



УДК: 517.9

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний

А. П. Кузнецов, Н. В. Станкевич

Изучена динамика двух связанных генераторов квазипериодических колебаний. Обнаружена возможность полной и фазовой синхронизации генераторов в режиме квазипериодических колебаний. Методом карт динамических режимов и ляпуновских показателей изучены особенности устройства плоскостей параметров, на которых выявлены характерные структуры типа резонансной паутины Арнольда. Обсуждаются возможные квазипериодические бифуркации в системе.

Ключевые слова: динамические системы, квазипериодические колебания, синхронизация, бифуркации

1. Введение

Квазипериодические колебания весьма распространены в различных областях науки и техники [1–8]. Поэтому проблема синхронизации таких колебаний является важной задачей нелинейной теории. Как ни парадоксально, задача о синхронизации квазипериодических колебаний изучена гораздо меньше, чем для случая регулярных или хаотических режимов. При этом достаточно полная теория предполагает широкий круг возможных задач.

В частности, это может быть задача о динамике двух связанных автономных систем с квазипериодическими колебаниями (квазипериодических генераторов). Известно не так

Получено 19 апреля 2013 года

После доработки 27 июня 2013 года

Работа поддержана грантами РФФИ (№ 11-02-91334, 12-02-31465).

Кузнецов Александр Петрович

arkuz@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 387

Станкевич Наталия Владимировна

stankevichnv@mail.ru

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77



много примеров квазипериодических генераторов, удобных для анализа методами нелинейной динамики. Первым примером, вероятно, является одна из модификаций схемы Чуа [8]. Однако она описывается кусочно-линейной характеристикой и осталась малоизученной в контексте проблем синхронизации квазипериодических колебаний.

Лишь сравнительно недавно была предложена модификация генератора Анищенко – Астахова с квазипериодической автономной динамикой [9–12]. Она получается введением в классический генератор Анищенко – Астахова новой переменной, так что размерность фазового пространства оказывается равной четырем. Это позволило существенно продвинуться в решении обсуждаемой проблемы. Для автономной системы обнаружен такой существенный эффект, как удвоение инвариантных торов [9]. Важные результаты были получены и для двух связанных генераторов [10–12]. Так, выявлена картина поэтапного возникновения резонансных инвариантных торов на поверхности высокоразмерных торов. Эта картина ассоциируется с последовательным каскадом седло-узловых бифуркаций инвариантных торов. С помощью спектра показателей Ляпунова было проиллюстрировано, как при увеличении частотной расстройки в системе из двухчастотного тора последовательно рождается трехчастотный тор, а затем и четырехчастотный. Данный эффект был обнаружен и в радиофизическом эксперименте. Однако были изучены только случаи малой связи и малых частотных расстроек генераторов. Кроме того, исследования ограничиваются однопараметрическим анализом. В то же время на примерах задач классической синхронизации регулярных колебаний известно, насколько важна и полезна двухпараметрическая картина при анализе связанных генераторов.

В настоящей работе мы проведем двухпараметрический анализ синхронизации квазипериодических генераторов в широком диапазоне изменения параметров. Мы используем несколько более простую версию генератора квазипериодических колебаний [13, 14], размерность которой равна трем.

2. Связанные квазипериодические генераторы

В качестве автономной системы будем использовать генератор квазипериодических колебаний, предложенный в [13, 14]. Он представляет собой «гибрид» автогенератора с жестким возбуждением и релаксационного генератора. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ω_0 — собственная частота генератора, λ — параметр возбуждения (отрицательного трения), β отвечает за насыщение колебаний при больших амплитудах. Параметр λ входит в уравнение вместе с аддитивной добавкой z , которая характеризует состояние накопительного релаксационного элемента, а эволюция этой переменной во времени задается вторым уравнением. Система (2.1) имеет два независимых временных масштаба, что и обеспечивает возможность двухчастотной квазипериодической динамики. В качестве первого выступает период колебаний автогенератора $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, а в качестве второго — характерное время восстановления состояния накопительного элемента $\tau \sim \mu^{-1}$. На рисунке 1 показан пример фазового портрета системы (2.1) в виде инвариантного тора, квазипериодическая реализация $x(t)$ и спектр Фурье квазипериодического режима.

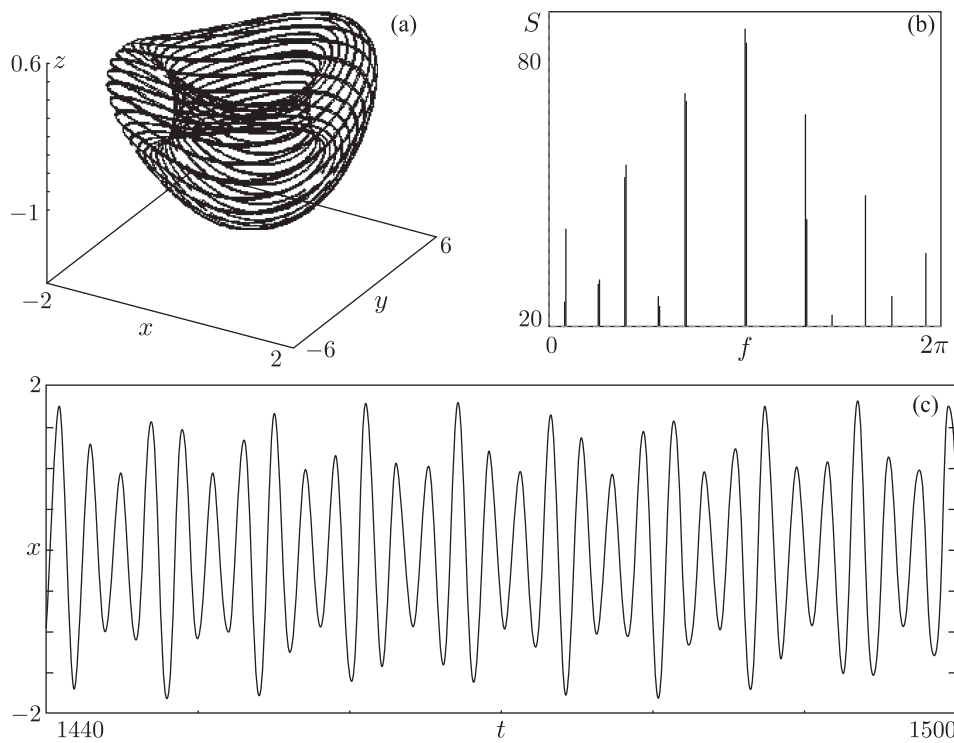


Рис. 1. Фазовый портрет в виде инвариантного тора (а), спектр Фурье (б) и реализация (с) системы (2.1) в квазипериодическом режиме; $\lambda = 0$, $\mu = 0.9$, $\omega_0 = \pi$.

Рассмотрим систему двух связанных генераторов такого типа:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 - (\lambda + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)\dot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 + M_C(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\
 \dot{z}_1 &= \mu_1 - x_1^2, \\
 \ddot{x}_2 - (\lambda + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4)\dot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 + M_C(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\
 \dot{z}_2 &= \mu_2 - x_2^2.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь x_1, z_1 — переменные, характеризующие первый генератор, x_2, z_2 — переменные второго генератора, M_C — коэффициент диссипативной связи.

Система (2.2) характеризуется четырьмя независимыми частотами, которые определяются четырьмя управляющими параметрами: собственными частотами генераторов ω_{01}, ω_{02} и частотами релаксационных колебаний μ_1, μ_2 . Изменять эти параметры можно различными способами, и мы рассмотрим несколько вариантов.

Для нас важно рассмотреть ситуацию, когда подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания. Для этого нужно отстроиться от возможных сильных резонансов. Воспользуемся тем, что в одиночной системе при $\omega_0 > 3$ резонансы становятся узкими, а квазипериодические режимы доминируют [13, 14]. Поэтому фиксируем $\omega_{01} = \omega_0$, $\omega_{02} = \omega_0 + \Delta$, где Δ будет представлять собой регулируемую частотную расстройку генераторов. Выбираем остальные параметры: $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$. В этом случае первый генератор в автономном режиме демонстрирует квазипериодические колебания, а изменение частотной расстройки Δ в положительную область оставляет преимущественно автономный квазипериодический режим и во второй подсистеме.

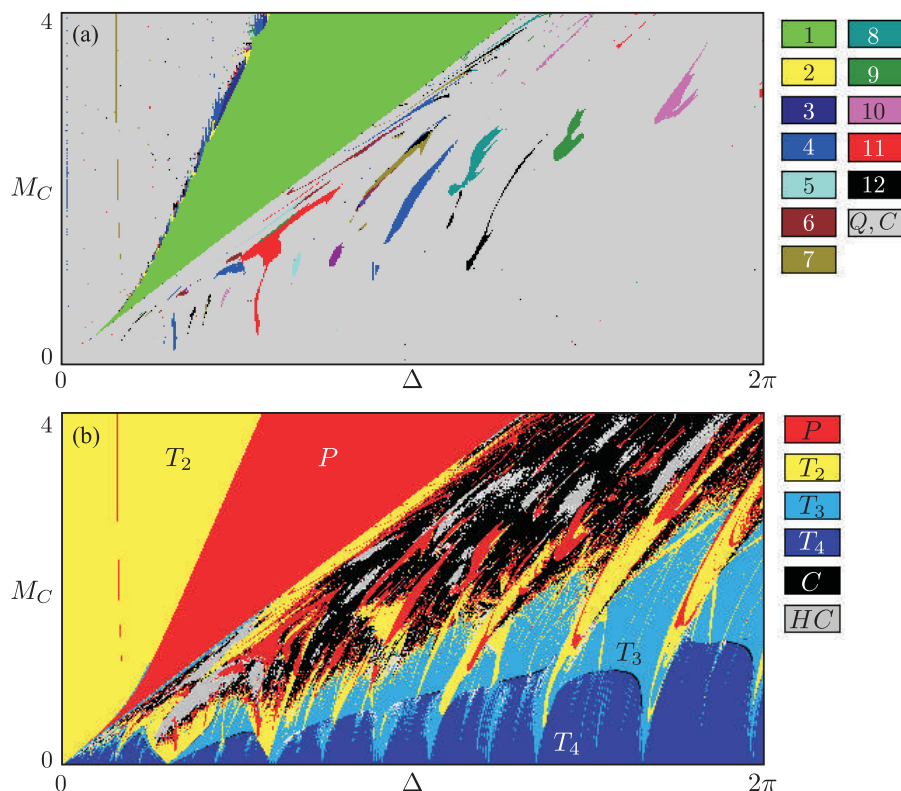


Рис. 2. (а) Карта динамических режимов, (б) карта ляпуновских показателей связанных генераторов (2.2); $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$.

На рисунке 2а представлена карта динамических режимов системы связанных генераторов (2.2) на плоскости «частотная расстройка–величина связи» (Δ , M_C) в широком диапазоне изменения параметров. Различными цветами отмечены регулярные режимы разных периодов, цветовая палитра расшифрована в правой части рисунка. Серым цветом показаны непериодические (хаотические и квазипериодические) режимы.¹

Для более детальной характеристики системы была также построена карта показателей Ляпунова, представленная на рисунке 2б. Для нее цветовая палитра выбрана в соответствии с сигнатурой спектра показателей Ляпунова, так что визуализируются следующие режимы: $\Lambda_1 = 0 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_5 > \Lambda_6$ — периодический режим P , $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0 > \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_5 > \Lambda_6$ — двухчастотный квазипериодический режим T_2 , $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0 > \Lambda_4 > \Lambda_5 > \Lambda_6$ — трехчастотный квазипериодический режим T_3 , $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = 0 > \Lambda_5 > \Lambda_6$ — четырехчастотный квазипериодический режим T_4 , $\Lambda_1 > \Lambda_2 = 0 > \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_5 > \Lambda_6$ — хаотический режим C , $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 = 0 > \Lambda_4 > \Lambda_5 > \Lambda_6$ — гиперхаотический режим HC .

Начнем обсуждение с самой большой области двухчастотных режимов, обозначенной символом T_2 на рисунке 2б. Она имеет форму традиционного языка с основанием в точке $\Delta = 0$, $M_C = 0$. Внутри этой области имеет место режим *фазовой синхронизации квазипериодических колебаний*. Дадим несколько соответствующих иллюстраций.

На рисунке 3 представлено бифуркационное дерево — зависимость переменной x_1 от частотной расстройки Δ в сечении Пуанкаре плоскостью $\dot{x}_1 = 0$ при фиксированном уровне

¹Период колебаний определялся как период цикла в сечении Пуанкаре плоскостью $\dot{x}_1 = 0$.

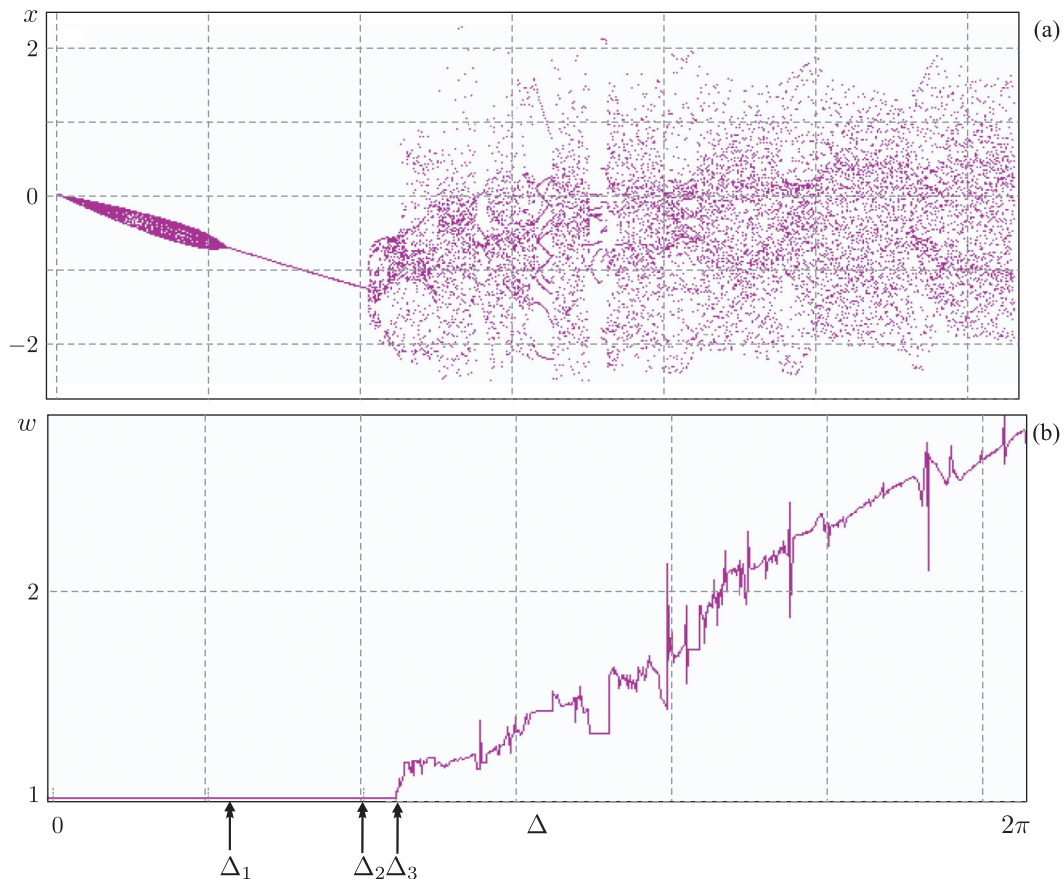


Рис. 3. Бифуркационное дерево и график зависимости числа вращения для $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$, $M_C = 2$.

связи $M_C = 2$. Под ним расположен график зависимости числа вращения w от параметра Δ . Число вращения вычислялось по следующей формуле:

$$w = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t^{x_1}}{N_t^{x_2}}, \quad (2.3)$$

где $N_t^{x_1}$ — количество пересечений фазовой траекторией гиперплоскости $x_1 = 0$, $N_t^{x_2}$ — количество пересечений фазовой траекторией гиперплоскости $x_2 = 0$. Как видно из бифуркационной диаграммы, при $\Delta < \Delta_1$ в системе наблюдается нерегулярный квазипериодический режим. На графике числа вращения аналогичная область отвечает постоянному числу вращения $w = 1$. Таким образом, генераторы взаимно захвачены, но их колебания являются двухчастотными квазипериодическими.

При увеличении частотной расстройки при $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$ возникает чисто периодический режим. На карте режимов (рис. 2а) ему отвечает область периода 1, показанная зеленым цветом². Таким образом, при выходе из основного языка двухчастотной квазипериодичности при большой связи возникает *полная синхронизация* генераторов, отвечающая простейшему периодическому режиму. Можно сказать, что при достаточно большой связи

²Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/2362/0>.

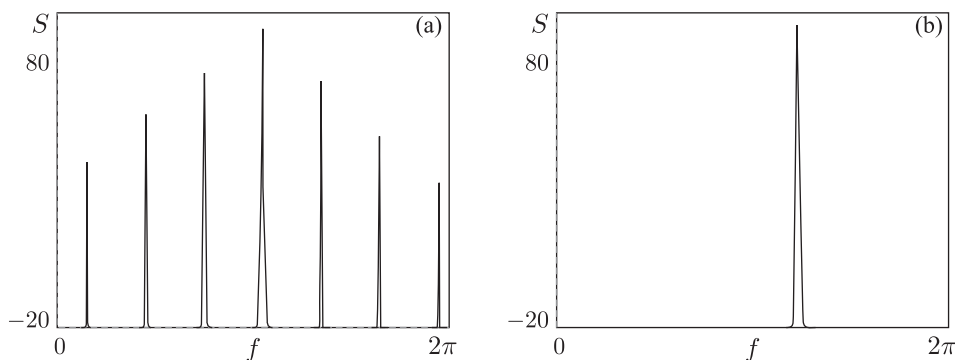


Рис. 4. Спектры Фурье системы (2.2) при $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$, $M_C = 2$: (а) $\Delta = 0.5$ и (б) $\Delta = 1.5$.

и достаточно большой частотной расстройке наблюдается подавление квазипериодических колебаний за счет взаимодействия генераторов. Рисунок 4 демонстрирует эволюцию спектра Фурье при переходе от квазипериодической фазовой синхронизации к полной синхронизации с захватом всех частотных компонент. Частоту возникающей основной компоненты можно легко оценить по формуле

$$\omega_0^{\text{ср}} = \frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2} = \omega_0 + \frac{\Delta}{2}. \quad (2.4)$$

Далее, в небольшом интервале в диапазоне $\Delta_2 < \Delta < \Delta_3$, как видно из графика числа вращения, также имеет место фазовая синхронизация, но режим снова становится неперриодическим (двухчастотным).

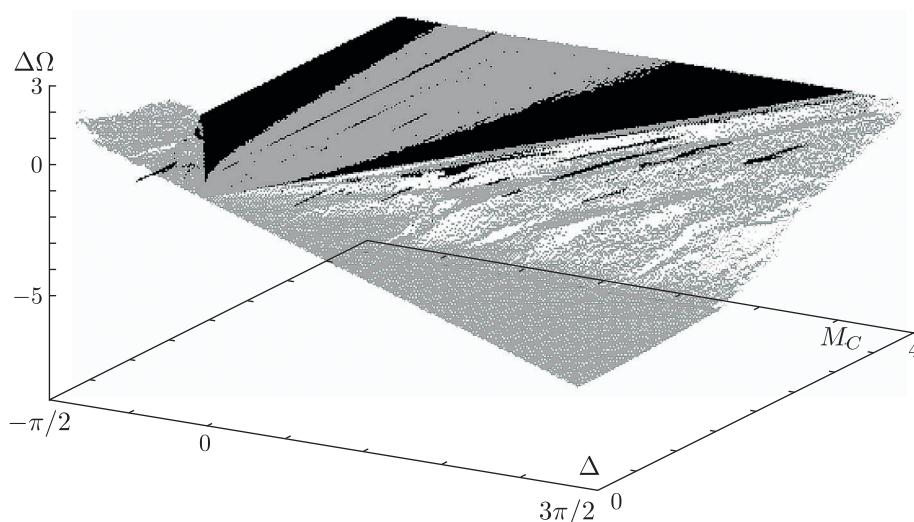


Рис. 5. Поверхность разности наблюдаемых частот генераторов в зависимости от частотной расстройки и величины связи. Серый цвет — нерегулярные режимы, черный — периодические; $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$.

Еще одна иллюстрация фазовой синхронизации в системе (2.2) дана на рисунке 5. На этом рисунке представлена трехмерная поверхность, дающая зависимость разности

фаз генераторов³ $\Delta\Omega$ от частотной расстройки и параметра связи. Кроме того, нерегулярные режимы на построенной поверхности отмечены серым цветом. Черным цветом показаны периодические режимы. Как видно из рисунка, захват квазипериодических колебаний происходит не только при малой связи и расстройке, но и при больших значениях параметров.

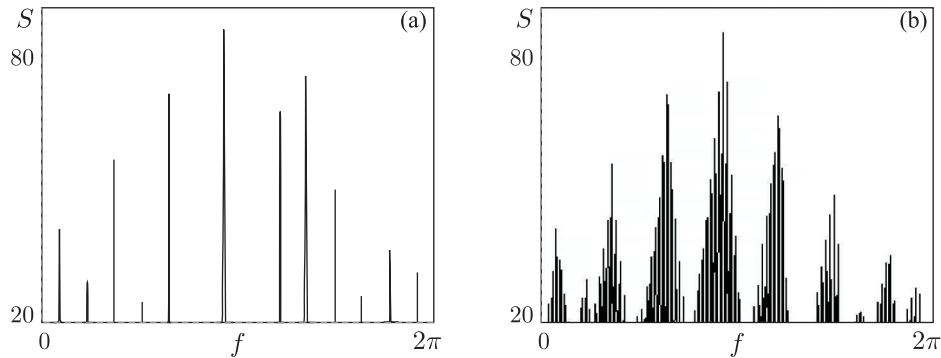


Рис. 6. Спектры Фурье системы (2.2) при $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$, $M_C = 0.07$: (a) $\Delta = 0.05$ и (b) $\Delta = 0.1$.

Язык полной синхронизации на рисунке 2а сужается при уменьшении связи и имеет порог по ее величине. Это означает, что при выходе из основной двухчастотной области при малой связи будет возникать квазипериодический режим более высокой размерности (рис. 2б). Особенность данной системы состоит в том, что при малой связи практически сразу происходит переход от двухчастотного к четырехчастотному тору. Причина, скорее всего, в идентичности генераторов по второму частотному параметру: $\mu_1 = \mu_2$. На рисунке 6 представлены примеры спектров Фурье, иллюстрирующие такой переход от двухчастотных к четырехчастотным колебаниям. На рисунке хорошо видно, что для двухчастотных квазипериодических колебаний (рис. 6а) спектр имеет характерный вид: основной пик окружен компонентами-спутниками. На рисунке 6б изображен спектр для четырехчастотного квазипериодического режима. На рисунке видно, что вокруг компонент рисунка 6а появились новые компоненты-спутники.

Вернемся к рисунку 2. На рисунке 2б можно видеть, что при малой связи доминируют четырехчастотные торы. С другой стороны, имеет место система языков трехчастотных торов, основания которых расположены на оси частотной расстройки Δ . Вершины этих языков выстроены вдоль границы, которая отделяет возникающую при большой связи сплошную полосу трехчастотных режимов. В эту полосу встроены области двухчастотной квазипериодичности, а при еще большей связи возникают хаос и гиперхаос. Внутри областей двухчастотной квазипериодичности, хаоса и гиперхаоса имеется система островов периодических режимов более высокого порядка. Они, однако, не образуют какой-либо регулярной структуры. Все области периодических режимов имеют порог по величине связи.

Обратимся к рисунку 7, на котором показан график зависимости старших ляпуновских показателей от величины связи для частотной расстройки $\Delta = 4.52$. Этот график позволяет описать эволюцию торов с ростом связи. Можно видеть, что области торов разной размерности чередуются. За возникновение торов отвечают специальные *квазипериодиче-*

³В данном случае аттракторы являются фазово-когерентными, и их фазы хорошо определяются чисто геометрическим образом [1].

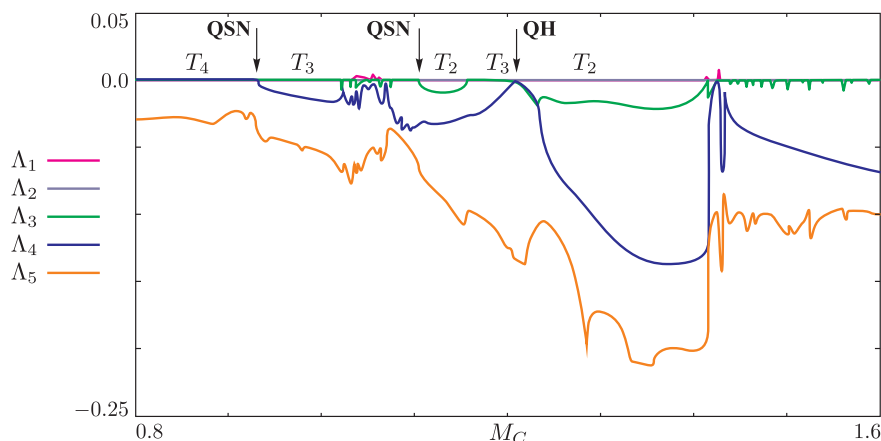


Рис. 7. График зависимости старших ляпуновских показателей от величины связи и точки квазипериодических бифуркаций разного типа при $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$, $\Delta = 4.52$.

ские бифуркации [15]. В рассматриваемом случае возможны два типа квазипериодических бифуркаций. Так, в точках **QSN** происходят седло-узловые бифуркации торов, причем они могут наблюдаться как для двухчастотных, так и для трехчастотных торов. В свою очередь, в точке **QH** происходит квазипериодическая бифуркация Хопфа – Неймарка – Сакера мягкого рождения трехчастотного тора из двухчастотного.⁴

3. Случай различных частотных параметров

Как мы отмечали, исследуемая система характеризуется четырьмя частотными параметрами. Поэтому можно дать и другие иллюстрации вложения картины в пространство параметров. Рассмотрим динамику на плоскости параметров собственных частот генераторов $(\omega_{01}, \omega_{02})$. При этом параметры μ_1 и μ_2 зафиксируем одинаковыми и соответствующими квазипериодическому режиму колебаний $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$. На рисунке 8 представлены карты показателей Ляпунова на плоскости при достаточно большой и малой связи генераторов. Цветовая палитра аналогична случаю рисунка 2b. Как видно из рисунка 8a, при большой связи и малых значениях частот в системе доминирует гиперхаос. Это связано с тем, что в автономном режиме подсистемы демонстрируют хаос, и каждый из осцилляторов в спектре показателей Ляпунова имеет по одному положительному показателю. В связанном виде системы характеризуются двумя положительными показателями, что и соответствует гиперхаосу.

На рисунке хорошо видна симметрия картины относительно линии равенства частот $\omega_{01} = \omega_{02}$. Это естественно, так как осцилляторы идентичны по всем остальным параметрам. На рисунке хорошо видна полоса двухчастотных квазипериодических режимов вдоль диагонали $\omega_{01} = \omega_{02}$. Эта полоса соответствует области квазипериодической фазовой синхронизации. Интересным представляется тот факт, что ширина полосы остается неизменной с увеличением частот ω_{01} и ω_{02} .

⁴Отличить два этих типа квазипериодических бифуркаций можно по зависимости показателей Ляпунова от параметра. В первом случае один из показателей обращается в нуль, остается нулевым за порогом бифуркации, а следующий показатель всюду отрицательный. Для квазипериодической бифуркации Хопфа до порога бифуркации два показателя совпадают, оба обращаются в нуль в точке бифуркации, затем один остается нулевым, а второй снова уходит в отрицательную область [15].

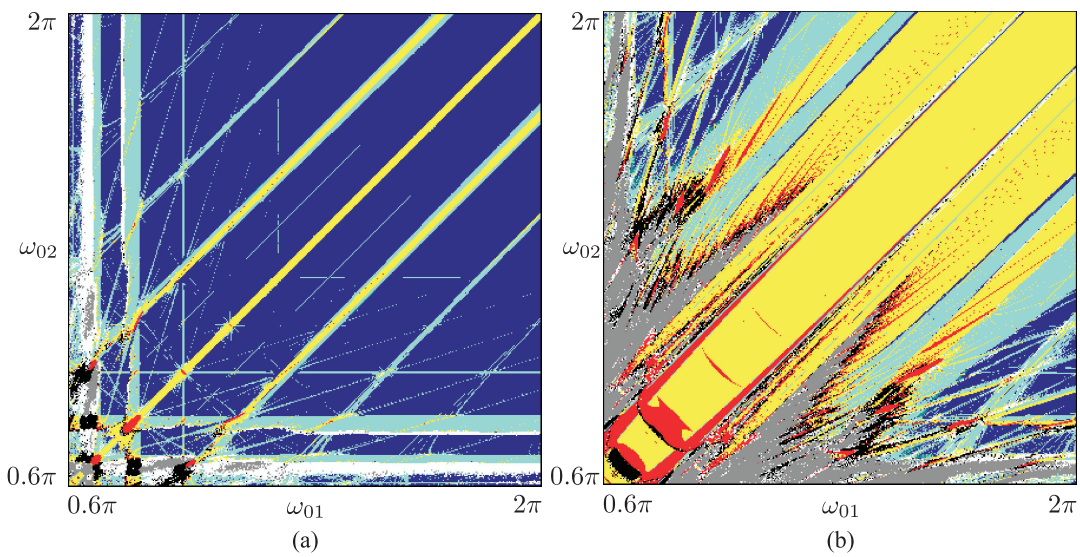


Рис. 8. Карты ляпуновских показателей на плоскости собственных частот генераторов: (а) $M_C = 0.05$, (б) $M_C = 0.5$; остальные параметры: $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$.

При малой связи $M_C = 0.05$ на рисунке 8b полоса фазовой синхронизации становится очень узкой. Теперь на карте хорошо видна *резонансная паутина Арнольда* [16]. Она представляет собой погруженную в четырехчастотную область систему полос областей двухчастотных и трехчастотных режимов, на пересечении которых наблюдаются периодические режимы. Такая структура плоскости параметров связана с различными резонансами в системе.

На рисунке 9 даны ляпуновские карты на плоскости двух других частотных параметров (μ_1, μ_2) для нулевой и ненулевой частотной расстройки. Вдоль диагонали также можно видеть область двухчастотных режимов в виде полосы со встроенными периодическими резонансами высших порядков. Она погружена в остров трехчастотных режимов. Интересно отметить, что одна граница области трехчастотных режимов определяется квазипериодической линией бифуркации Хопфа – Неймарка – Сакера **QH**, а вторая — линией седло-узловой бифуркации двухчастотного тора **QSN**.⁵ При добавлении в систему частотной расстройки вблизи диагонали появляется область четырехчастотных торов.

4. Заключение

Таким образом, динамика двух связанных генераторов квазипериодических колебаний в пространстве параметров дает сложную картину. Ее элементами являются возможность фазовой квазипериодической синхронизации и возникновение полной синхронизации с регулярными колебаниями и захватом всех частотных компонент. Полная синхронизация носит пороговый характер по отношению к величине связи. Имеется система языков трехчастотных торов, перекрытие которых образует полосу трехчастотных режимов. В эту полосу встроены области двухчастотных квазипериодических режимов и нерегулярные острова периодических режимов высших порядков. В системе возможны как седло-узловые бифуркации торов разной размерности, так и квазипериодические бифуркации Хопфа – Неймарка

⁵Здесь определение типа бифуркаций также осуществлено с помощью графика зависимости ляпуновских показателей от параметра.

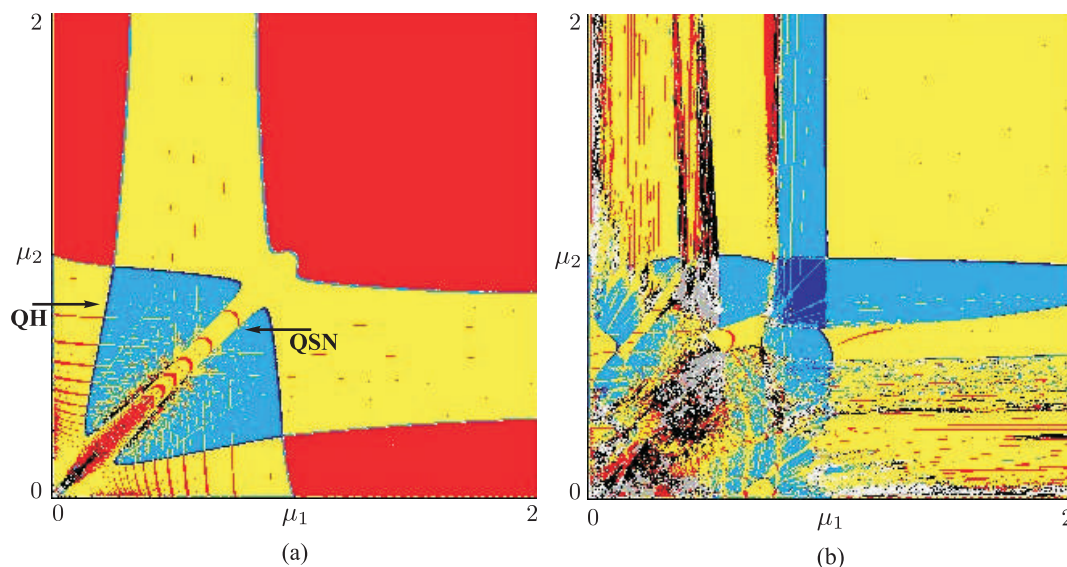


Рис. 9. Карты показателей Ляпунова для системы (2.2) при $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$, $M_C = 0.1$: (a) $\Delta = 0$, (b) $\Delta = 0.75$.

ка–Сакера. На плоскости параметров собственных частот генераторов при малой связи возникает резонансная паутина Арнольда. С увеличением связи паутина Арнольда разрушается.

Список литературы

- [1] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003. 494с.
- [2] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука, Физматлит, 1997. 247 с.
- [3] Glass L., Mackey M. C. From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton–New York: Princeton Univ. Press, 1988. 248 pp.
- [4] Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. Synchronization: From simple to complex. Berlin: Springer, 2008. 449 pp.
- [5] Glazier J. A., Libchaber A. Quasi-periodicity and dynamical systems: An experimentalist's view // IEEE Trans. Circuits and Systems, 1988, vol. 35, no. 7, pp. 790–809.
- [6] Izhikevich E. M. Neural excitability, spiking and bursting // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2000, vol. 10, no. 6, pp. 1171–1266.
- [7] Straube R., Flockerzi D., Muller S. C., Hauser M. J. B. Origin of bursting pH oscillations in an enzyme model reaction system // Phys. Rev. E, 2005, vol. 72, no. 6, 066205, 12 pp.
- [8] Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R. Chaos via torus breakdown // IEEE Trans. Circuits and Systems, 1987, vol. 34, no. 3, pp. 240–253.
- [9] Анищенко В. С., Николаев С. М. Генератор квазипериодических колебаний: бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ, 2005, т. 31, № 19, с. 88–94.
- [10] Анищенко В. С., Николаев С. М. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 1, с. 39–56.
- [11] Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E, 2006, vol. 73, no. 5, 056202, 8 pp.

- [12] Anishchenko V. S., Nikolaev S. M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, no. 4, 046216, 4 pp.
- [13] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Stankevich N. V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2010, vol. 15, no. 6, pp. 1676–1681.
- [14] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Станкевич Н. В. Автономный генератор квазипериодических колебаний // *ПНД*, 2010, т. 18, № 2, с. 51–61.
- [15] Vitolo R., Broer H., Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 154–184.
- [16] Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 769–787.

Synchronization of generators of quasiperiodic oscillations

Alexander P. Kuznetsov¹, Natalia V. Stankevich²

¹Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS
Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

²Saratov State Technical University
Polytechnicheskaya st. 77, Saratov, 410054, Russia

¹apkuz@rambler.ru, ²stankevichnv@mail.ru

The dynamics of two coupled generators of quasiperiodic oscillations is studied. The opportunity of complete and phase synchronization of generators in the regime of quasiperiodic oscillations is obtained. The features of structure of parameter plane is researched using charts of dynamical regimes and charts of Lyapunov exponents, in which typical structures as resonance Arnold web were revealed. The possible quasiperiodic bifurcations in the system are discussed.

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Keywords: dynamical systems, quasiperiodic oscillations, synchronization, bifurcations

Received April 19, 2013, accepted June 27, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 409–419 (Russian)