilon = 0$ изображены на рисунке 6, для $\varepsilon > 0$ — на рисунке 7.

Согласно соотношениям (3.5), при $\varepsilon = 0$ имеется критическое значение

$$\mu = \mu^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}},$$

такое, что

- при $\mu \leq \mu^{(1)}$ (см. рис. 6а) ОВД является неодносвязным (имеется две дырки),
- при $\mu > \mu^{(1)}$ (см. рис. 6с) ОВД односвязно.

При $\varepsilon \neq 0$ симметрия границ ОВД относительно $\varphi = \pi/2$ нарушается (рис. 7). В данном случае $\mu^{(1)}$ расщепляется на два критических значения $\mu_{\pm}^{(1)}$:

$$\mu_{-}^{(1)} = \frac{2(1+\varepsilon^2)\sqrt{\kappa(1+\kappa)} - \varepsilon(1+2\kappa)^2}{4\kappa^2 + 4\kappa - \varepsilon^2},$$

$$\mu_{+}^{(1)} = \frac{2(1+\varepsilon^2)\sqrt{\kappa(1+\kappa)} + \varepsilon(1+2\kappa)^2}{4\kappa^2 + 4\kappa - \varepsilon^2};$$

кроме того, имеется еще одно критическое значение

$$\mu = \mu^{(2)} = \varepsilon.$$

Эти критические значения такие, что

- при $\mu < \mu^{(2)}$ (см. рис. 7а) ОВД является несвязным: состоит из трех областей, одна из которых неодносвязна,
- при $\mu^{(2)} < \mu < \mu_{-}^{(1)}$ (см. рис. 7с) ОВД связное, но неодносвязное (имеется две дырки),
- при $\mu_{-}^{(1)} < \mu < \mu_{+}^{(1)}$ (см. рис. 7d) ОВД содержит лишь одну дырку,
- при $\mu_{+}^{(1)} < \mu$ (см. рис. 7f) ОВД односвязное.

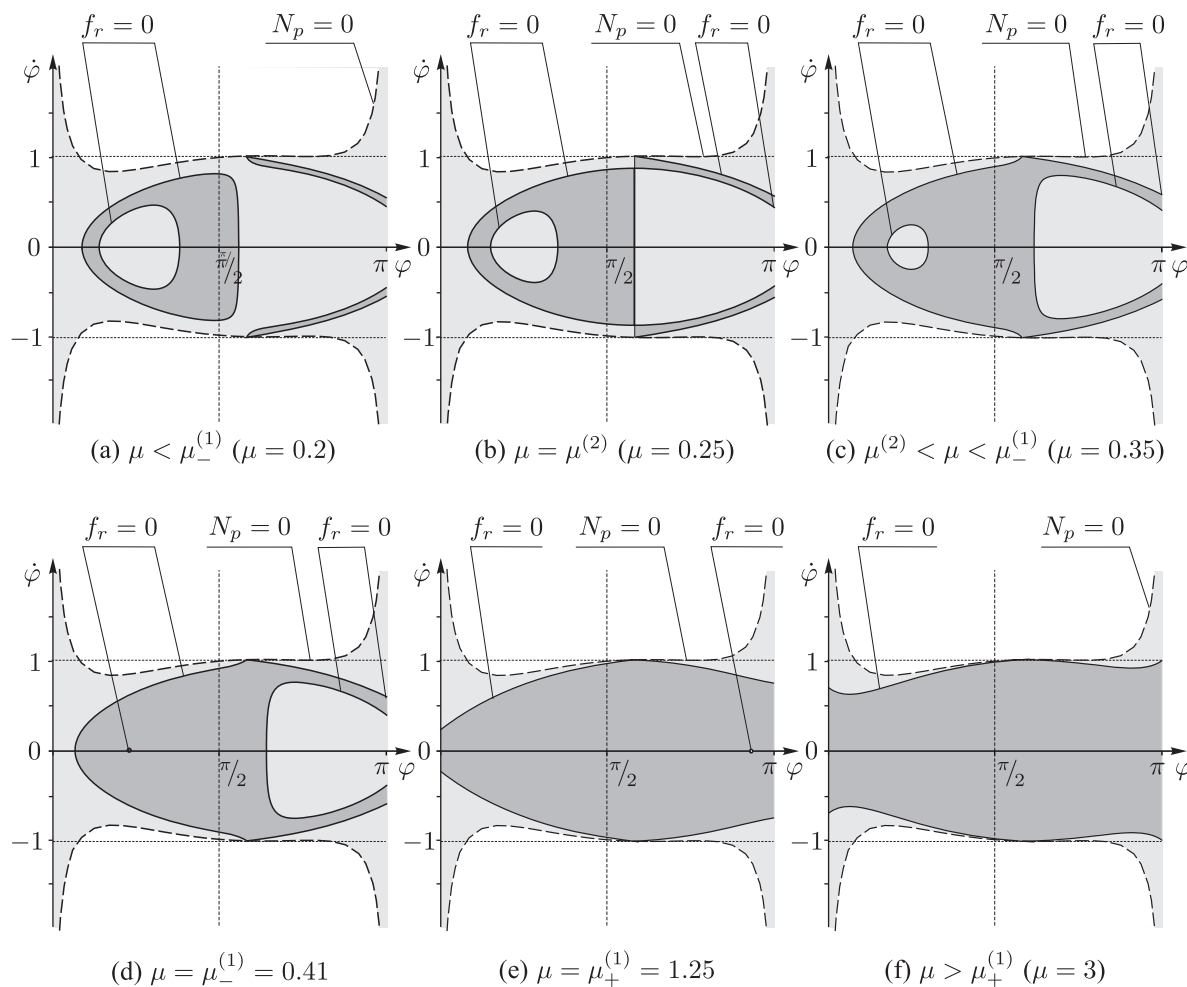


Рис. 7. ОВД перевернутого маятника при $\varepsilon = 0.25$ ($\mu_-^{(1)} = 0.41$, $\mu_+^{(1)} = 1.25$, $\mu^{(2)} = 0.25$) и различных значениях μ (обозначена темно-серым цветом). Если кроме силы тяжести нет других внешних сил, приложенных к центру масс, данное значение ε соответствует углу наклона плоскости $\alpha = \pi/12$. Граница области отрыва (3.4) обозначена пунктирной линией. Светло-серым цветом обозначена область, в которой $N_p > 0$.

Кривые, определяемые равенствами $f_r = 0$ и $N_p = 0$ из соотношений (3.4), (3.5), пересекаются только в двух точках (см. рис. 6, 7), значение которых можно определить аналитически:

$$\varphi_0 = \pi/2 + \arcsin \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \quad \dot{\varphi}_0 = \pm \sqrt{1 + \varepsilon^2}. \tag{3.6}$$

Кроме того, из неравенств, определяющих ОВД перевернутого маятника,

$$\frac{|R_\tau|}{\mu} < N_p, \quad 0 < N_p,$$

следует, что внутренность конуса трения, определяемая неравенством $f_r > 0$ (3.5), лежит внутри области, определяемой неравенством $N_p > 0$. Следовательно, при анализе движения перевернутого маятника достаточно рассматривать границы, определяемые неравенством $f_r > 0$ (3.5).



После отдельного обсуждения границ ОВД каждой из систем рассмотрим возможности переходов из одного режима движения в другой при разных значениях ε и μ и обсудим их непротиворечивость.

Как было отмечено выше, важной особенностью рассматриваемых моделей является возможность корректного проецирования всех фазовых траекторий и границ ОВД на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$. Это позволяет в данном случае для доказательства большинства утверждений вместо аналитических вычислений воспользоваться методом построения фазовых портретов, дополнив его построением границ ОВД соответствующих моделей. Поэтому в дальнейшем соответствующие вычисления в доказательствах мы, как правило, опускаем.

4. Качественный анализ динамики, смена режимов и парадоксы

В данной работе, не делая полного качественного анализа, мы опишем лишь ряд динамических эффектов, наблюдаемых в системе в зависимости от значений параметров ε и μ .

4.1. Коэффициент трения меньше критического ($\mu \leq \mu^*$)

Для анализа возможных ситуаций на рисунке 8 мы совместили ОВД различных моделей и представили внутри соответствующих ОВД фазовые траектории перевернутого маятника (a, b, c) и проекции фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = -1$ (d, e, f, проекция при $\sigma = 1$ будет антисимметрична относительно $\varphi = \pi/2$), а также и указали направления движения на них при различных коэффициентах трения $\mu \leq \mu^*$ и $\varepsilon = 0$. Аналогичные графики для $\varepsilon > 0$ приведены на рисунке 9. Это позволяет наглядно выявить особенности переходов при смене режимов движения и проанализировать непротиворечивость направлений на фазовых траекториях на границах ОВД.

Заметим, что в случае горизонтальной плоскости ($\varepsilon = 0$) ОВД всех трех моделей и фазовые траектории перевернутого маятника симметричны относительно $\varphi = \pi/2$. На наклонной плоскости ($\varepsilon > 0$) данная симметрия нарушается.

Из приведенных рисунков видно, что ОВД всех трех моделей непротиворечиво стыкуются только вдоль линий границ (за исключением очевидного наложения ОВД перевернутого маятника на ОВД скользящего стержня на плоскости $\dot{x}_c = 0$). Это позволяет предположить, что при $\mu \leq \mu^*$ в рассматриваемой системе алгебраические (связанные с наложением ОВД различных моделей) и динамические (связанные с непротиворечивой стыковкой фазовых траекторий на границах ОВД) парадоксы отсутствуют, то есть для описания системы достаточно используемых механических моделей и все переходы между ними непротиворечивы.

Докажем это, рассматривая все возможные переходы между рассматриваемыми моделями отдельно.

1. Перевернутый маятник — скользящий стержень.

Напомним, что траектории в модели перевернутого маятника располагаются на плоскости $\dot{x}_c = 0$, в то время как для траекторий скользящего стержня $\dot{x}_c \neq 0$. Чтобы выяснить возможность смены рассматриваемых режимов, будем анализировать поведение траекторий скользящего стержня в малой окрестности плоскости $\dot{x}_c = 0$. Покажем, что режим перевернутого маятника внутри конуса трения (то есть при условии $f_r > 0$, соответствующие области обозначены темно-серым цветом на рис. 8, 9) является устойчивым относительно

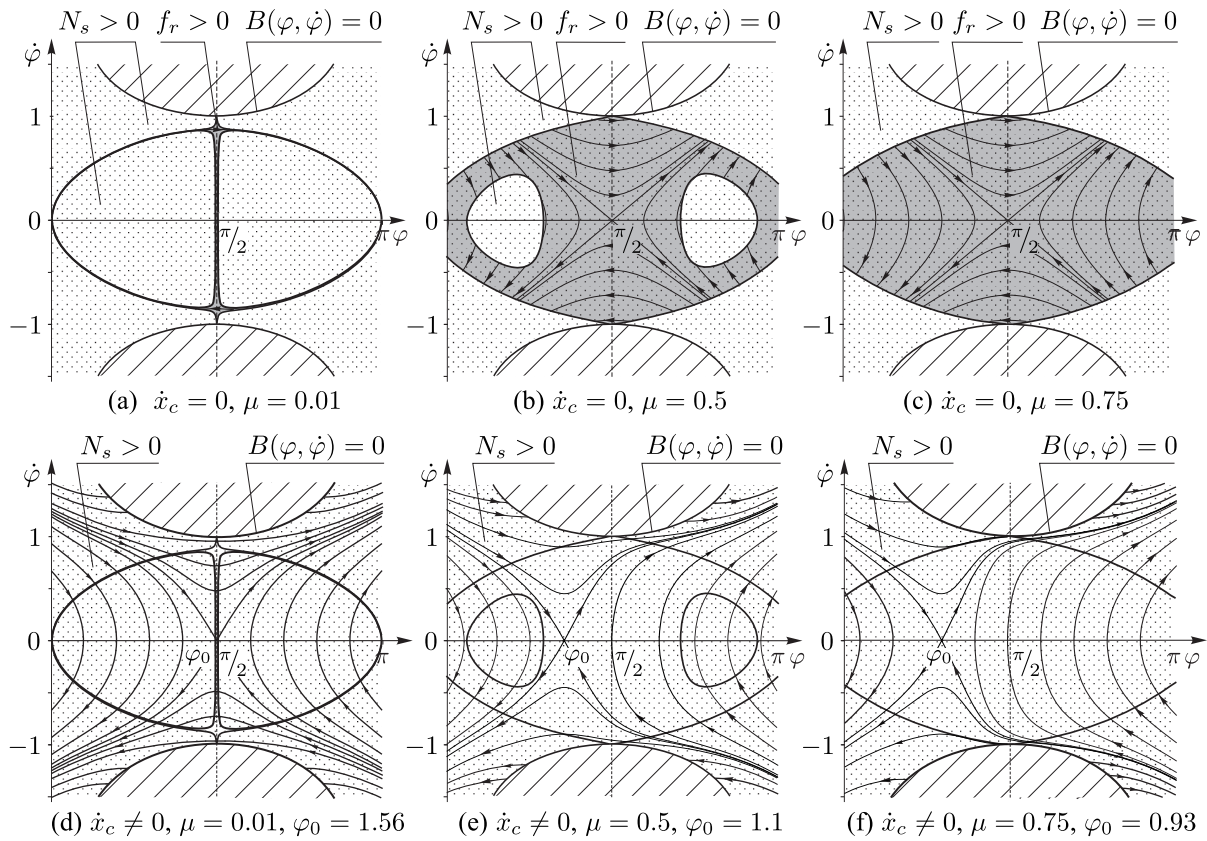


Рис. 8. Фазовые траектории перевернутого маятника (a), (b), (c) и проекции фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = -1$ (d), (e), (f), $\varepsilon = 0$ и различных $\mu \leq \mu^*$. ОВД перевернутого маятника обозначена темно-серым цветом, скользящего стержня — точечной заливкой, свободной системы — штриховкой. Точка пересечения сепаратрис $\varphi_0 = \arctg(1/\mu)$.

малых отклонений от связи $\dot{x}_c = 0$: все траектории скользящего стержня в соответствующей малой окрестности направлены к плоскости $\dot{x}_c = 0$.

Чтобы это показать, определим направление ускорения точки контакта $\ddot{x}_c \equiv \dot{V}$ в фазовом пространстве M_s^4 вблизи $\dot{x}_c = 0$. При этом в области, где устойчивым решением является перевернутый маятник, ускорение точки контакта около $\dot{x}_c = 0$ должно быть направлено в сторону плоскости, то есть при $\sigma = 1$ должно быть $\dot{V} < 0$, а при $\sigma = -1$ должно быть $\dot{V} > 0$. Схематично направление ускорения точки контакта в этом случае представлено на рисунке 10а.

Если же в окрестности некоторой области на плоскости $\dot{x}_c = 0$ ускорение \dot{V} направлено к плоскости только с одной стороны (например, как показано на рис. 10b, c), точка контакта с соответствующими значениями $\varphi, \dot{\varphi}$ не выйдет на связь $x_c = \text{const}$, а после остановки начнет движение в обратном направлении.

Необходимо отметить, что границы ОВД перевернутого маятника $f_r = 0$ и границы знакопеременности \dot{V} совпадают, так как граница $f_r = 0$ определяется условием $\mu N = |R_T|$ при $\ddot{x}_c \equiv 0$ (граница конуса трения, см. (3.5)), при этом граница знакопеременности \dot{V} определяется аналогичным условием $\ddot{x}_c = 0$ при $F = -\sigma \mu N$ (значение горизонтальной реакции на границе конуса трения).

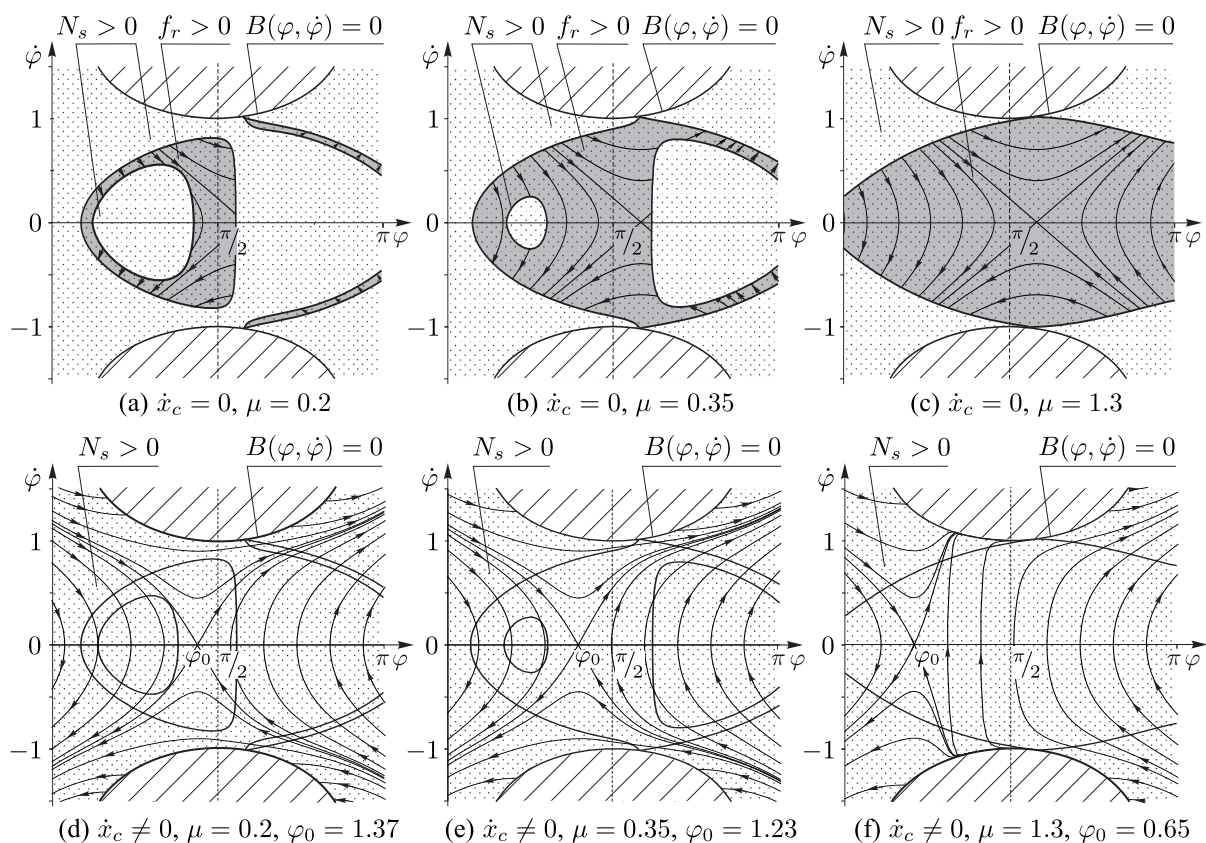


Рис. 9. Фазовые траектории перевернутого маятника (а), (b), (c) и проекции фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = -1$ (d), (e), (f), $\varepsilon = 0.25$ и различных $\mu \leq \mu^*$. ОВД перевернутого маятника обозначена темно-серым цветом, скользящего стержня — точечной заливкой, свободной системы — штриховкой. Точка пересечения сепаратрис $\varphi_0 = \arctg(1/\mu)$.

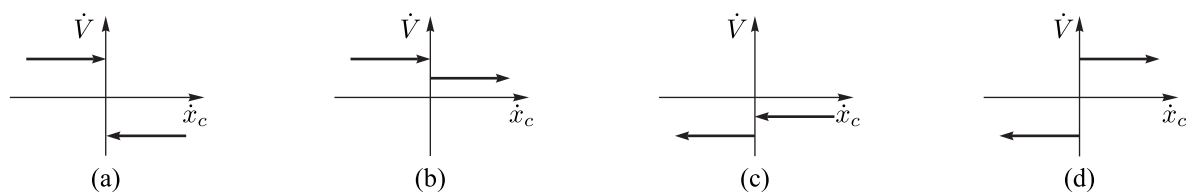


Рис. 10. Различные варианты направления ускорения точки контакта: (а) устойчивым решением является перевернутый маятник, (b) при $\dot{x}_c = 0$ существует решение — скользящий вправо стержень, (c) при $\dot{x}_c = 0$ существует решение — скользящий влево стержень, (d) направление скольжения не определено.

На рисунке 11 показаны области, в которых ускорение точки контакта вблизи $\dot{x}_c = 0$ при $\sigma = \pm 1$ и $\varepsilon = 0$ направлено к плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$. Видно, что в области $f_r > 0$ направление ускорения точки контакта всюду направлено к плоскости.

Таким образом, при $\mu \leq \mu^*$ в области $f_r > 0$, $\dot{x}_c = 0$ перевернутый маятник является «устойчивым» решением.

Из рисунка 11 также можно определить, в какую сторону начинается скольжение при достижении границы ОВД перевернутого маятника. Например, при движении через точ-

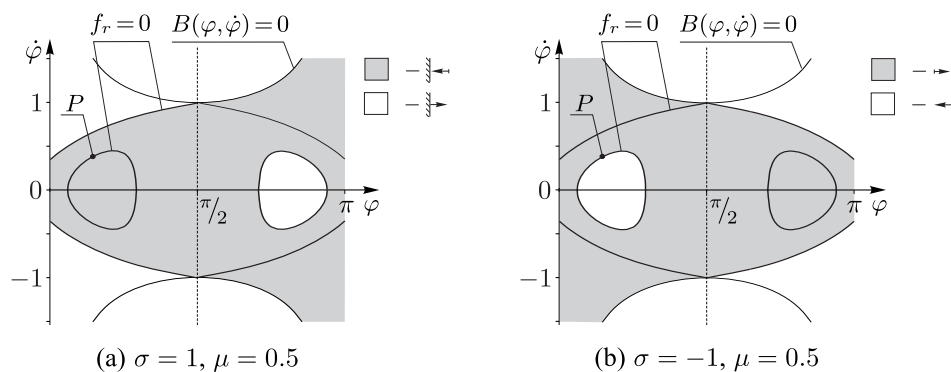


Рис. 11. Области, в которых ускорение точки контакта вблизи $\dot{x}_c = 0$ при $\sigma = \pm 1$ и $\varepsilon = 0$ направлено к плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ (обозначены серым цветом): (а) $\dot{V} < 0$ при $\sigma = 1$ и (б) $\dot{V} > 0$ при $\sigma = -1$.

ку P на рисунке 11 ($\varphi = 0.47, \dot{\varphi} = 0.39$) при пересечении границы конуса трения $f_r = 0$ начнется скольжение влево, так как в области, в которую попадает фазовая траектория, ускорение \dot{V} направлено к плоскости $\dot{x}_c = 0$ при $\sigma = 1$, а при $\sigma = -1$ — от плоскости, что соответствует случаю, изображенному на рисунке 10b. Отметим также, что области неопределенности направления скольжения (когда одновременно ускорение точки контакта может быть направлено от плоскости в любую сторону) при $\mu \leq \mu^*$ отсутствуют (рис. 10d).

Из рисунков 8, 9 видно, что при пересечении границы $f_r = 0$ направление движения вдоль фазовых траекторий не изменяется. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. При $\mu \leq \mu^*$ переход между системами перевернутого маятника и скользящего стержня происходит непротиворечиво.

Данное утверждение можно доказать и аналитически, проверив направление на фазовых траекториях на границе $f_r = 0$, что фактически уже было сделано при определении областей «устойчивости» перевернутого маятника. Заметим также, что точка пересечения сепаратрис $\varphi_0 = \arctg(1/\mu)$ всегда лежит вне ОВД скользящего стержня на плоскости $\dot{x}_c = 0$, следовательно, фазовая траектория этой точки никогда не достигает. Пример такого движения со сменой режима от перевернутого маятника к скользящему стержню будет приведен далее (разд. 4.2).

2. Скользящий стержень — свободная система.

Проекции ОВД скользящего стержня и области возможного отрыва граничат со свободной системой только по кривой $B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$. Таким образом,

– при $B(\varphi, \dot{\varphi}) < 0$ (заштрихованная область на рис. 8, см. также рис. 4) реакция $N_s < 0$, и при малом отклонении точки контакта от плоскости, согласно (2.17), ее ускорение $\ddot{y}_c > 0$, что соответствует единственному решению — отрыв,

– при $B(\varphi, \dot{\varphi}) > 0$ (область с точечной заливкой на рис. 8) сила реакции $N_s > 0$, что соответствует безотрывному скольжению или неподвижности точки контакта (при $\dot{x}_c = 0, f_r > 0$, темно-серая область на рис. 8a). При малом отклонении точки контакта от плоскости ускорение свободной системы $\ddot{y}_c < 0$, что соответствует устойчивому сохранению контакта с плоскостью.

Теперь проверим непротиворечивость направления движения точки контакта на границе между скользящим стержнем и свободной системой.

Так как на самой границе $\ddot{y}_c = 0$, для выяснения направления движения точки контакта в свободной системе необходимо вычислить величину \ddot{y}_c при $\dot{y}_c = 0$. В силу (2.17) получим

$$\ddot{y}_c = \dot{\varphi}^3 \cos \varphi = \begin{cases} \frac{\cos \varphi}{\sin^{3/2} \varphi}, & \dot{\varphi} > 0, \\ -\frac{\cos \varphi}{\sin^{3/2} \varphi}, & \dot{\varphi} < 0. \end{cases}$$

Таким образом, для верхней ветви границы (3.1) (то есть $\dot{\varphi} > 0$) получим $\ddot{y}_c > 0$ при $\varphi < \pi/2$ и $\ddot{y}_c < 0$ при $\varphi > \pi/2$, для нижней — $\ddot{y}_c < 0$ при $\varphi < \pi/2$ и $\ddot{y}_c > 0$ при $\varphi > \pi/2$.

Чтобы показать, что траекторий, достигающих границы (3.1) при $\ddot{y}_c < 0$, не существует, вычислим касательный вектор τ_{\pm} к траектории системы (2.14) в точке $\varphi = \pi/2, \dot{\varphi} = \pm 1$.

Находим $\tau_{\pm} = (\pm 1, 0)$, следовательно, на рассматриваемом участке все траектории скользящего стержня направлены в противоположную границе сторону (рис. 12). Поэтому справедливо

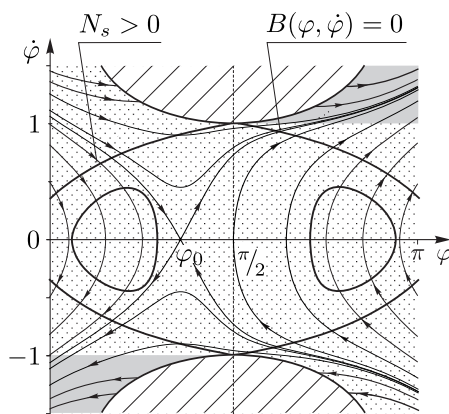


Рис. 12. Проекция ОВД и фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0.5$, $\sigma = -1$. Область, в которой могли бы быть траектории с противоречивым направлением движения при отрыве, выделена серым цветом.

Предложение 2. При $\mu \leq \mu^*$ область, заполненная траекториями, достигающими «противоречивых участков» границы со свободной системой, равна нулю, то есть скользящий стержень отрывается от плоскости при достижении границы (3.1) непротиворечиво, причем в момент отрыва ускорение точки контакта \ddot{y}_c всюду равно нулю.

3. Перевернутый маятник — свободная система.

При $\varepsilon = 0$ граница перехода между перевернутым маятником и областью отрыва свободной системы на плоскости $\dot{x}_c = 0$ состоит только из двух точек $\varphi = \pi/2, \dot{\varphi} = \pm 1$ (см. рис. 8, 13а), которые фактически недостижимы.

При увеличении значения ε точка пересечения смещается в область $\varphi > \pi/2$ (рис. 13б). При увеличении значения μ область, соответствующая конусу трения $f_r > 0$, расширяется, и, начиная с некоторых значений ε и μ , точек пересечения кривых $B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$ и $f_r = 0$ становится две (рис. 13с), то есть появляется область, в которую может попасть семейство фазовых кривых перевернутого маятника при $\dot{y}_c > 0$.

В этой области *неединственности* одновременно определены и являются устойчивыми как минимум два решения — перевернутый маятник и свободная система.

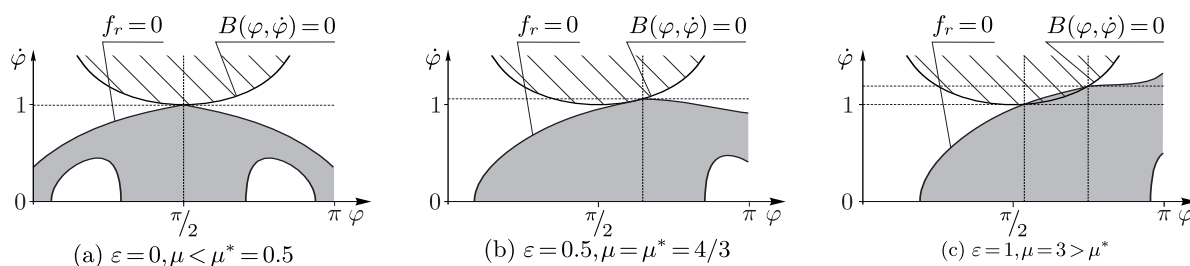


Рис. 13. ОВД перевернутого маятника и граница свободной системы: (а) при $\varepsilon = 0$, $\mu < \mu^* = 0.5$ они пересекаются только в точках $\varphi = \pi/2$, $\dot{\varphi} = \pm 1$, (б) при $\varepsilon = 0.5$, $\mu = \mu^* = 4/3$ касательные к функциям $B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$ и $f_r = 0$ (правая ветвь) в точке пересечения совпадают, (с) приведен пример значений параметров ($\varepsilon = 1$, $\mu = 3$), при которых появляются две точки пересечения кривых $B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$ и $f_r = 0$.

При анализе взаимного расположения касательных к функциям $f_r = 0$ и $B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$ была получена область на плоскости параметров (μ, ε) , при которых возникает указанная *неединственность* (рис. 14). Из рисунка видно, что значения $\mu \leq \mu^*$ при любых значениях ε в область неединственности не попадают, из чего можно заключить следующее

Предложение 3. При $\mu \leq \mu^*$ перед отрывом точка контакта всегда скользит.

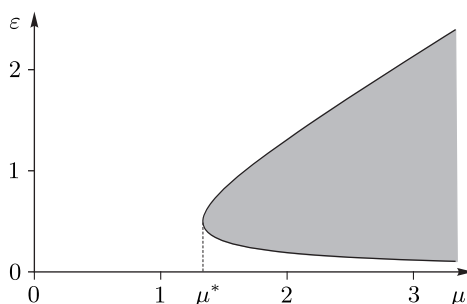


Рис. 14. Серым цветом обозначена область значений параметров μ и ε , при которых граница свободной системы $B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$ проходит внутри ОВД перевернутого маятника.

4.2. Пример траектории со сменой режимов движения при $\mu < \mu^*$

Приведем пример, демонстрирующий движение системы при $\mu < \mu^*$, $\varepsilon = 0$ со сменой режима движения и направления скольжения.

На рисунке 15 представлены графики зависимости $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ и $V(t)$, полученные при начальных условиях внутри ОВД перевернутого маятника:

$$\varphi(0) = 0.4, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.5, \quad V(0) = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \mu = 0.5. \tag{4.1}$$

Полученные кривые соответствуют следующему реальному движению: в начальный момент времени центр масс начинает подниматься ($\dot{\varphi}(0) > 0$), точка контакта остается неподвижной до момента времени $t = 0.16$ (в точке C_1). Далее точка контакта начинает проскальзывать влево ($V < 0$), стержень продолжает отклоняться против часовой стрелки. При этом угловая скорость постепенно уменьшается до нуля, и при $t = 0.73$, достигнув максимального угла отклонения $\varphi_{\max} = 0.58$, стержень меняет направление вращения (теперь по часовой стрелке). Точка контакта, начав движение влево, под действием силы трения



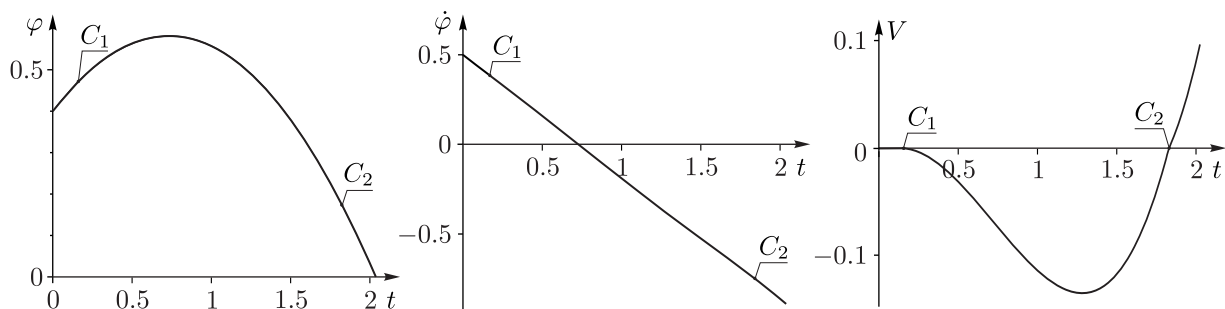


Рис. 15. Зависимости угла φ , угловой скорости $\dot{\varphi}$ и скорости точки контакта V от времени для однородного стержня с начальными условиями (4.1).

останавливается при $t = 1.84$ (в точке C_2) и начинает скольжение вправо до момента падения на плоскость при $t = 2.04$.

Фазовая траектория $V(\varphi, \dot{\varphi})$ при $t < 0.16$ лежит в плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ до пересечения с границей $f_r = 0$ (в точке C_1 на рис. 16). Далее, попав в область устойчивого движения влево (см. рис. 10b и рис. 11), траектория проходит в области $V < 0$ и пересекает вновь плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $t = 1.84$, $\varphi = 0.16$, $\dot{\varphi} = -0.75$ (точка C_2 на рис. 16), то есть вне ОВД перевернутого маятника (см. также рис. 8b). Данное пересечение соответствует изменению направления движения точки контакта.

До начала движения точки контакта энергия сохраняется, далее уменьшается до момента падения на плоскость (рис. 17).

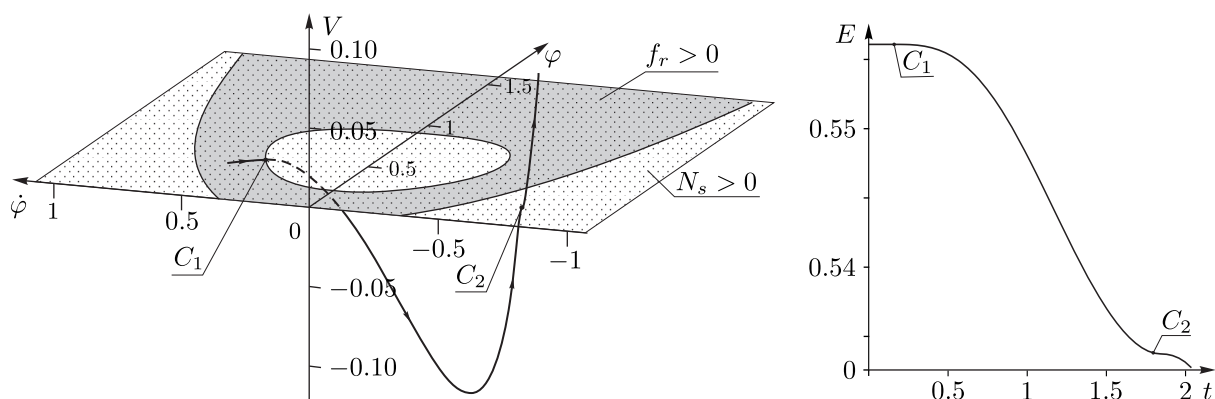


Рис. 16. Фазовая траектория $V(\varphi, \dot{\varphi})$ (толстая сплошная линия), полученная при начальных условиях (4.1). ОВД перевернутого маятника обозначена серым цветом. В точке C_1 фазовая кривая пересекается с границей $f_r = 0$. В точке C_2 — с плоскостью $(\varphi, \dot{\varphi})$, при этом меняется направление скольжения точки контакта, у траектории имеется излом.

Рис. 17. График зависимости энергии системы с начальными условиями (4.1). При $t < 0.16$ энергия сохраняется. Далее в результате действия силы трения убывает (2.15).

4.3. Коэффициент трения больше критического для горизонтальной плоскости ($\varepsilon = 0, \mu > \mu^*$)

Рассмотрим подробнее систему при $\mu > \mu^*$, при этом изменится вид границ ОВД различных моделей и фазовых кривых и появятся новые качественные эффекты.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Критическое значение коэффициента трения для однородного стержня $\mu^* = 4/3$ в натурном эксперименте практически недостижимо. Тем не менее, с помощью присоединения дополнительных масс можно существенно снизить критическое значение μ для системы в целом (см., например, [7]).

Как и в предыдущем разделе, на рисунке 18 совмещены ОВД перевернутого маятника и проекции ОВД скользящего стержня и свободной системы на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$. Внутри соответствующих ОВД представлены фазовые траектории перевернутого маятника при $\dot{x}_c = 0$ (рис. 18а, с) и проекции фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = 1$ (рис. 18b) и $\sigma = -1$ (d) при $\varepsilon = 0, \mu = 3$. Из рисунка 18 видно, что, в отличие от случая $\mu \leq \mu^*$, на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ имеются не только области наложения ОВД (область неединственности — заштрихованная с точечной заливкой область на рис. 18), но и области, в которых не определена ни одна из рассматриваемых моделей (области несуществования решения).

Отметим, что несуществование решения соответствует тому, что для описания динамики системы (при начальных условиях из данной области) используемых механических моделей недостаточно. Рассмотрим эту область более подробно.

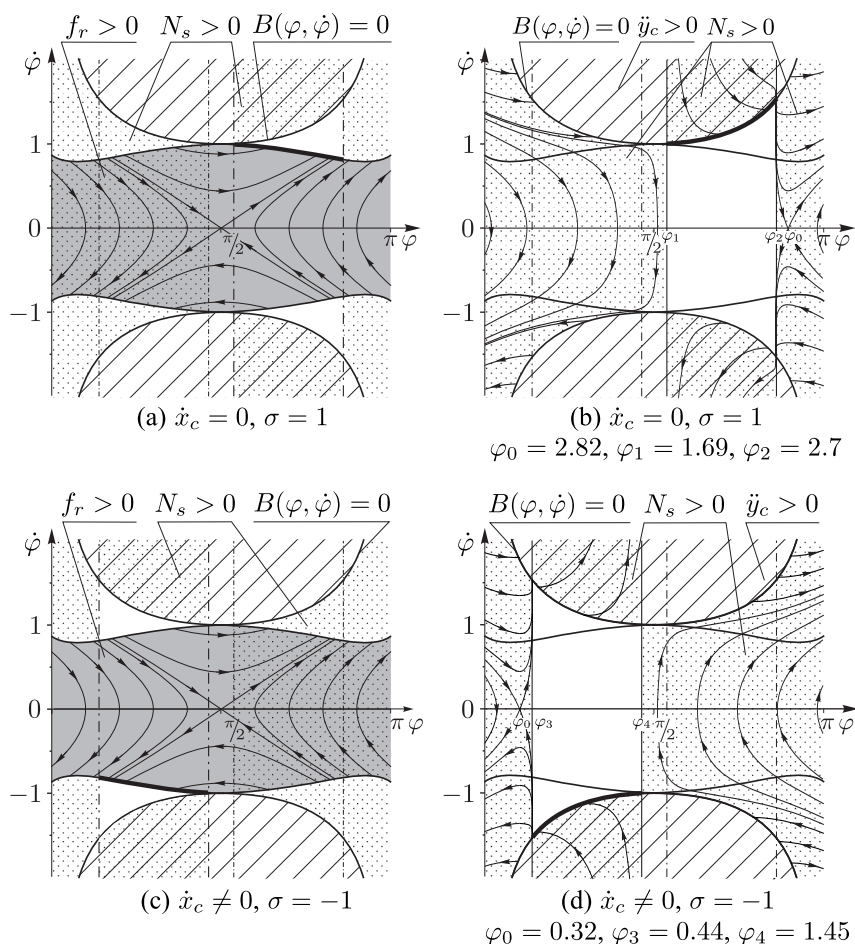


Рис. 18. ОВД и фазовые траектории перевернутого маятника (а, с) и проекции ОВД и фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = \pm 1$ (b, d), $\varepsilon = 0$ и $\mu = 3$. ОВД перевернутого маятника обозначена темно-серым цветом, скользящего стержня — точечной заливкой, свободной системы — штриховкой.



Как было показано выше, при $\mu > \mu^*$ имеется область $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ при $\sigma = 1$ и область $\varphi \in (\varphi_3, \varphi_4)$ при $\sigma = -1$, где φ_i , $i = 1, \dots, 4$, — корни функции $A(\varphi)$ (2.12), в которой при $\ddot{y}_c < 0$ нормальная реакция N_s (2.13) принимает отрицательные значения (незакрашенная область на рис. 18). Это означает, что при $\dot{x}_c \neq 0$ в указанной области (рис. 18b, d) модель скользящего стержня не может использоваться ($N_s < 0$), при этом ввиду односторонности связи должен произойти отрыв. С другой стороны, ускорение точки контакта $\ddot{y}_c < 0$ и направлено к плоскости, то есть при отсутствии реакции соприкасающегося тела стремится деформировать опору.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогично выводам, сделанным в работах [17, 19, 23], мы можем предположить, что при попадании в указанную область несуществования происходит так называемый «удар трением» (тангенциальный удар) [8], при котором (в случае одной степени свободы) происходит динамическое заклинивание, то есть мгновенная остановка, после которой возможно нарушение контакта стержня с плоскостью (отскок). Для более подробного изучения данного явления необходимо привлечение дополнительных моделей теории упругости, в частности, учет локальной деформации в точке контакта, что выходит за рамки данной работы.

На плоскости $\dot{x}_c = 0$ (в модели перевернутого маятника) также имеется область несуществования решения — в указанном интервале $(\varphi_1, \varphi_{i+1})$, $i = 1, 3$, вне ОВД, обозначенной серым цветом на рисунках 18a, c.

Далее перейдем к более подробному исследованию системы в области *неединственности* и отдельно рассмотрим переходы между моделями при смене режимов движения.

1. Скользящий стержень — свободная система.

При $\mu > \mu^*$ возникают области *неединственности* решения — области, в которых одновременно определены скользящий стержень и свободная система (заштрихованная область с точечной заливкой на рис. 18). Внутри этой области $A(\varphi) < 0$, $B(\varphi, \dot{\varphi}) < 0$, то есть одновременно выполняются условия, накладываемые на определение ОВД скользящего стержня ($N_s > 0$) и свободной системы ($\dot{y}_c > 0$).

В фазовом пространстве M_s^4 из любой точки с начальными условиями, соответствующими этой области неединственности, выходит две траектории, одна из которых соответствует отрыву (координата y_c и скорость \dot{y}_c становятся больше нуля), а другая остается в этом пространстве ($y_c = \dot{y}_c = 0$) и соответствует скользящему стержню, причем любое отклонение от плоскости контакта приведет к отрыву. Кроме того, траектория скользящего стержня может пересечь поверхность $B(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{y}_c = 0$ (этот участок границы выделен жирной линией на рис. 18b, d), после чего траектория попадает в область несуществования, которая обсуждалась выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для того чтобы ответить на вопрос о том, какое из данных решений может быть в данном случае реализовано на практике, необходимо проводить натурные эксперименты. Напомним, что в аналогичной ситуации в системе с двусторонней связью (когда возникает неединственность) могут быть реализованы оба решения в зависимости от способа реализации [21]. Как и в случае несуществования решения, для теоретического анализа такой системы необходимо использовать более сложные модели, учитывающие деформацию соприкасающихся поверхностей опорной плоскости или стержня (см. также [3, 12, 15, 21]).

Вне указанной области неединственности ОВД скользящего стержня непротиворечиво склеивается с ОВД свободной системы по поверхности $B(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{y}_c = 0$ (рассуждения аналогичны случаю $\mu \leq \mu^*$).

2. Перевернутый маятник — свободная система.

Как и в случае $\mu \leq \mu^*$, при $\varepsilon = 0$ граница перехода между перевернутым маятником и свободной системой на плоскости $\dot{x}_c = 0$ состоит только из двух точек $\varphi = \pi/2$, $\dot{\varphi} = \pm 1$ (см. рис. 8, 13a, 14), то есть мера траекторий, достигающих границы, равна нулю.

3. Перевернутый маятник — скользящий стержень.

Особенностью данного случая (по сравнению со случаем малых μ) является то, что на плоскости $\dot{x}_c = 0$ ОВД перевернутого маятника граничит не только с ОВД скользящего стержня, но и с областью несуществования решения. Кроме того, имеется множество траекторий (ненулевой меры) перевернутого маятника, которые достигают этих границ (такие границы обозначены жирной линией на рис. 18а, с). Таким образом, система в процессе эволюции достигает области парадокса несуществования, и, как уже отмечалось выше, для ее описания должны привлекаться более сложные модели динамики.

Рассмотрим теперь для данного случая устойчивость движений перевернутого маятника по отношению к проскальзыванию точки контакта (то есть по отношению к малым возмущениям скорости \dot{x}_c в окрестности плоскости $\dot{x}_c = 0$).

На рисунке 19 представлены области, в которых ускорение $\dot{V} = \ddot{x}_c$ вблизи $\dot{x}_c = 0$ направлено к плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = \pm 1$. Из этих рисунков видно, что на интервале $\varphi \in (0, \varphi_3) \cup (\varphi_4, \varphi_1) \cup (\varphi_2, \pi)$ (там, где нет пересечения с областью несуществования при $\sigma = \pm 1$), как и в случае $\mu \leq \mu^*$, перевернутый маятник является «устойчивым» решением: если при движении система вышла на связь $x_c = \text{const}$ внутри указанной области, то она на ней и останется до пересечения с одной из линий $\varphi = \varphi_i, i = 1, \dots, 4$.

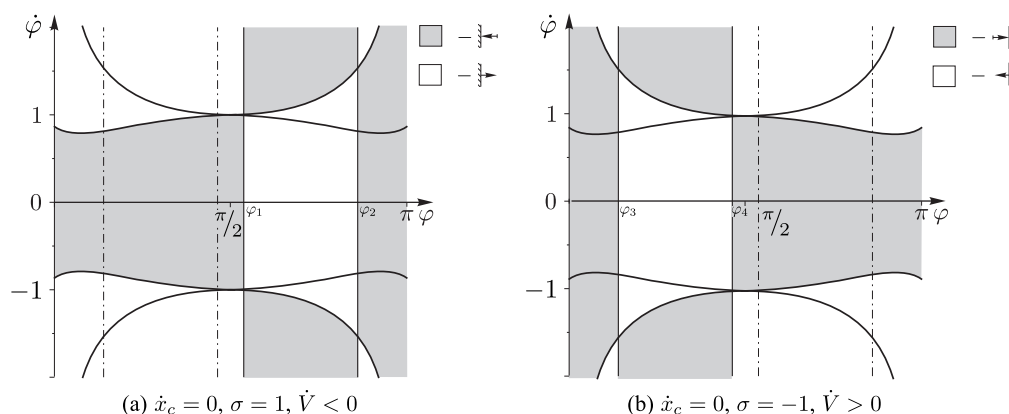


Рис. 19. Области, в которых при $\sigma = 1$ (а) и при $\sigma = -1$ (б), $\varepsilon = 0, \mu = 3$ ускорение $\dot{V} = \ddot{x}_c$ вблизи $\dot{x}_c = 0$ направлено к плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$, обозначены серым цветом.

В оставшихся зонах ОВД перевернутого маятника граничит и с областью существования, и с областью несуществования решения в модели скользящего стержня (как видно на рис. 18, они меняются местами при смене знака σ). При малом отклонении \dot{x}_c в сторону, где возможно движение скользящего стержня, система стремится вернуться на связь $\dot{x}_c = 0$, при отклонении в другую сторону попадаем в область, в которой движение не может быть описано в рамках рассматриваемых моделей (область «удара трением», в результате которого система может также вернуться на связь $\dot{x}_c = 0$).

В отсутствие малых отклонений от связи $\dot{x}_c = 0$ в сторону области несуществования, если система вышла на связь $x_c = \text{const}$ внутри ОВД перевернутого маятника, то она будет на ней оставаться до момента пересечения с границей $f_r = 0$, после чего возможен непротиворечивый переход в скольжение влево или вправо, в зависимости от того, до какой границы конуса трения дошла фазовая траектория:

- для границы $f_r = 0$, выделенной жирной линией на рисунке 18а, начнется скольжение влево (так как ускорение \dot{V} направлено от плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = -1$, то есть в сторону $V < 0$, где скользящий стержень определен, $N_s > 0$),



– для границы $f_r = 0$, выделенной жирной линией на рисунке 18с, начнется скольжение вправо (так как ускорение \dot{V} направлено от плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = 1$, то есть в сторону $V > 0$, где скользящий стержень также определен, $N_s > 0$).

4.4. Коэффициент трения скольжения больше критического для наклонной плоскости ($\varepsilon > 0, \mu > \mu^*$)

Так как $\mu > \mu^*$, то все особенности, связанные со знакопеременностью функции $A(\varphi)$, а именно появление области *несуществования* (незакрашенная область на рис. 20) и пересечение ОВД скользящего стержня и свободной системы (заштрихованная область с точечной заливкой на рис. 20), подробно описанные в предыдущем разделе, также присутствуют и в данном случае. Здесь мы их повторно рассматривать не будем.

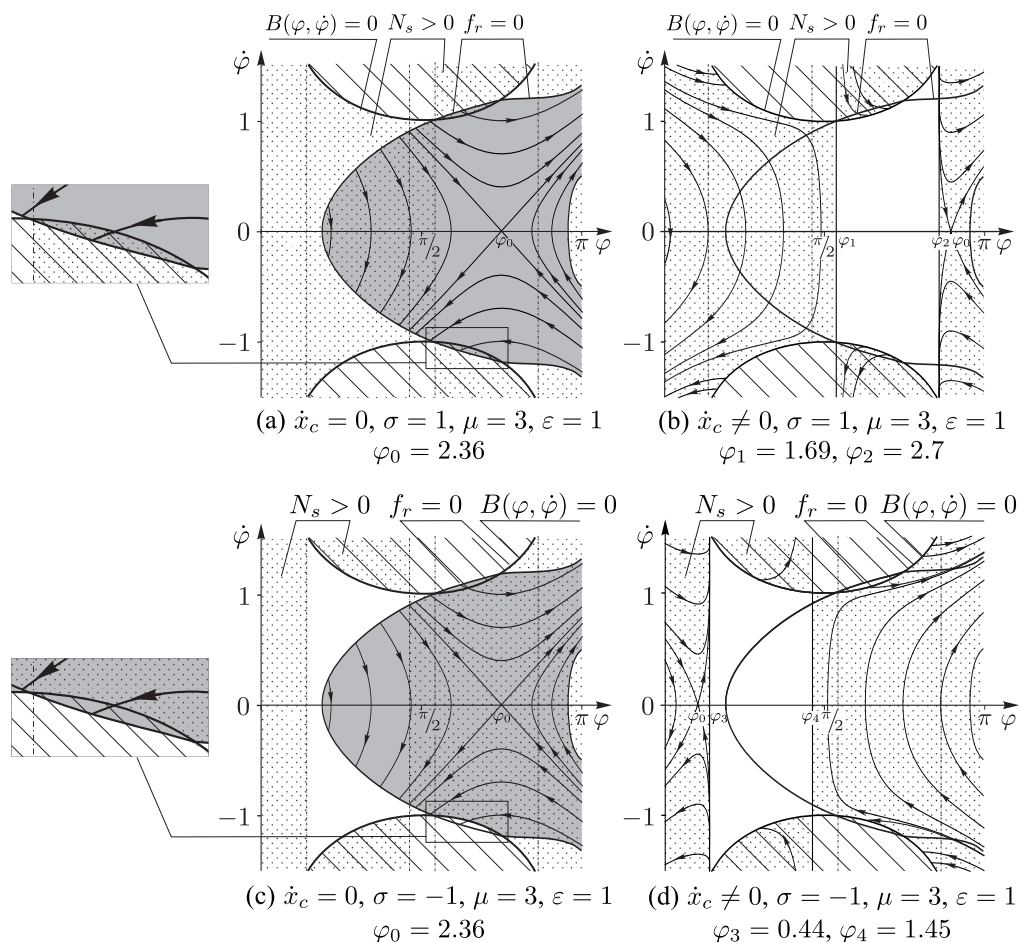


Рис. 20. ОВД и фазовые траектории перевернутого маятника (а), (с) и проекции ОВД и фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = \pm 1$ (b), $\varepsilon = 1$ и $\mu = 3$. ОВД перевернутого маятника обозначена темно-серым цветом, скользящего стержня — точечной заливкой, свободной системы — штриховкой.

В данном случае, в отличие от предыдущих, возможна ситуация, когда граница свободной системы $B(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$ проходит внутри ОВД перевернутого маятника. Эта область параметров обозначена серым цветом на рисунке 14. Выберем конкретные значения из этой области ($\varepsilon = 1$ и $\mu = 3$) и проанализируем возникающие динамические эффекты. Для

этого совместим ОВД и фазовые траектории перевернутого маятника (рис. 20а, с) и проекции ОВД и фазовых траекторий скользящего стержня на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $\sigma = \pm 1$ (рис. 20b, d).

В отличие от ранее рассмотренных случаев, при выбранных параметрах на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ появляются области (пример такой области представлен на увеличенном фрагменте на рис. 20а, с), в которых одновременно выполнено несколько условий:

1. на плоскости $\dot{x}_c = 0$ возможно движение перевернутого маятника,
2. на плоскости $\dot{x}_c = 0$ и всюду в ее окрестности ($\dot{x}_c \neq 0$) возможен отрыв,
3. в окрестности плоскости $\dot{x}_c = 0$ при $\sigma = 1$ существует решение для скользящего стержня, а при $\sigma = -1$ — не существует ($N_s < 0$), кроме того, как показано на рисунке 21, в случае $\sigma = 1$ на траекториях в модели скользящего стержня $\dot{V} > 0$, то есть они стремятся покинуть малую окрестность $\dot{x}_c = 0$,
4. в областях единственности решений (как в модели перевернутого маятника, так и для скользящего стержня) существует множество траекторий ненулевой меры, которые достигают границы этой области.

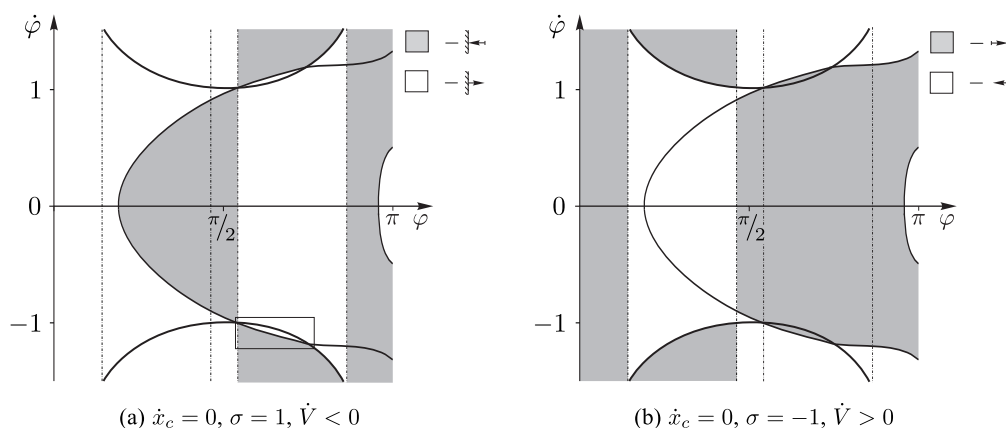


Рис. 21. Области, в которых при $\sigma = 1$ (а) и при $\sigma = -1$ (б), $\varepsilon = 1$, $\mu = 3$ ускорение $\dot{V} = \ddot{x}_c$ вблизи $\dot{x}_c = 0$ направлено к плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$, обозначены серым цветом.

Таким образом, в данном случае (наклонная плоскость) области парадоксов могут возникать не только при специальном подборе начальных условий, но и в процессе движения, когда система, корректно описываемая одной из моделей, достигает области, в которой возможна неединственность решения.

5. Заключение

В данной работе методами качественной теории динамических систем мы выполнили анализ задачи о плоском движении стержня на шероховатой наклонной плоскости, которое описывается в рамках модели абсолютно твердого тела и закона сухого трения Кулона. Коротко подытожим основные результаты.

1. Показано, что если коэффициент трения меньше некоторого критического ($\mu \leq \mu^*$), то модели перевернутого маятника и скользящего стержня корректно описывают движение системы вплоть до момента отрыва. Перед отрывом точка контакта всегда про-

скальзывает (мера траекторий перевернутого маятника, достигающих области отрыва, равна нулю).

2. Для $\mu > \mu^*$ и горизонтальной плоскости $\varepsilon = 0$ появляются области парадоксов как неединственности, так и области несуществования решений, причем траектории из корректных областей могут достигать области парадоксального поведения.
3. При больших коэффициентах трения ($\mu > \mu^*$) и наклонной плоскости $\varepsilon > 0$ дополнительно возникает область отрыва, которой достигают как решения в модели скользящего стержня, так и в модели перевернутого маятника.

До сих пор нерешенной задачей является экспериментальная проверка закономерностей движения твердого тела с острым краем при больших коэффициентах трения ($\mu > \mu^*$) и выяснение реальных динамических эффектов, к которым приводят парадоксы неединственности и несуществования (по аналогии с экспериментом Прандтля для системы Пенлеве–Клейна, описанным в [21]). Тем не менее, отметим экспериментальные работы, где для различных модификаций рассматриваемой системы показана возможность задания таких начальных условий, при которых фазовые траектории могут попасть в парадоксальную область [7], а также продемонстрировано явление тангенциального удара в области, соответствующей несуществованию решения [6].

К открытым проблемам также относятся задачи качественного анализа динамики волчка с острым краем и диска на шероховатой плоскости (при наличии сухого трения) с учетом возможного проскальзывания. В работе [14] указано, что в такого рода системах могут наблюдаться отрывы от опоры.

Авторы благодарят А. В. Борисова, А. П. Иванова, Д. В. Трещёва и А. А. Килина за замечания и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Genot F., Brogliato B. New results on Painlevé paradoxes // Eur. J. Mech. A Solids, 1999, vol. 18, no. 4, pp. 653–677.
- [2] Kessler P., O'Reilly O. M. The ringing of Euler's disk // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 1, pp. 49–60. (См. также: Кесслер П., О'Рейли О. М. Звон диска Эйлера // Нелинейная динамика, 2005, т. 1, № 2, с. 247–260.)
- [3] Song P., Kraus P., Kumar V. Analysis of rigid body dynamic models for simulation of systems with frictional contacts // J. Appl. Mech., 2000, vol. 68, no. 1, pp. 118–128.
- [4] Stewart D. E. Dynamics with inequalities: Impacts and hard constraints. Philadelphia, PA: SIAM, 2011. 387 pp. (См. также: Стюарт Д. Е. Динамика систем с неравенствами. Удары и жесткие связи. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. 551 с.)
- [5] Thiry R. Étude d'un problème particulier ou intervient le frottement de glissement // Nouv. Ann. de Math., 1922, Sér. 5, vol. 1, pp. 208–216.
- [6] Zhao Zh., Liu C., Ma W., Chen B. Experimental investigation of the Painlevé paradox in a robotic system // J. Appl. Mech., 2008, vol. 75, 041006, 11 pp.
- [7] Or Y., Rimon E. Investigation of Painlevé's paradox and dynamic jamming during mechanism sliding motion // Nonlinear Dynam., 2012, vol. 67, pp. 1647–1668.
- [8] Болотов А. Е. О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением // Матем. сб., 1906, т. 25, № 4, pp. 562–708.
- [9] де Спарт. О трении скольжения // Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. С. 232–235.
- [10] Иванов А. П. Бифуркации в системах с трением: Основные модели и методы // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 479–498.



- [11] Иванов А. П. Об условиях отрыва в задаче о движении твердого тела по шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 287–302.
- [12] Иванов А. П. Основы теории систем с трением. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 304 с.
- [13] Иванов А. П. Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением // *ПММ*, 2008, т. 72, № 4, с. 531–546.
- [14] Иванов А. П., Шувалов Н. Д., Иванова Т. Б. Об условиях отрыва волчка на абсолютно шероховатой опоре // *Вестн. УдГУ. Матем. Механ. Компьют. науки*, 2012, т. 3, с. 103–113.
- [15] Кулешов А. С., Трещев Д. В., Иванова Т. Б., Наймушина О. С. Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 601–625.
- [16] Лекорню Л. О трении скольжения // Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. С. 221–224.
- [17] Ле Суан Ань. Парадоксы Пенлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // *ПММ*, 1990, т. 54, № 4, с. 520–529.
- [18] Неймарк Ю. И. Еще раз о парадоксах Пэнлеве // *МТТ*, 1995, № 1, с. 17–21.
- [19] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки // *ПММ*, 1995, т. 59, № 3, с. 366–375.
- [20] Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. 105 с.
- [21] Пфейфер Ф. К вопросу о так называемых кулоновых законах трения // Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. С. 264–316.
- [22] Розенблат Г. М. О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой // *Нелинейная динамика*, 2006, т. 2, № 3, с. 293–306.
- [23] Самсонов В. А. Динамика тормозной колодки и «удар трением» // *ПММ*, 2005, т. 69, № 6, с. 912–921.
- [24] Самсонов В. А. Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. Москва: Наука, 1980. 64 с.
- [25] Фуфаев Н. А. Динамика системы в примере Пэнлеве – Клейна. О парадоксе Пэнлеве // *МТТ*, 1991, № 4, с. 48–53.

The dynamics of rigid body whose sharp edge is in contact with a inclined surface with dry friction

I. S. Mamaev¹, T. B. Ivanova²

¹Institute of Computer Science;
Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

²Faculty of Physics and Energetics
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

¹mamaev@rcd.ru, ²tbesp@rcd.ru

In this paper we consider the dynamics of rigid body whose sharp edge is in contact with a rough plane. The body can move so that its contact point does not move or slips or loses touch with the support. In this paper, the dynamics of the system is considered within three mechanical models that describe different modes of motion. The boundaries of definition range of each model are given, the possibility of transitions from one mode to another and their consistency with different coefficients of friction on the horizontal and inclined surfaces is discussed.

MSC 2010: 70F40, 70E18

Keywords: rod, Painlevé paradox, dry friction, separation, frictional impact

Received March 28, 2013, accepted May 13, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 567–593 (Russian)

