Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 3. С. 435–457.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.938, 533.1
MSC 2010: 37A60, 65P20

Уравнение состояния идеального газа в сообщающихся сосудах

Д. М. Наплеков, В. П. Семиноженко, В. В. Яновский

В работе рассматривается идеальный газ в двух сообщающихся сосудах. В одном из них поведение частиц является эргодичным. В другом поведение частиц заведомо не эргодично. Значительная часть фазового пространства этого сосуда занята островками устойчивости. Показано, что давление газа устанавливается равномерным в первом сосуде и сильно не равномерным во втором. Рассмотрено установившееся распределение времен нахождения частиц в сосудах. Для неэргодичного сосуда оно оказывается довольно необычным: дельтообразные пики в области малых времен, участки степенного спадания и экспоненциальный хвост. Такой вид распределения оказался связан с устройством островков устойчивости, разрушившихся при соединении сосудов. Получено уравнение состояния газа в первом сосуде. Уравнение состояния отличается от уравнения состояния идеального газа наличием добавки к объему сосуда. Таким образом, форма границы сосуда влияет на уравнение состояния газа. Показано, что возникающая поправка к объему хорошо коррелирует с долей фазового пространства под оставшимися не разрушенными островками устойчивости.

Ключевые слова: неэргодичность, идеальный газ, уравнение состояния, сообщающиеся сосуды, установление равновесия

1. Введение

Модель бесстолкновительного идеального газа является одной из наиболее часто используемых в физике. К поведению идеального газа сводится множество различных физических явлений. В этой модели молекулы газа считаются невзаимодействующими между собой и сталкивающимися с границей сосуда абсолютно упруго. Исходя из этого ясно, что

Получено 25 июня 2013 года
После доработки 25 июля 2013 года

Наплеков Дмитрий Михайлович
nmi@datasvit.net
Семиноженко Владимир Петрович
semynozhenko@isc.kharkov.com
Яновский Владимир Владимирович
yanovsky@isc.kharkov.ua
Институт монокристаллов, Национальная академия наук Украины
61001, Украина, г. Харьков, пр. Ленина, 60

поведение идеального газа определяется свойствами траектории одной частицы на достаточно длительных временах наблюдения. Это позволяет изучение идеального газа свести к движению частицы в биллиарде.

Математический биллиард [1] — модельная система, в которой частица движется внутри замкнутой границы биллиарда равномерно и прямолинейно, отражаясь от границы абсолютно упруго. Биллиарды — стандартный объект изучения в теории хаоса. Хорошо известны биллиарды с сильно развитым хаосом, в которых свойство эргодичности выполняется, например биллиард Синая. Однако есть и биллиарды со слабым типом хаоса, в фазовом пространстве которых существуют островки устойчивости, что делает их заведомо неэргодичными. Два биллиарда с разным типом хаоса, соединенные через небольшое отверстие, изучались в работах Заславского (см., например, [2]). В этих работах был поставлен вопрос установления термодинамического равновесия в такой системе. В работе [2] одним из биллиардов выбран эргодичный биллиард Синая, вторым — похожий биллиард, но с центральным рассеивателем в виде овала Кассини, имеющий островки устойчивости в фазовом пространстве. Хаос в обоих биллиардах был сильным с положительным показателем Ляпунова. Отверстие между биллиардами, через которое траектория может попадать и покидать биллиард, делает эти биллиарды открытыми.

Изучение открытых биллиардов в настоящее время становится все более важным разделом математической физики. Это связано как с большим количеством прикладных применений в акустике [19], гидродинамике [3, 4], климатологии [5], космологии [6], оптике [7–9] и физике плазмы [10], так и со связью с большим количеством теоретических вопросов — обоснованием статистической физики, связью между классическим и квантовым описаниями системы и др. [11–17]. Подробное описание связи биллиардов с этими разделами можно, например, найти в обзоре [18]. При рассмотрении открытых биллиардов, как правило, изучается распределение времен выхода траекторий из биллиарда. В целом, для хаотического поведения характерен экспоненциальный закон спадания этого распределения, для регулярного — степенной (см., например, [19]). При этом в хаотичных биллиардах зачастую кроме основного экспоненциального спадания наблюдается степенной хвост распределения. Как показано работе [20], одна и та же система, не имеющая островков устойчивости в фазовом пространстве, в зависимости от параметров может как иметь, так и не иметь степенной хвост. Его наличие также зависит от того, как распределены попадающие в биллиард частицы. Так, например, для стадиона Бунимовича (с равномерно распределенными по фазовому пространству начальными данными траекторий) в работе [21] показано наличие такого хвоста, но для траекторий, попадающих в этот же биллиард через отверстие в границе, в работе [22] показано, что для одних положений отверстия степенной хвост есть, для других — нет.

Обычно при рассмотрении идеального газа дополнительно без доказательства принимается гипотеза об эргодичности поведения газа и справедливости распределения Гиббса. Однако в теории математических биллиардов известны формы границы биллиарда, в которых движение частицы заведомо не является эргодическим. Кроме того, для биллиардов Синая и Бунимовича теоретически [23] и экспериментально [24] было показано, что замена физически невозможного случая идеально жесткой стенки на сглаженный потенциал приводит к появлению в фазовом пространстве островков устойчивости, то есть к потере эргодичности. Движение в биллиарде прямоугольной формы также не эргодично. Например, давление, которое траектория создает на стенки прямоугольного биллиарда, неравномерно и существенно зависит от выбора траектории. Детальное обсуждение возможности перехода к термодинамическому пределу в этом случае можно найти в [25]. Численные эксперименты по релаксации идеального газа на отрезке в состояние статистического равновесия и отличиям этого состояния от термодинамического детально обсуждаются в работе [26].

В этой работе мы рассмотрим поведение двумерного бесстолкновительного идеального газа, находящегося в двух сообщающихся сосудах, один из которых заведомо является не эргодичным. Мы будем рассматривать двумерные биллиарды, однако полученные результаты напрямую переносятся, например, на трехмерный случай движения частиц в прямой призме с основанием в виде рассматриваемого двумерного биллиарда. Отверстие, соединяющее сосуды, будет достаточно мало, чтобы в первом сосуде устанавливались типичные для эргодического случая распределения и можно было вводить макроскопические параметры газа обычным образом. Давление на его стенки будет равномерным. Изучим, как повлияет на свойства газа в первом сосуде неэргодичность сообщающегося с ним второго сосуда. Основное внимание уделим уравнению состояния идеального газа. В рассматриваемом случае давление зависит не только от объема и температуры, как обычно наблюдается у газа с эргодичным поведением. Такая модификация уравнения состояния качественно согласуется с релаксацией системы к стационарному распределению вероятностей в фазовом пространстве [27], отличающемуся от термодинамического. Однако пока динамика неэргодичного биллиарда далека от полностью регулярной, численный счет показал, что можно установить модифицированное уравнение состояния идеального газа, содержащее определенную поправку. Разумеется, соответствующая поправка к объему уже существенно зависит от устройства фазового портрета системы и определяется не термодинамическими переменными. В этом смысле модифицированное уравнение состояния идеального газа зависит и от не термодинамических переменных.

С другой точки зрения, ясно, что полученные результаты тесно примыкают к проблеме влияния структурно сложной границы на уравнение состояния идеального газа. Такое уравнение состояния становится применимым к большому числу важных практических приложений.

2. Биллиардный формализм

Для исследования подобных вопросов исключительно полезен оказывается лагранжев подход к описанию биллиардов [28]. Основная причина этого связана с возможностью рассматривать и сравнивать фазовые пространства как исходных биллиардов, так и их объединений. Кроме этого, исключительно наглядно выглядит результат появления отверстия на границе биллиарда, что удобно для качественных соображений о свойствах открытых биллиардов. Поэтому кратко напомним этот подход к динамике биллиардов. Границу замкнутого биллиарда в этом формализме удобно описывать параметрически натуральным параметром $s \in S^1$. Основным элементом, определяющим однозначно состояние биллиардной частицы, является отдельный прямолинейный сегмент траектории. Каждый такой сегмент однозначно определяется началом и концом прямолинейного отрезка, начинающегося и заканчивающегося на границе биллиарда. В координатах натурального параметра его можно задать как (s_1, s_2), где $s_1 \in S^1$ и $s_2 \in S^1$. Этот направленный отрезок однозначно определяет следующий сегмент биллиардной траектории. Таким образом, фазовое пространство биллиарда содержится в двумерном торе $T^2 = S^1 \times S^1$. Для различных форм биллиардов не каждый прямолинейный отрезок, начинающийся и заканчивающийся на границе биллиарда, принадлежит внутренности биллиарда и, следовательно, не может рассматриваться в качестве сегмента биллиардной траектории. Следовательно, фазовое пространство таких биллиардов — тор с дырками. Более детальное описание этого подхода можно найти в работе [28]. Так же просто выглядит структура динамического уравнения, определяющего следующий сегмент $(\overline{s}_1, \overline{s}_2)$ по предыдущему:

$$\overline{s}_1 = s_2,$$
$$\overline{s}_2 = f(s_1, s_2),$$

где функция $f(s_1, s_2)$ определяется формой биллиарда и обладает некоторыми общими и универсальными свойствами (см., например, [29]). В частности, она является инволюцией и для всех форм биллиардов удовлетворяет тождеству

$$f(f(s_1, s_2), s_2) = s_1.$$

Далее при изучении и демонстрации фазового портрета удобно пользоваться разверткой тора в виде единичного квадрата. Далее в работе будет использоваться этот подход для описания биллиардных траекторий.

3. Биллиард в треугольнике

Выбор обоих сосудов является достаточно произвольным; первый сосуд может иметь любую форму, обеспечивающую достаточно развитый хаос. В качестве наиболее простого первого сосуда, обладающего необходимыми свойствами, выберем биллиард в форме треугольника с несоизмеримыми с π углами. Хаотические свойства такого биллиарда обнаружены численно в работе [30]. Следует заметить, что в таком биллиарде реализуется слабый хаос с нулевым показателем Ляпунова в отличие от рассеивающего биллиарда в работе [2]. Класс треугольников с точностью до подобия представляет собой двупараметрическое множество. В качестве параметров удобно выбрать два угла α и β, где α — угол между сторонами A и B, β — угол, дополнительный к углу между сторонами A и C. Длины сторон треугольника удобно нормировать на его периметр.

Описание движения в биллиарде можно проводить разными способами, мы воспользуемся подходом, описанным выше с использованием натуральной параметризации границ биллиардов. Для задания точки, лежащей на границе биллиарда, достаточно задания одной координаты s. Определим координату точки s как расстояние до нее, пройденное вдоль границы биллиарда от некоторой выделенной точки на границе биллиарда (см. рис. 1) и нормированное на периметр биллиарда. Таким образом, s может принимать значения в интервале $[0, 1]$. Для того чтобы полностью описать траекторию движения частицы в биллиарде, как отмечалось ранее, достаточно задать функцию $f(s_1, s_2)$. Эта функция $s_3 = f(s_1, s_2)$ была получена аналитически в явном виде, она состоит из двенадцати ветвей для остроугольного треугольного биллиарда и десяти — для тупоугольного. Каждая из этих ветвей является дробно-рациональной функцией со своими коэффициентами, то есть имеет вид

$$s_3 = C_j + \frac{(s_1 - A_j)(s_2 - B_j)}{D_j s_1 + E_j s_2 + F_j},$$

где индекс j нумерует соответствующие ветви отображения. Постоянные A_j, B_j, D_j, E_j и F_j найдены аналитически и определяются двумя углами треугольника. С помощью этого отображения были построены фазовые портреты траекторий в треугольном биллиарде; типичный вид одной траектории, для случая несоизмеримых с π углов треугольника, показан на рисунке 2 снизу слева.

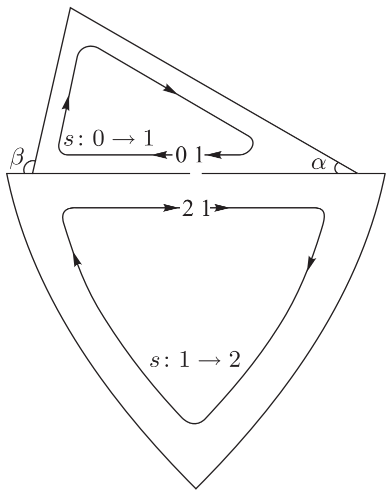

Рис. 1. Общая параметризация треугольного и криволинейного треугольного биллиардов. Координата столкновения частицы со стенкой s отсчитывается от центра отверстия между биллиардами сначала по часовой стрелке вдоль границы треугольного биллиарда, потом так же для криволинейного треугольного биллиарда.

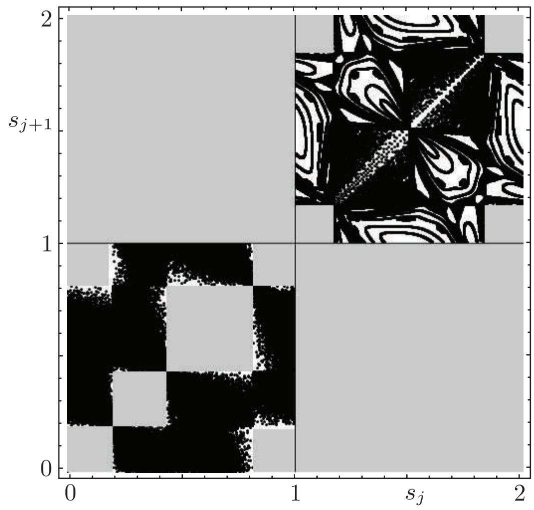

Рис. 2. Фазовые портреты траекторий в треугольном и криволинейном треугольном биллиардах при закрытом отверстии между ними, биллиарды отделены друг от друга. Внизу слева — типичная траектория треугольного биллиарда с углами $\alpha = 0.63$ и $\beta = 1.91$. Вверху справа — фазовый портрет криволинейного треугольного биллиарда с параметром $\sigma = 0.8$. Запрещенные зоны возникают вследствие невозможности траектории переходить из одного биллиарда в другой и невозможности двух последовательных столкновений с одной и той же плоской стороной границы.

4. Биллиард в параболическом треугольнике

Второй сосуд должен иметь форму, обеспечивающую существование в фазовом пространстве кроме хаотической компоненты еще островков устойчивости. Это гарантирует его неэргодичность. В качестве такого сосуда выберем биллиард в форме криволинейного треугольника, две стороны которого задаются уравнением

$$y = \pm \frac{x}{2a}(2a - x), \quad x \in [0, b]. \tag{4.1}$$

Третья сторона является плоской (см. рис. 3). Параболическая часть границы обладает следующим свойством: все лучи, исходящие из точки $(a, 0)$, после двух отражений возвращаются в нее, так a можно считать фокусным расстоянием этого биллиарда. Биллиарды такого вида образуют однопараметрическое семейство, параметром которого выберем $\sigma = \frac{b}{a}$. Далее такие биллиарды будем называть параболическим треугольным биллиардом.

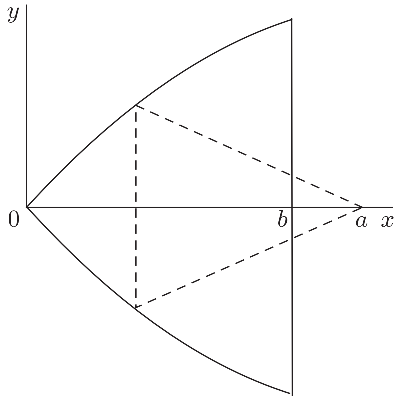

Рис. 3. Вид криволинейного треугольного биллиарда.

Аналогично треугольному биллиарду, параметризуем его границу расстоянием s, отсчитанным вдоль границы биллиарда от некоторой выделенной ее точки. Используя эту параметризацию, построим фазовые портреты траекторий в этом биллиарде. Фазовые портреты качественно отличаются при разных значениях величины σ. Фазовый портрет для параметра $\sigma = 0.8$ показан на рисунке 4. Видно, что большую часть фазового пространства занимают островки устойчивости, между которыми находится хаотическая компонента. Доля объема фазового пространства, занятого хаотической компонентой, меняется в достаточно широких пределах с изменением параметра биллиарда σ. Вид этой зависимости показан на рисунке 5. При $\sigma = 1$ хаотическая компонента фазового пространства исчезает, в этом случае фазовый портрет имеет вид, показанный на рисунке 6. Таким образом, фазовый портрет при отличной от нуля хаотической компоненте является типичным для большинства биллиардов общего положения. Собственно, это и мотивирует использование его в качестве второго сосуда. После изучения динамических свойств этих закрытых биллиардов перейдем к их объединению.

5. Соединение биллиардов

Рассмотрим теперь биллиард, полученный соединением описанных выше параболического и обычного треугольного биллиарда. Границу такого объединенного биллиарда снова можно параметризовать единым натуральным параметром s. Параметризация такого биллиарда показана на рисунке 1. Пусть на общем участке границы (для параболического биллиарда — в центре плоской стороны) будет некоторое соединяющее биллиарды отверстие, через которое траектория из одного биллиарда может попасть в другой и вернуться назад. Пока это отверстие перекрыто, биллиарды отделены друг от друга: фазовые портреты их траекторий в выбранной параметризации показаны на рисунке 2.

После открытия отверстия биллиарды становятся единым замкнутым биллиардом, и фазовый портрет объединения этих двух биллиардов приобретает вид, показанный на

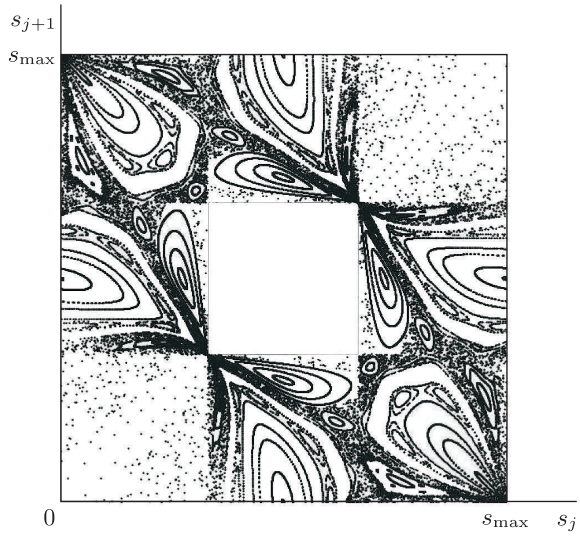

Рис. 4. Фазовый портрет траекторий параболического треугольного биллиарда с параметром $\sigma = 0.8$. Координата s отсчитывается от вершины при выпуклых сторонах. Фазовое пространство заполнено островками устойчивости с хаотической компонентой между ними.

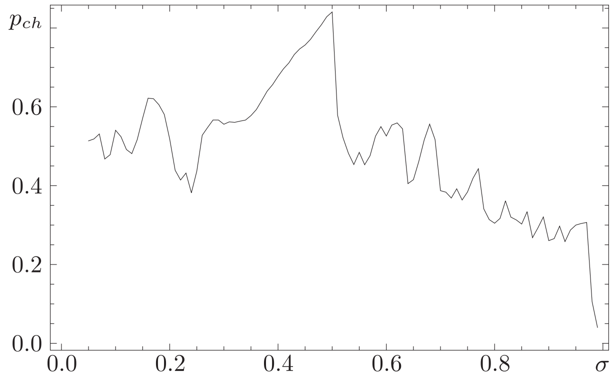

Рис. 5. Зависимость объема фазового пространства, занятого хаотической компонентой, от параметра σ. При приближении σ к единице хаотическая компонента исчезает.

рисунке 7. Кроме сегментов траектории, полностью лежащих в одном или другом биллиарде, будут появляться сегменты траектории, проходящие сквозь соединяющее биллиарды отверстие, так что начало сегмента лежит в одном биллиарде, а конец в другом. Этим сегментам соответствуют «усы», появившиеся во второй и четвертой четвертях фазового портрета (см. рис. 7). Каждая точка во второй четверти соответствует переходу траектории из треугольного биллиарда в параболический, в четвертой четверти — возврату назад.

Важным является тот факт, что теперь траектории хаотического моря и ряда островков устойчивости в параболическом треугольном биллиарде перестали быть отделенными друг от друга. Частица, находящаяся на траектории хаотического моря, может уйти в треугольный биллиард и вернуться оттуда уже на траекторию, которая у замкнутого параболического треугольного биллиарда принадлежала бы островку устойчивости. Те островки устойчивости, траектории которых частично попали на удаленный участок границы, оказываются разрушенными (см. рис. 8), и гораздо большая часть фазового пространства ока-

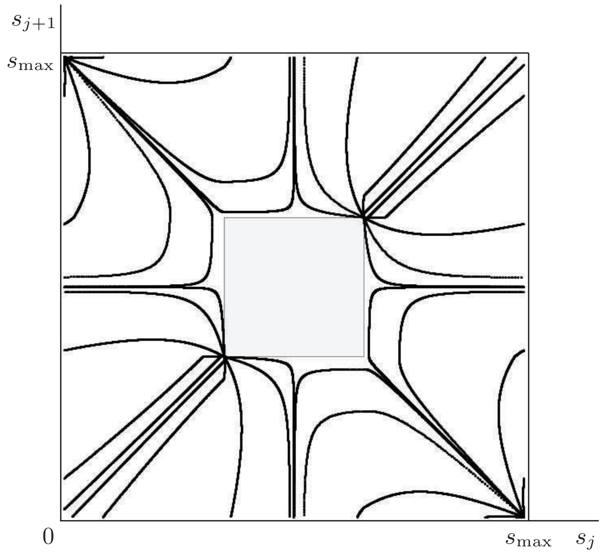

Рис. 6. Фазовый портрет траекторий параболического треугольного биллиарда с параметром $\sigma = 1$. Регулярная динамика, хаотическая компонента фазового пространства отсутствует.

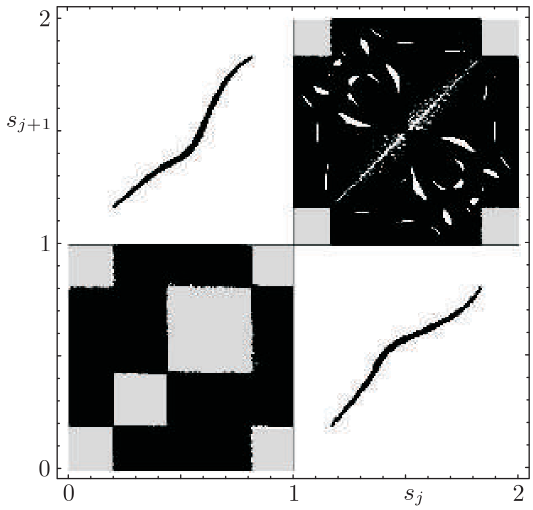

Рис. 7. Фазовый портрет траектории в соединенных треугольном и криволинейном треугольном биллиардах с параметрами $\alpha = 0.63$, $\beta = 1.91$ и $\sigma = 0.8$. Появившиеся во второй и четвертой четвертях точки соответствуют переходам траектории из одного биллиарда в другой. Видно, что большая часть островков устойчивости криволинейного треугольного биллиарда оказалась разрушена.

зывается доступна для траектории одной частицы. Такая траектория на фазовом портрете зарисовывает ранее недоступные ей части фазового пространства так, что результат выглядит как единое хаотическое море. Сравнивая фазовые портреты биллиардов до и после соединения, это явление легко заметить (см. рис. 2 и рис.7).

Однако свойства траекторий по-прежнему существенно зависят от характеристик «разрушенного» островка устойчивости. Так, до объединения в биллиардах было три типа траекторий: чисто хаотические, периодические и квазипериодические. В объединенном биллиарде изменился тип траекторий. Разумеется, траектории острова устойчивости, которые

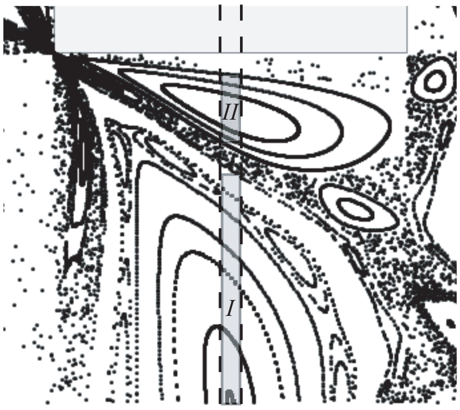

Рис. 8. Показаны области фазового пространства, с помощью которых все попадающие в параболический треугольный биллиард траектории разбиваются на три группы. Первая — попадающие на нижний островок устойчивости, в область I фазового пространства, вторая — в область II, третья — все остальные. Пунктиром показана граница отверстия между биллиардами.

не попадают на отверстие, остаются без изменений. Попадающие на отверстие траектории островов меняют свой тип. Эти траектории приобретают перемежаемый характер. Действительно, периодическая траектория такого острова устойчивости, после нескольких колебаний попав на отверстие переходит в треугольный биллиард и становится хаотической. После некоторого времени траектория покидает треугольный биллиард и может попасть на область хаотических движений или на некоторую траекторию острова устойчивости фазового портрета параболического биллиарда. В первом случае хаотическое поведение меняет свой тип, оставаясь хаотическим, во втором — сменяется новой, квазипериодической ламинарной компонентой. Следует подчеркнуть, что период или квазипериод этого участка траектории в точности совпадает с периодом соответствующей траектории, принадлежащей острову устойчивости в замкнутом биллиарде. Время сохранения периодичности зависит от характеристик островка и размера входного окна и может быть достаточно продолжительным. Следовательно, переходы между биллиардами определяют перемежаемость траектории движения частицы. Таким образом, все бывшие хаотические траектории и часть регулярных траекторий после объединения биллиардов приобретают универсальный перемежаемый характер поведения.

6. Установление стационарного состояния

Рассмотрим условия установления равновесия в газе несталкивающихся частиц, запущенных в рассматриваемое объединение двух биллиардов. Для этого мы должны рассматривать одну длинную траекторию для каждой частицы. Любая частица переходит из одной половины биллиарда в другую строго последовательно. Число переходов из одной половины в другую отличается от числа возвратов не более чем на единицу, поэтому на временах много больше времени возврата Пуанкаре к отверстию средние потоки частиц через отверстие в обе стороны обязательно установятся одинаковыми. Поскольку скорость частицы по модулю постоянна, то это относится и к потоку энергии, и, при условии одинакового распределения по направлениям, к потоку импульса через отверстие. Другими словами, установившееся равновесие означает, что такие величины, как среднее число частиц, находящихся в каждом из биллиардов, их суммарный импульс и суммарная энергия, со временем не меняются, их потоки через отверстие в обе стороны одинаковы. Однако поток импульса через отверстие и переданный стенке импульс, величина которого в единицу времени на единицу площади является давлением на стенку, — разные вещи.

Чтобы понять различие между ними, вспомним хорошо известный «парадокс» из теории вероятностей [31], который обычно формулируют следующим образом: если автобусы ходят в среднем раз в двадцать минут, то среднее время ожидания автобуса на остановке может быть час, год и более, от десяти минут до бесконечно долгого. Оно зависит не только от того, сколько автобусов в единицу времени проезжает мимо остановки, но и от того, насколько упорядоченно они едут. На рисунке 9 качественно показаны возможные варианты: а) кластерами, б) равномерно. Все проехавшие автобусы вносят одинаковый вклад в среднее число проезжающих автобусов, однако автобусы, едущие в кластере вслед за первым, почти не сокращают время ожидания на остановке.

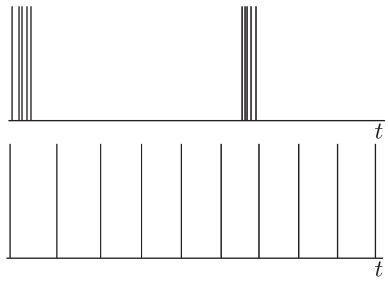

Рис. 9. Качественно показаны возможные варианты упорядочения: сверху — кластерами, внизу — равномерно.

Аналогичная ситуация имеет место и в рассматриваемой ситуации. Можно представить себе, что отверстие закрыто виртуальной стенкой, и подсчитывать, какой импульс передавала бы этой стенке частица, если бы не пролетала ее насквозь, а отскакивала от нее. Это не настоящее, «мыслимое», давление далее будем называть «виртуальным давлением». Разницу легко видеть, если столкновения частицы с настоящей стенкой происходят кластерами, то есть картина передачи импульса стенке индивидуальными столкновениями похожа на показанную на рисунке 9а. Такая картина имеет место при экспоненциальном виде соответствующего распределения. Однако с виртуальной стенкой такой порядок столкновений в принципе невозможен, поскольку уже после первого столкновения частица покидает биллиард и начинает движение в другом, где время полета до ближайшей стенки может быть сколь угодно большим. Поэтому только первое столкновение из кластера даст вклад в «виртуальное давление», а в давление на реальную стенку — все столкновения кластера.

Таким образом, в равновесии одинаковыми установятся «виртуальные давления» на отверстие, а будут ли одинаковыми реальные давления на стенки около отверстия, зависит еще от функции корреляции столкновений частицы со стенкой. Если эти столкновения в обеих частях одинаково скоррелированы, то давления установятся одинаковыми, как это имеет место в макроскопических сосудах с газом, где устанавливаются одинаковые максвелловские распределения скоростей и т. д. Но для рассматриваемых биллиардов это не так: в треугольном биллиарде устанавливается типичное экспоненциальное распределение времен возврата, то есть много маленьких времен и редко большие — кластеры. В параболическом биллиарде — существенно другая функция распределения: в частности, есть явно выделенные характерные времена столкновения, то есть с достаточно большой вероятностью столкновения могут происходить регулярно, через определенные промежутки времени, что связано с устройством разрушенных островков устойчивости. Таким образом, при одинаковом виртуальном давлении из-за разных функций корреляции даже непосредственно около отверстия устанавливаются разные реальные давления. Интересно отметить, что в соответствии с известным законом Паскаля можно было бы ожидать, что локальные давления в окрестности отверстия между биллиардами будут выравниваться, однако для рассматриваемого случая неэргодичного поведения, как будет показано ниже, закон Паскаля не выполняется.

Приведенные выше рассуждения были проверены численным счетом. Для этого рассматривались начинающиеся в треугольном биллиарде отдельные траектории, достаточно длинные, чтобы установились все распределения. При отражении от стенок биллиарда движущаяся по траектории частица передает им импульс, создавая таким образом некоторое давление на них. Это давление вычислялось как

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{T} \triangle p_i}{T},$$

где $\triangle p_i$ — импульс, переданный стенке в i-м столкновении, l — длина той части стенки биллиарда, столкновения с которой учитывались, T — время наблюдения. Поскольку отражение происходит по строго зеркальному закону, все $\triangle p_i$ и давление в целом заведомо нормальны к стенке биллиарда.

В результате численного моделирования были построены распределения давления вдоль границ треугольного и параболического треугольного биллиардов. По прошествии достаточно большого времени распределение давления для параболического треугольника зависит от выбора параметра σ, не зависит от начальных данных траектории и не меняется с течением времени. Полученное давление на общую плоскую часть границы показано на рисунке 10, где сверху красным[1] показано давление на соединяющую биллиарды стенку со стороны обычного треугольника, снизу — на ту же стенку со стороны параболического. Видно, что в обычном треугольнике действительно устанавливается равномерное давление на стенку, величина которого больше максимума для криволинейного треугольника. Показанное в области соединяющего биллиарды отверстия «виртуальное давление» устанавливается равным с обеих сторон отверстия и заметно отличается от давления на стенки. Также видно, что давление и на непосредственно прилегающие к отверстию участки границы со стороны обычного треугольного биллиарда выше, чем со стороны параболического треугольного биллиарда. Для приведенных параметров разница составляет 1.2 %, что намного больше погрешности счета. Таким образом, численный счет подтверждает приведенные выше рассуждения.

Для обоих биллиардов было построено распределение направлений подхода траектории к соединяющему биллиарды отверстию и распределение направлений падения на прилегающий к отверстию участок границы (рис. 11). Видно, что эти распределения с обеих сторон отверстия устанавливаются абсолютно одинаковыми. Аналогичные распределения для падающих на границу около отверстия частиц по разные стороны границы могут заметно

[1]Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/2363/0.

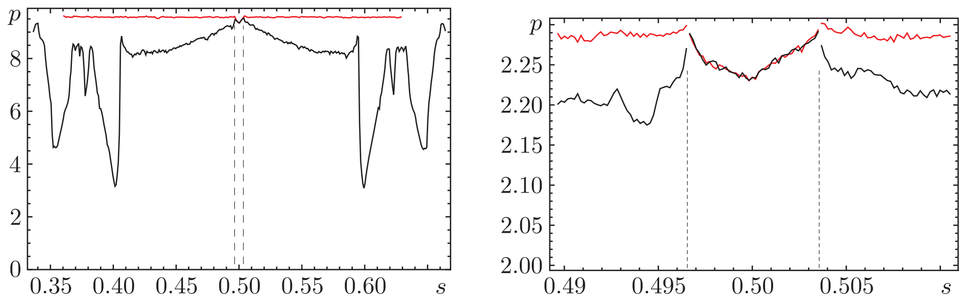

Рис. 10. Слева показано распределение давления на общую плоскую стенку биллиардов с параметрами $\sigma = 0.8$, $\alpha = 0.63$ и $\beta = 1.91$, создаваемого одной траекторией, строившейся до достижения $N = 2.5 \times 10^9$ столкновений со стенками треугольного биллиарда. Сверху красным показано давление на общую стенку со стороны обычного треугольника, снизу — на ту же стенку со стороны параболического. В области отверстия между биллиардами, выделенной пунктиром, показана величина «виртуального давления». Справа — полученное отдельно распределение давления в области отверстия.

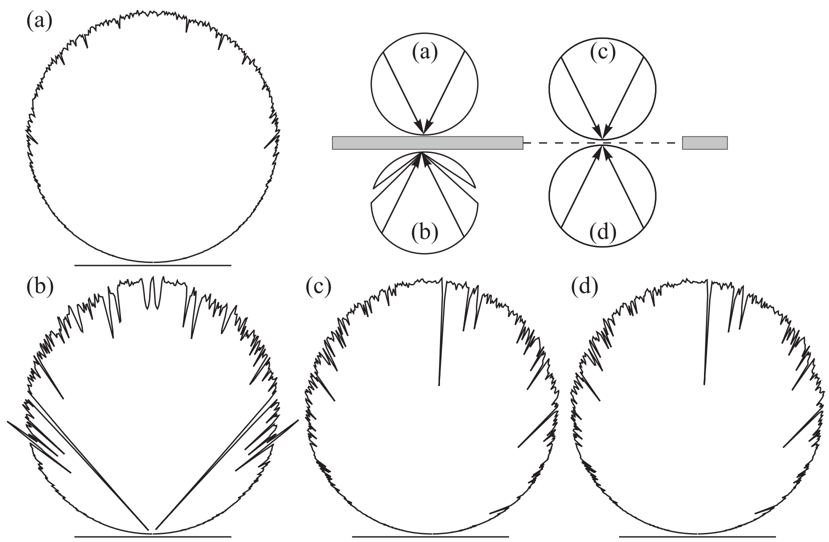

Рис. 11. Показаны распределения направлений подхода траектории к отверстию между биллиардами и к прилегающему к нему участку границы. Биллиарды с параметрами $\sigma = 0.8$, $\alpha = 0.63$ и $\beta = 1.91$, траектория строилась до достижения $N = 2.5 \times 10^9$ столкновений со стенками треугольного биллиарда (2.5×10^7 возвратов). На графиках (a) и (c) — распределения, установившиеся в треугольном биллиарде, на (b) и (d) — в криволинейном. Видно, что в криволинейном биллиарде с некоторых направлений траектория к стенке не подходит.

отличаться друг от друга, в параболическом биллиарде с некоторых направлений частицы к границе не прилетают.

Обратим внимание на то, что существенную роль в формировании величины стационарного давления играет характер перемежаемости траекторий и, следовательно, распределение времен возврата. Собственно, времена возвратов и формируют длительности ламинарных и хаотических фаз траектории, поэтому остановимся более детально на основных закономерностях функций распределения времен возврата.

7. Распределение времен возврата

Используя численное моделирование, мы построили распределения времен пребывания траектории в обеих частях биллиарда, или, что то же самое, распределения времен возврата Пуанкаре к окрестности соединяющего биллиарды отверстия. Эти распределения в логарифмическом масштабе показаны на рисунке 12. Для треугольного биллиарда имеем обычное для эргодичного случая экспоненциальное распределение времен возврата, для параболического — значительно отличающееся распределение, имеющее два явно выраженных максимума. Часть этого распределения, содержащая максимумы, показана на рисунке 12 отдельно. Каждый такой максимум в распределении времен возврата означает, что существует повышенная вероятность периодических возвратов, возвратов за строго определенное время. На показанные на рисунке 12 два максимума приходится примерно треть всех возвратов из распределения для биллиардов с приведенными параметрами. Как будет показано ниже, они оказывают влияние такого же порядка, как и отклонение вида остального распределения от экспоненциального. Поэтому такие максимумы, лежащие явно выше хода кривой распределения, должны быть выделены и рассмотрены отдельно.

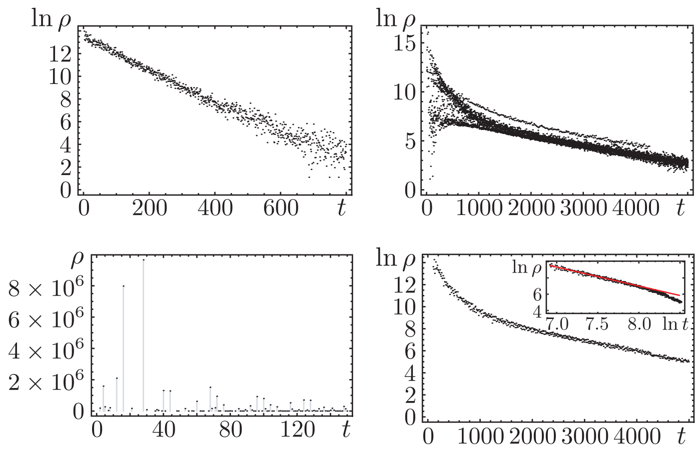

Рис. 12. Показаны распределения времен нахождения траектории в обеих частях биллиарда, параметры $\sigma = 0.8$, $\alpha = 0.63$ и $\beta = 1.91$, траектория строилась до достижения $N = 5 \times 10^9$ столкновений со стенками треугольного биллиарда, что соответствует 5×10^7 возвратам к отверстию для каждого из биллиардов. Слева сверху — времена пребывания в треугольном биллиарде, справа сверху — в параболическом треугольном биллиарде. Внизу слева в обычном масштабе показаны максимумы в области малых времен распределения для параболического треугольного биллиарда. Внизу справа — огрубленное распределение времен нахождения в параболическом треугольном биллиарде, без возвратов за малые времена. Кроме этого, на нем ширина столбцов гистограммы увеличена в десять раз по сравнению с показанной справа сверху. На вставке хвост распределения в двойном логарифмическом масштабе.

Распределение времен возврата строится как гистограмма, в одну точку которой объединяются все возвраты, попавшие в некоторый промежуток времени. Величина этого диапазона (и, соответственно, ширина столбца гистограммы) может быть выбрана произвольно. На рисунке 12 показано, как выглядит одно и то же распределение времен возврата, построенное с мелкими деталями в высоком разрешении по времени, и огрубленное, с большим на один порядок диапазоном объединяемых в одну точку времен. Оказывается, что в таком сглаженном виде это распределение времен возврата хорошо аппроксимируется как сумма трех экспоненциальных распределений. На малых временах возврата доминирует экспонента с наименьшим показателем и кривая распределения является практически линейной, на больших временах доминирует экспонента с наибольшим показателем. В промежуточной области доминирует экспонента с промежуточным показателем. Ее введение оказывается обязательным, поскольку график аппроксимации только двумя экспонентами резко расходится с кривой численного счета. В действительности первые два участка, скорее всего, являются участками степенного, а не экспоненциального спадания. Они существуют в небольшом диапазоне времен возврата и поэтому при анализе данных численного счета неотличимы от экспонент. Перейдем к механизмам формирования функции распределения времен возврата.

Легко заметить наличие трех составляющих, формирующих распределение времен возврата (см. рис. 12). Разделение распределения времен возврата на три отдельные составляющие имеет определенное физическое основание. Для того чтобы понять механизм такого деления, рассмотрим, в какую часть фазового пространства параболического биллиарда попадают частицы, вылетающие из треугольного биллиарда. Легко понять, что в нашем формализме эта часть фазового пространства совпадает с вертикальной полосой шириной с отверстие и расположенной в этом же месте (см. рис. 8). Таким образом, координаты всех попадающих в параболический биллиард частиц на фазовом пространстве лежат в полосе, показанной пунктирными линиями на рисунке 8. Положение и ширину этой части определяет входное отверстие биллиарда. Тогда мы можем разделить все попадающие в параболический биллиард траектории на три группы: первая — траектории, попадающие на бывший нижний островок устойчивости, вторая — на верхний, третья — все остальные траектории, попадающие в хаотическое море и на меньшие островки. Для каждой из этих групп можно построить свое отдельное распределение времен возврата, сумма которых будет распределением для биллиарда в целом. Эти распределения показаны справа на рисунке 13. Оказывается, что в диапазоне I времен возврата доминируют возвраты с нижнего островка устойчивости; возвратов из второй и третьей групп в эту область попадает мало по сравнению с большим числом возвратов из первой группы. Другими словами, практически все частицы, время возврата которых попало в показанный на рисунке 8 первый диапазон времен возврата, при входе в параболический треугольный биллиард попали на нижний островок устойчивости. Распределение их времен возврата полностью определяется свойствами траекторий нижнего островка устойчивости и в рассматриваемом диапазоне времен хорошо аппроксимируется как степенным, так и экспоненциальным распределениями. Аналогично, в области II времен возврата доминирующую роль играют возвраты траекторий второй группы, крутившихся на верхнем островке. Их распределение также можно аппроксимировать и экспоненциальным, и степенным образом, но с другими показателями экспоненты и степени.

Как известно, любая гладкая функция на достаточно небольшом интервале значений ее аргумента практически не отличается от линейной. В нашем случае возвраты из первой и второй групп доминируют только на конечных интервалах времен возврата, и их величина оказывается достаточно маленькой, чтобы полученное численно распределение и в логарифмическом, и в двойном логарифмическом масштабах было неотличимо от прямой. Таким образом, сам по себе наш численный счет не позволяет уверенно сказать, является ли полученное распределение степенным или экспоненциальным. Основываясь на теоретических соображениях, ниже мы покажем, что это степенное распределение. Однако в рассматриваемом небольшом интервале времен оно и в логарифмическом масштабе хорошо совпадает с прямой, поэтому нам будет удобно аппроксимировать его таким образом.

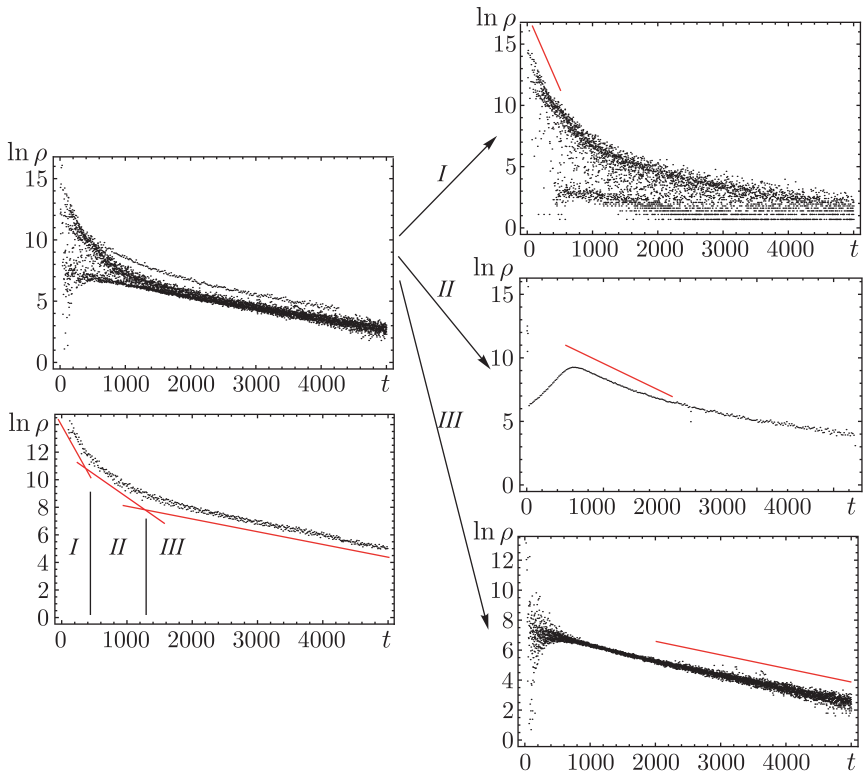

Рис. 13. Разделение полного распределения времен возврата на три составляющие его части. Слева показано само распределение, справа сверху — распределение времен возврата только для траекторий, попавших на нижний разрушенный островок устойчивости, по центру справа — на верхний, снизу справа — распределение для всех остальных траекторий. Параметры биллиардов $\sigma = 0.8$, $\alpha = 0.63$ и $\beta = 1.91$. Хорошо видно, что основной вклад в распределение в области небольших времен возврата дают траектории первой группы.

Показатель экспоненты хвоста распределения определяют траектории третьей группы, в двойном логарифмическом масштабе вид хвоста распределения заметно отличается от линейного (см. вставку на рис. 12). Таким образом, асимптотика на больших временах спадает именно экспоненциально, как и следовало ожидать для траекторий из хаотического моря. Правда, в область III некоторый вклад дают и траектории из других групп, но только до некоторого максимального времени возврата, определяющегося граничными траекториями островка устойчивости. Все три показателя экспонент в распределении времен возврата удалось получить для взятого отдельно параболического треугольного биллиарда, найдя на его фазовом портрете области, которые генерируют распределенное экспоненциально в соответствующем диапазоне время возврата с правильным показателем экспоненты.

Рассмотрим, не вдаваясь в усложняющие картину несущественные детали, как ведут себя траектории на разрушенном островке устойчивости. Хорошо известно, что поведение траекторий островка является квазипериодическим, то есть траектория после фиксированного числа прыжков по точкам островка, равного периоду центральной периодической траектории, возвращается к своей начальной точке, но не точно, а с небольшой сдвижкой. Еще через период траектория снова немного сдвигается, и так далее. Таким образом, возникает вращение траектории по островку с некоторой частотой, разной для разных траекторий.

Попадание на островок означает, что начальная точка траектории в фазовом пространстве лежит в полосе, соответствующей отверстию между биллиардами (показана на рис. 14 снизу пунктиром). Через период траектория попадет в окрестность этой точки, скорее всего вновь попадет на отверстие и покинет островок. Таким образом, в распределении времен возврата возникает резкий максимум, соответствующий возвратам с островка за один период его центральной траектории. Однако если начальная точка траектории попала ближе, чем на величину одного шага квазипериодического сдвига (они условно обозначены как p_1 и p_2 на рис. 14) к нижней левой или верхней правой границе полосы при вращении по часовой стрелке, то траектория останется на островке. Для попавшей на нижнюю часть рассматриваемой траектории островка частице величина $\frac{p_1}{\varepsilon}$ близка к вероятности задержаться на ней надолго. В этом случае могут пройти сотни или тысячи периодов, прежде чем одна из других точек траектории допрыгает до полосы; это время разное для разных траекторий островка. Таким образом, кроме пика образуется и некоторое не дельтообразное распределение времен выхода из островка.

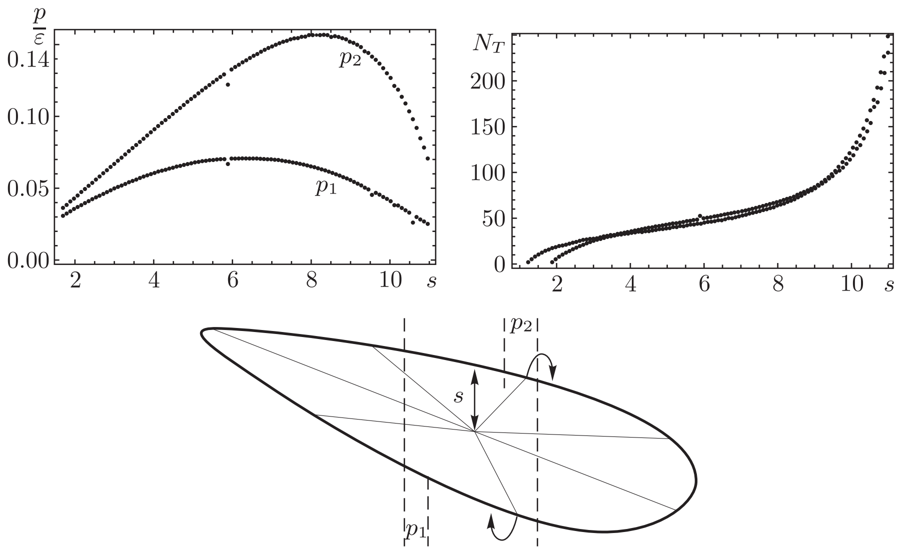

Рис. 14. Распределения, связанные с временем нахождения траектории на островке устойчивости. Сверху слева — распределение вероятностей задержаться на островке больше, чем на один период, соответствующей периодической траектории островка. Сверху справа — на распределение времен нахождения на островке для задержавшихся траекторий наложено полученное из приведенных сверху слева функций распределение. Снизу — пояснение к движению по траектории из островка устойчивости. Параметр биллиарда $\sigma = 0.8$.

Расстояние, которое задержавшаяся на островке траектория должна пройти до попадания в полосу выхода с островка, растет примерно линейно с увеличением расстояния s до центра островка. Разделив его на величину шага, на которую траектория сдвигается за период, мы получим время пребывания траектории на островке. Распределение величины шагов по траекториям островка показано на рисунке 14 сверху слева; сверху справа показаны полученное непосредственно численным счетом распределение времен выхода с островка и наложенное на него распределение, полученное делением линейной зависимости на сумму приведенных слева шагов. Видно, что эти распределения хорошо совпадают. Поскольку распределение величин шагов описывается явно не экспоненциальной, а степенной функцией, то это позволяет считать, что и распределение времен возврата по траекториям имеет именно степенной характер. А так как распределение по траекториям количества попадающих на них частиц также не экспоненциально, то есть все основания полагать, что и итоговое распределение времен возврата является степенным.

Таким образом, полное распределение времен возврата частиц из криволинейного биллиарда для $\sigma = 0.8$ можно считать состоящим из пяти слагаемых: двух локальных максимумов в области самых малых времен возврата, двух степенных участков спадания и экспоненциального хвоста распределения. Пики и степенные участки соответствуют возвратам частиц, попавших на верхний и нижний островки устойчивости, хвост — всем остальным траекториям, в основном из хаотического моря.

8. Уравнение состояния

Поскольку устанавливающиеся в треугольном биллиарде распределения времен возвратов, рассмотренные выше, в целом не отличаются от распределений, устанавливающихся в случае сильно хаотического эргодического поведения, в нем можно обычным образом вводить макроскопические параметры идеального газа (например, давление, которое будет одинаковым и изотропным во всех областях границы треугольного биллиарда). Разумеется, в параболическом треугольном биллиарде давление может не удовлетворять этим свойствам и быть другим. Теперь, изменяя параметры треугольного биллиарда и, соответственно, его объем, можно получить зависимость устанавливающегося в нем давления от суммарного объема треугольного и параболического треугольного биллиардов. Другими словами, можно установить уравнение состояния идеального газа. Эта зависимость строилась при фиксированном объеме параболического биллиарда, все изменение объема достигалось за счет треугольного биллиарда. Траектория начиналась в треугольном биллиарде, то есть рассматривался вопрос, какое будет устанавливаться давление после открытия отверстия между биллиардами, если сначала весь газ был в треугольном биллиарде. В этом случае траектории никогда не попадают на выжившие островки устойчивости и давление пропорционально числу частиц газа. При выборе начальных условий, допускающих попадание частиц на островки устойчивости, требовалось бы учитывать, что часть частиц не даст вклад в давление, поскольку эти частицы никогда не попадут в треугольный биллиард.

Вид построенной таким образом зависимости давления от обратного объема показан на рисунке 15. В целом эта зависимость оказалась достаточно близка к линейной, хотя явно видны и отклонения от линейного закона, выходящие за рамки погрешности численного счета. При приближении динамики параболического биллиарда к регулярной эти отклонения нарастают и становятся существенными. Самое важное наблюдение состоит в том, что аппроксимационная прямая не попадает в нуль координат. Для обычного уравнения состояния идеального газа такая прямая проходит именно через начало координат. Другими словами, с точки зрения треугольного биллиарда, рассматриваемый параболический биллиард эффективно ведет себя как обычный эргодический биллиард, но объемом меньше реального, для $\sigma = 0.8$ уменьшение объема достигает 20 %. Следовательно, уравнение состояния идеального газа в рассматриваемом случае отличается от известного и должно быть изменено. Возникающее изменение уравнения состояния можно описать соотношением

$$P = \frac{kTN}{V + \Delta V},$$

где ΔV — некоторая пока неизвестная добавка к объему. Основной вопрос сводится к определению зависимости этой добавки от параметров и свойств биллиардов. Интересно отметить, что подобная добавка присутствует в уравнении состояния Ван-дер-Ваальса и отражает конечность размеров частиц газа. В нашем случае физическая причина ее появления принципиально другая. При «нулевом» размере частиц поправка ΔV связана со структурной сложностью одного из сообщающихся сосудов (в более общем случае можно говорить о структурной сложности границ сосуда). Такая структурная сложность проявляется в смешанном виде фазового портрета (см. рис. 2), содержащего как хаотическую компоненту, так и островки устойчивости. Таким образом, уравнение состояния зависит не только от термодинамических переменных, но и от ряда параметров, зависящих от положения отверстия и формы биллиарда. Этот вывод качественно согласуется с обсуждением установления равновесия и стационарных функций распределения, развитых в работе [27].

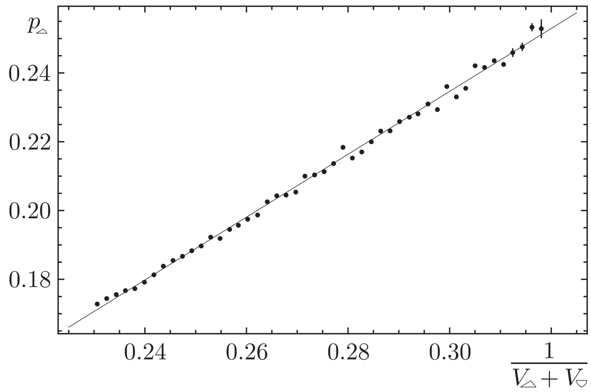

Рис. 15. Зависимость давления в треугольном биллиарде от обратного объема обоих биллиардов. Объем криволинейного треугольного биллиарда с параметром $\sigma = 0.8$ был фиксирован, менялся только объем треугольного биллиарда. Давление создавала одна траектория, строившаяся до достижения $N = 5 \times 10^8$ столкновений со стенками треугольного биллиарда. Усами показано среднеквадратичное отклонение от установившегося в нем давления. Величины по обеим осям даны в условных единицах.

Перейдем к выяснению величины этой поправки и зависимости ее от параметров, определяющих свойства параболического биллиарда.

9. Вычисление общего эффективного объема

Возьмем два обычных сообщающихся эргодичных биллиарда. Зависимость давления в биллиарде объемом V очевидно имеет вид $p_1 = kT\dfrac{N_1}{V + V_1}$. Можно рассмотреть биллиард такого же объема V, но с частицами другого сорта в нем, сообщающийся с биллиардом объема V_2. Давление в нем будет выражено как $p_2 = kT\dfrac{N_2}{V + V_2}$. Распределение времен возврата в биллиард V в обоих случаях будет экспонентой, но с разными показателем и амплитудой. Предположим теперь, что мы объединим эти две системы в одну, так что в биллиарде V будут частицы обоих сортов, N_1 частиц первого и N_2 — второго сортов. При этом отверстие в биллиард V_1 будет пропускать только частицы первого сорта, а в V_2 — только второго. Это отличает рассматриваемый случай от обычных сообщающихся биллиардов. Тогда суммарное распределение времен возврата всех видов частиц в биллиард V будет суммой двух экспонент. Парциальные давления складываются, а следовательно, для суммарного давления в биллиарде V имеем

$$p = p_1 + p_2 = kT\left(\frac{N_1}{V+V_1} + \frac{N_2}{V+V_2}\right) = kT\frac{N_1+N_2}{V+V_{eff}},$$

где

$$V_{eff} = -V + \frac{N_1+N_2}{\dfrac{N_1}{V+V_1} + \dfrac{N_2}{V+V_2}}. \tag{9.1}$$

Аналогично можно рассмотреть случай трех и более сортов частиц. Таким образом, поведение биллиарда, распределение времен возврата которого состоит из суммы экспонент с разными амплитудами и показателями, оказывается эквивалентным поведению эргодичного биллиарда с объемом V_{eff}.

Теперь объем биллиарда V_i, дающего распределение времен возврата с показателем экспоненты Λ_i, с хорошей точностью может быть получен по формуле

$$V_i = -\frac{A\Delta}{\pi\Lambda_i}, \tag{9.2}$$

где A — ширина столбца гистограммы, которой являются построенные распределения времен возврата, то есть интервал времен возврата, показанный одной точкой, Δ — размер соединяющего биллиарды отверстия, Λ_i — показатель экспоненты распределения времен возврата. Число частиц i-го сорта $N_i = Nn_i\left(1+\dfrac{V_i}{V}\right)$ пропорционально числу возвратов n_i, произошедших за время построения распределения, то есть общему числу возвратов в распределении.

Рассмотрим теперь эргодический биллиард объема V, имеющий некоторый особый участок границы длины $a*$, задерживающий все падающие на него частицы на некоторое фиксированное время T^*, что соответствует дельтообразному пику в распределении времен возврата. Очевидно, что этот участок приведет к некоторому уменьшению давления в биллиарде. Если без этого участка стенке биллиарда передавался некоторый импульс P за время T, то теперь этот импульс будет передан за время $T+m^*T^*$, где $m^* = \dfrac{a^*}{p}m = \dfrac{a^*}{l_{per}}\dfrac{T}{T_{mid}}$, где m^* и m — число столкновений с задерживающим участком и всего с границей за время T, T_{mid} — среднее время пробега между столкновениями, l_{per} — длина периметра биллиарда. Таким образом, новое давление будет выражено как $p_n = \dfrac{p}{1+\dfrac{a^*T^*}{l_{per}T_{mid}}} = kT\dfrac{N}{V+V_k}$, откуда

$$V_k = V\frac{a^*T^*}{l_{per}T_{mid}}. \tag{9.3}$$

Таким образом, появление пика в распределении времен возврата оказывает на давление такое же влияние, как и соединение с биллиардом объемом V_k.

В итоге, присоединение к эргодическому биллиарду неэргодического, распределение времен возврата которого состоит из экспонент и дельтообразных пиков, оказывается эквивалентно присоединению эргодического с объемом

$$V_{eff} = \sum_i p_i V_i, \tag{9.4}$$

где p_i — доля возвратов, приходящаяся на отдельную экспоненту или пик из полного распределения, а V_i считается по формуле (9.2) для экспонент и (9.3) для пиков.

Кривые изменения давления в треугольном биллиарде с изменением его объема были построены численно для разных значений параметра σ присоединенного к нему криволинейного треугольного биллиарда. Для всех параметров эта зависимость была близка к такой же зависимости для двух эргодичных биллиардов. Существенная разница состояла только в том, что объем криволинейного биллиарда в уравнении состояния не совпадал с его реальным объемом. Другими словами, неэргодичный криволинейный треугольный биллиард вел себя аналогично эргодичному, но существенно меньшего объема. Вид полученной поправки к реальному объему биллиарда показан на рисунке 16 квадратиками, для $\sigma < 0.5$ поправка нулевая.

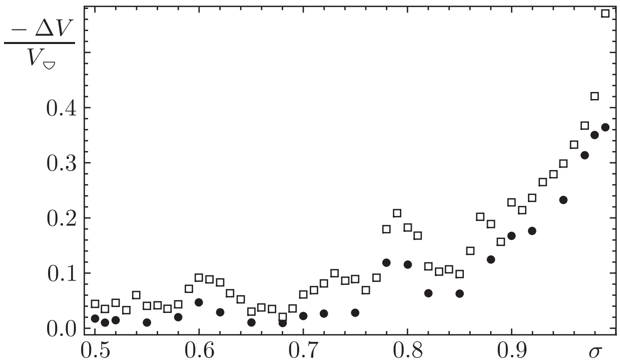

Рис. 16. Квадратиками показана связанная с неэргодичностью поправка ΔV к реальному объему криволинейного биллиарда, полученная из анализа построенного численно уравнения состояния для разных параметров σ; кругами показана доля недоступного для траектории фазового пространства криволинейного треугольного биллиарда.

Так же была построена доля фазового пространства криволинейного треугольного биллиарда, все еще занятая островками устойчивости после объединения биллиардов, то есть после того, как большая часть островков оказалась разрушена. Она показана на рисунке 16 кругами. Видно, что полученная поправка к объему биллиарда хорошо коррелирует с этой долей фазового пространства. Интересно заметить, что при этом траектория заполняет доступное ей фазовое пространство сильно неравномерно. Во взятом же отдельно криволинейном треугольном биллиарде эта поправка к объему не коррелирует с долей фазового пространства, недоступной хаотическим траекториям. Таким образом, поправка к объему в уравнении состояния приближенно может быть получена простым анализом фазового портрета соединенных биллиардов.

10. Выводы

В работе был рассмотрен двумерный идеальный газ несталкивающихся частиц, находящийся в двух сообщающихся сосудах. Эта задача по сути сводится к движению одной частицы в двух соединенных открытых математических биллиардах. Одним из них взят биллиард в виде треугольника, углы которого несоизмеримы с π. В закрытой форме этот биллиард является слабохаотичным, не имеет островков устойчивости в фазовом пространстве и ведет себя эргодичным образом. Вторым взят биллиард в виде криволинейного треугольника, его граница специально подобрана так, что значительная часть фазового пространства биллиарда занята островками устойчивости. Этот биллиард заведомо не эргодичен. После соединения двух биллиардов большая часть островков устойчивости оказывается разрушена: траектории из хаотического моря закрытой формы криволинейного треугольного биллиарда теперь могут выйти в другой биллиард и вернуться назад на бывший островок устойчивости. Некоторые островки, однако, остаются неразрушенными.

Находящийся в таких соединенных биллиардах газ частиц оказывает некоторое давление на стенки биллиардов. В треугольном биллиарде это давление устанавливается везде одинаковым, равномерно распределенным по периметру биллиарда. Это позволяет ввести в нем единое макроскопическое давление газа. В криволинейном же треугольном биллиарде, при условии, что изначально весь газ был в треугольном биллиарде, устанавливается сильно неравномерное давление. При этом величина этого локального давления везде оказывается меньшей, чем давление в треугольном биллиарде. Даже около соединяющего биллиарды отверстия, «виртуальное давление» на котором устанавливается равным, давление на непосредственно прилегающие к отверстию стенки будет отличаться на величину порядка процента.

Были рассмотрены установившиеся распределения времен нахождения частицы для обоих биллиардов. В треугольном биллиарде устанавливается типичное для эргодичного случая экспоненциальное распределение времен выхода частицы из биллиарда. На вид этого распределения в криволинейном треугольном биллиарде существенное влияние оказывают разрушенные островки устойчивости. Они дают дельтообразные пики в распределении времен возврата, соответствующие периоду центральной траектории островка, и по-видимому степенное распределение времен возврата для задержавшихся на островке траекторий. Это распределение обрезается на времени, соответствующем времени выхода с граничной траектории разрушенного островка устойчивости. Поэтому эта часть распределения существует только на ограниченном диапазоне времен возврата и точности непосредственно численного счета оказалось недостаточно, чтобы отличить степенное распределение от экспоненциального. Однако рассмотрение устройства островка и движения по нему показывает, что скорее всего эта часть распределения является именно степенной. Хвост распределения соответствует возвратам траекторий, попавших в хаотическое море, и является экспоненциальным. Таким образом, в целом распределение оказывается довольно необычным, значительная доля возвратов приходится на дельтообразные пики в области малых времен возврата, потом идут участки степенного спадания и экспоненциальный хвост распределения.

Поскольку в треугольном биллиарде устанавливается равномерное давление на стенки, был рассмотрен вопрос об уравнении состояния газа в нем, то есть о том, как будет меняться это давление с изменением объема биллиарда. Была построена зависимость давления от величины обратного суммарного объема обоих биллиардов: она оказалась почти линейной, но не проходящей через начало координат. Таким образом, хотя биллиард в целом является не эргодичным, функционально его уравнение состояния похоже на обычное уравнение состояния идеального газа. Имеются, правда, и некоторые отличия от линейности, особенно существенные при приближении динамики в криволинейном треугольном биллиарде к регулярной. Другими словами, полученное уравнение состояния имел бы обычный идеальный газ в обычном сосуде, но другого объема. С точки зрения уравнения состояния, рассматриваемый неэргодичный биллиард очень похож на эргодичный, но с объемом меньше, чем реальный объем криволинейного треугольника. Величина поправки к объему, как оказалось, хорошо коррелирует с долей фазового пространства, занятой неразрушенными островками устойчивости.

Список литературы

[1] Галперин Г. А., Чернов Н. И. Биллиарды и хаос. Москва: Знание, 1991. 46 с.

[2] Zaslavsky G. M., Edelman M. Maxwell's demon as a dynamical model // Phys. Rev. E, 1997, vol. 56, no. 5, pp. 5310–5320.

[3] Schneider J., Tel T. Extracting flow structures from tracer data // Ocean Dynamics, 2003, vol. 53, no. 2, pp. 64–72.

[4] Tuval I., Schneider J., Piro O., Tel T. Opening up fractal structures of three-dimensional flows via leaking // Europhys. Lett., 2004, vol. 65, no. 5, pp. 633–639.

[5] Nagler J. Crash test for the restricted three-body problem // Phys. Rev. E, 2005, vol. 71, no. 2, 026227, 11 pp.

[6] Motter A. Mixmaster chaos // Phys. Lett. A, 2001, vol. 285, nos. 3–4, pp. 127–131.

[7] Altmann E. G. Emission from dielectric cavities in terms of invariant sets of the chaotic ray dynamics // Phys. Rev. A, 2009, vol. 79, no. 1, 013830, 9 pp.

[8] Dettmann C. P., Morozov G. V., Sieber M., Waalkens H. Unidirectional emission from circular dielectric microresonators with a point scatterer // Phys. Rev. A, 2009, vol. 80, no. 6, 063813, 11 pp.

[9] Shinohara S., Harayama T., Fukushima T., Hentschel M., Sunada S., Narimanov E. Chaos-assisted emission from asymmetric resonant cavity microlasers // Phys. Rev. A, 2011, vol. 83, no. 5, 053837, 8 pp.

[10] Portela J. S., Caldas I. L., Viana R. L. Tokamak magnetic field lines described by simple maps // Eur. Phys. J. Special Topics, 2008, vol. 165, no. 1, pp. 195–205.

[11] Bunimovich L. A., Dettmann C. P. Peeping at chaos: Nondestructive monitoring of chaotic systems by measuring long-time escape rates // Europhys. Lett., 2007, vol. 80, no. 4, 40001, 6 pp.

[12] Buljan H., Paar V. Many-hole interactions and the average lifetimes of chaotic transients that precede controlled periodic motion // Phys. Rev. E, 2001, vol. 63, no. 6, 066205, 13 pp.

[13] Aguirre J., Sanjuan M. Limit of small exits in open Hamiltonian systems // Phys. Rev. E, 2003, vol. 67, no. 5, 056201, 7 pp.

[14] Bleher S., Grebogi C., Ott E., Brown R. Fractal boundaries for exit in Hamiltonian dynamics // Phys. Rev. A, 1988, vol. 38, no. 2, pp. 930–938.

[15] Chirikov B., Shepelyansky D. L. Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems // Phys. D, 1984, vol. 13, no. 3, pp. 395–400.

[16] Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep., 2002, vol. 371, no. 6, pp. 461–580.

[17] Jacquod P., Petitjean C. Decoherence, entanglement and irreversibility in quantum dynamical systems with few degrees of freedom // Adv. Phys., 2009, vol. 58, no. 2, pp. 67–196.

[18] Altmann E. G., Portela J. S. E., Tel T. Leaking chaotic systems // Rev. Mod. Phys., 2013, vol. 85, no. 2, pp. 869–918.

[19] Bauerand W., Bertsch G. F. Decay of ordered and chaotic systems // Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 65, no. 18, pp. 2213–2216.

[20] Fendrik A. J., Rivas A. M. F., Sánchez M. J. Decay of quasibounded classical Hamiltonian systems and their internal dynamics // Phys. Rev. E, 1994, vol. 50, no. 3, pp. 1948–1958.

[21] Alt H., Gräf H. D., Harney H. L., Hofferbert R., Rehfeld H., Richter A., Schardt P. Decay of classical chaotic systems: The case of the Bunimovich stadium // Phys. Rev. E, 1996, vol. 53, no. 3, pp. 2217–2222.

[22] Dettmann C. P., Georgiou O. Transmission and reflection in the stadium billiard: Time-dependent asymmetric transport // Phys. Rev. E, 2011, vol. 83, no. 3, 036212, 5 pp.

[23] Donnay V. J. Non-ergodicity of two particles interacting via a smooth potential // J. Stat. Phys., 1999, vol. 96, nos. 5–6, pp. 1021–1048.

[24] Kaplan A., Friedman N., Andersen M., Davidson N. Observation of islands of stability in soft wall atom-optics billiards // Phys. Rev. Lett., 2001, vol. 87, no. 27, 274101, 4 pp.

[25] Козлов В. В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 320 с.

[26] Васькин В. В., Ердакова Н. Н., Мамаев И. С. Статистическая механика нелинейных динамических систем // Нелинейная динамика, 2000, т. 5, № 3, с. 385–402.

[27] Козлов В. В. Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 204 с.

[28] Найденов С. В., Яновский В. В. Геометро-динамический подход к бильярдным системам: 1. Проективная инволюция бильярда. Прямая и обратная задачи // ТМФ, 2001, т. 127, № 1, с. 110–124.

[29] Найденов С. В., Яновский В. В. Геометро-динамический подход к биллиардным системам: 2. Геометрические особенности инволюций // ТМФ, 2001, т. 129, № 1, с. 116–130.

[30] Casati G., Prosen T. Mixing property of triangular billiards // Phys. Rev. Lett., 1999, vol. 83, no. 23, pp. 4729–4732.

[31] Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Москва: Мир, 1990. 240 с.

The equation of state of an ideal gas in two connected vessels

Dmitry M. Naplekov[1], Vladimir P. Seminozhenko[2], Vladimir V. Yanovsky[3]

[1,2,3]Institute for Single Crystals, National Academy of Sciences of Ukraine
pr. Lenina 60, Kharkov, 310001, Ukraine
[1]nmi@datasvit.net, [2]semynozhenko@isc.kharkov.com, [3]yanovsky@isc.kharkov.ua

We consider a two-dimensional collisionless ideal gas in the two vessels. In one of them particles behavior is ergodic. Another one is known to be nonergodic. Significant part of the phase space of this vessel is occupied by islands of stability. It is shown, that gas pressure is uniform in the first vessel and highly uneven in second one. Distribution of particle residence times was considered. For nonergodic vessel it is found to be quite unusual: delta spikes on small times, then several sites of chopped sedate decay and finally exponential tail. Such unusual dependence is found to be connected with islands of stability, destroyed after vessels interconnection. Equation of gas state in the first vessel is obtained. It differs from the ordinary equation of ideal gas state by an amendment to the vessel's volume. In this way vessel's boundary affects the equation of gas state. Correlation of this amendment with a share of the phase space under remaining intact islands of stability is shown.

MSC 2010: 37A60, 65P20
Keywords: nonergodicity, ideal gas, equation of state, connected vessels, establishment of a stationary state

Received June 25, 2013, accepted July 25, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 435–457 (Russian)