



УДК: 531.315
MSC 2010: 70E55

О вариационной формулировке динамики систем с трением

А. П. Иванов

Обсуждается базовая задача динамики механических систем со связями — нахождение ускорений в зависимости от фазовых переменных. Показано, что в случае кулонова трения эта задача равносильна решению некоторого вариационного неравенства. Получены общие условия существования и единственности решения. Рассмотрен ряд примеров.

Для систем с идеальными связями обсуждаемая проблема была решена Лагранжем в его «Аналитической динамике» (1788), что стало поворотным пунктом в математизации механики. В 1829 году Гаусс вывел свой принцип, позволяющий получить решение из условия минимума некоторой квадратичной функции от ускорений, названной «принуждением». В 1872 году Джеллеттом были представлены примеры неединственности решения в системах с трением покоя, а в 1895 году Пенлеве показал, что при наличии трения скольжения наряду с неединственностью возможно отсутствие решений. Такие ситуации оказались серьезным препятствием к развитию теории, математических моделей и практического использования систем с сухим трением. Неожиданным и красивым продвижением явилась работа Пожарицкого, где автор распространил принцип Гаусса на частный случай, когда нормальные реакции могут быть определены из уравнений динамики независимо от величин коэффициентов трения. Тем не менее, для систем с трением Кулона, где нормальные реакции априори неизвестны, до сих пор имеются лишь частные результаты о существовании и единственности решений.

Предлагаемый здесь подход основан на комбинации принципа Гаусса в форме реакций с представлением алгебраической нелинейной системы уравнений относительно нормальных реакций в форме вариационного неравенства. Теория таких неравенств включает в себя результаты о существовании и единственности, а также развитые методы решения.

Ключевые слова: принцип наименьшего принуждения, сухое трение, парадоксы Пенлеве

Получено 26 июня 2013 года
После доработки 9 июля 2013 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00354), а также Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.А18.21.0374).

Иванов Александр Павлович
arivanov@orc.ru
Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9



1. Случай идеальных связей

Рассмотрим механическую систему с лагранжевыми координатами $q = (q_1, \dots, q_n)^T$, стесненную некоторыми идеальными геометрическими и/или дифференциальными связями

$$\phi_j(q, t) = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_{si}(q, t)\dot{q}_i + d_s(q, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad s = 1, \dots, l. \quad (1.1)$$

Заметим, что в классической формулировке все связи считаются геометрическими; случай дифференциальных связей рассматривался в [12].

Воспользовавшись уравнениями Лагранжа с множителями, представим уравнения движения в виде

$$Aw = F + R, \quad (1.2)$$

$$R_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^l \lambda_{k+s} c_{si}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

где $w = \ddot{q}$, $A(n \times n)$ — матрица кинетической энергии, векторы $F \in \mathbb{R}^n$ содержат обобщенные силы и другие слагаемые, не зависящие от ускорений и реакций, а $R \in \mathbb{R}^n$ — реакции связей (1.1).

Будем решать задачу об определении обобщенных ускорений и реакций из уравнения (1.2) при фиксированных значениях переменных q , \dot{q} и t . Поскольку число неизвестных вдвое превышает число уравнений, к последним необходимо добавить ограничения на переменные w и R . Первую группу ограничений получим, дважды дифференцируя геометрические связи (1.1) и однократно — дифференциальные. В обоих случаях получим однотипные линейные уравнения вида

$$(w, n_\alpha) = \gamma_\alpha, \quad n_j = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \phi_j}{\partial q_n} \right), \quad n_{k+s} = (c_{s1}, \dots, c_{sn}), \quad (1.4)$$

$$j = 1, \dots, k, \quad s = 1, \dots, l.$$

Будем считать, что векторы n_α ($\alpha = 1, \dots, k+l$) нормированы, то есть имеют единичную евклидову длину, и линейно независимы, тогда они образуют базис линейного подпространства, ортогонального линейному многообразию (1.4). Если какие-либо из геометрических связей (1.1) — односторонние, то соответствующие равенства заменяются неравенствами « \geq »; аналогичная замена производится в равенствах (1.2) и (1.4). При этом множество кинематически возможных ускорений образовано пересечением гиперплоскостей и полупространств.

Для геометрической интерпретации равенства (1.2) введем в \mathbb{R}^n скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_1 = (A^{-1}u, v); \quad (1.5)$$

тогда формулы (1.4) примут вид

$$(Aw, n_\alpha)_1 = \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, k+l. \quad (1.6)$$

Равенство (1.2) выражает разложение вектора F в сумму проекции на многообразие (1.6) и ортогональной (в смысле (1.5)) составляющей. Как известно, такое разложение единственно, причем слагаемые в определенном смысле минимальны.

Минимальность величины $\|R\|_1$ была отмечена еще в 1836 году Остроградским, она выражается формулой

$$Z = \frac{1}{2} (Aw - F, w - A^{-1}F) \rightarrow \min, \tag{1.7}$$

равносильной принципу наименьшего принуждения Гаусса (минимум отыскивается на множестве (1.6)). Двойственный принцип имеет простую формулировку в случае, когда в формулах (1.3) все коэффициенты γ_α равны нулю:

$$\Phi(R) = (F + R, A^{-1}(F + R)) \rightarrow \min. \tag{1.8}$$

В общем случае при ортогональном проектировании F на многообразие (1.6) минимизируется не величина $\|F + R\|_1$, а норма разности $\|F + R - B\|_1$, где $B = \sum_{j=1}^{k+l} \beta_j n_j$ — проекция начала координат на это многообразие (рис. 1). Координаты β_j найдем, подставляя B в уравнения (1.6):

$$\sum_{j=1}^{k+l} \beta_j (n_i, A^{-1}n_j) = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, k + l. \tag{1.9}$$

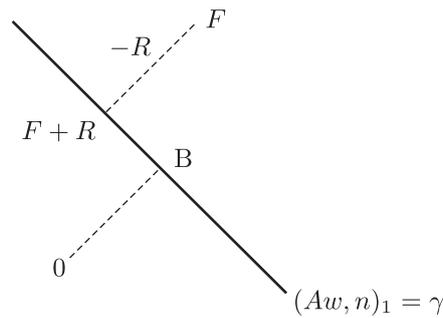


Рис. 1

Формула (1.7) принимает вид

$$\Phi(R) = (F_\gamma + R, A^{-1}(F_\gamma + R)) \rightarrow \min, \quad F_\gamma = F - B. \tag{1.10}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Принцип Гаусса в формах (1.7) или (1.10) без труда обобщается на случай трения вязкого типа, характеризующегося той или зависимостью силы трения от координат и скоростей [6]. Такие силы просто включаются в число активных сил F .

ПРИМЕР 1. Два груза с массами m_1 и m_2 связаны нитью, перекинутой через перекладчину, причем длина нити $l(t)$ является заданной функцией времени. Пренебрегая трением, найти ускорения грузов.

Обозначим q_1 и q_2 отрезки нити от ее высшей точки до концов, тогда (пока считаем связь двусторонней)

$$q_1 + q_2 = l(t) \quad \Rightarrow \quad w_1 + w_2 = \gamma = \ddot{l}(t).$$

Далее, $A = \text{diag} \{m_1, m_2\}$, $F = (m_1g, m_2g)$, и функция (1.7) имеет вид

$$Z(w) = \frac{1}{2} (m_1(w_1 - g)^2 + m_2(\gamma - w_1 - g)^2).$$



Из линейного уравнения $Z'(w) = 0$ находим точку минимума

$$w_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2\gamma}{m_2 + m_1}. \quad (1.11)$$

Отсюда для силы натяжения нити имеем

$$N = m_1(-w_1 + g) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(2g - \gamma). \quad (1.12)$$

С другой стороны, $n = (-1, -1)$, $R = (-N, -N)$, и функция (1.10) выглядит так:

$$\Phi(N) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} (m_1 g - N - \beta)^2 + \frac{1}{m_2} (m_2 g - N - \beta)^2 \right), \quad \beta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \gamma,$$

где величина β определена из системы (1.9). Из линейного уравнения $\Phi'(N) = 0$ найдем тот же корень (1.12). Следует заметить, что физически нить реализует одностороннюю связь, поэтому необходимо $N \geq 0$. Следовательно, формулы (1.11), (1.12) нужно уточнить:

$$w_1 = \max \left\{ \frac{(m_1 - m_2)g + m_2\gamma}{m_2 + m_1}, -g \right\}, \quad N = \max \left\{ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(2g - \gamma), 0 \right\},$$

причем ослаблению связи отвечает неравенство $\gamma > 2g$.

2. Системы с сухим трением и заданными нормальными реакциями

Сухое трение характеризуется законом Кулона

$$T = \begin{cases} -\mu|N|\frac{v}{|v|} & \text{при } v \neq 0, \\ -\mu|N|\frac{w}{|w|} & \text{при } v = 0, w \neq 0, \\ |T| \leq \mu|N|, & \end{cases} \quad (2.1)$$

где T — сила трения (вектор, лежащий в плоскости фрикционного контакта), N — нормальная реакция, μ — коэффициент трения. В случае одностороннего контакта формулы (2.1) следует подставить величину

$$N_+ = \max \{N, 0\}.$$

Будем считать, что каждая из геометрических связей (1.1) соответствует одной из точек фрикционного контакта; в этой точке нормальное направление задает орт n_j , определенный в (1.3), коэффициент трения μ_j (возможен случай $\mu_j = 0$), а также двумерную касательную плоскость с ортогональным базисом t_{1j}, t_{2j} ($j = 1, \dots, k$). Для каждого контакта выполнены формулы (2.1) с добавлением соответствующего индекса.

При решении задач динамики, описываемых уравнениями (1.2), формулы (2.1) позволяют сократить число неизвестных, но не позволяют исключить нормальные реакции. Для определения последних добавляют к дифференциальным уравнениям алгебраические уравнения (1.3). Ввиду наличия знака модуля в формулах (2.1), эти уравнения нелинейны



и могут оказаться несовместными или иметь несколько решений [7]. В некоторых случаях задача упрощается ввиду независимости нормальных реакций от трения, то есть в формулах (2.1) величина N является известной функцией координат и скоростей. Такой закон трения называют согласованным, или трением типа Треска. Примеры таких систем весьма немногочисленны, в задаче о движении твердого тела по плоскости они исчерпываются шаром и круговым цилиндром.

Расчет сил трения по формулам (2.1) для известных N_j не составляет труда, если $v \neq 0$ или $v = 0$, $w \neq 0$, затем их можно присоединить к заданным силам F . В случае $v = 0$, $w = 0$ требуется дополнительный анализ. Было показано [1], что для решения задачи можно воспользоваться вариационным принципом, если ввести модифицированную функцию принуждения Z^* по формуле

$$Z^*(w) = \frac{1}{2}(w, Aw) - \sum_{i=1}^n F_i w_i - \sum_{v_i \neq 0} T_i w_i + \sum_{v_i=0} \mu_i N_i |w_i|, \quad (2.2)$$

где в первую сумму включены все обобщенные ускорения, во второй сумме учитываются контакты скольжения, а в третьей — контакты с нулевой скоростью скольжения. При этом величины T_i вычисляются по первой формуле (2.1).

Пожарицкий доказал, что функция (2.2) всегда имеет критическую точку. Так как функция выпукла, отсюда следует, что эта точка единственна и является глобальным минимумом.

Сформулируем иной принцип, основанный на использовании функции (1.9).

Теорема 10. Если в системе с фрикционными контактами нормальные составляющие реакций N_j ($j = 1, \dots, k$) заданы, а касательные составляющие $T_j \in LO\{t_{1j}, t_{2j}\}$ (t_{1j} и t_{2j} — ортогональный базис в плоскости j -го контакта) определяются формулами (2.1), то значения T_j ($j = 1, \dots, k$) минимизируют функцию

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \frac{1}{2}(x + T)_1^2, \\ x &= F + \sum_{j=1}^k N_j n_j, \quad T = \sum_{j=1}^k T_j, \quad |T_j| \leq \mu_j |N_j|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Доказательство. Для решения поставленной задачи условной минимизации составим функцию Лагранжа

$$L(T) = \Phi(T) + \sum_{j=1}^k \lambda_j (T_j^2 - \mu_j^2 N_j^2) \quad (2.4)$$

и воспользуемся условиями Куна–Таккера [8]. Если в точке минимума функции (2.4) какое-либо из неравенств (2.1) выполнено в строгом смысле, то соответствующий множитель Куна–Таккера $\lambda_i = 0$ и наличие данного ограничения не влияет на решение. Напротив, если $\lambda_j < 0$, то сила трения принимает граничное значение и выражается формулой

$$T_j = |N_j| (t_{1j} \cos \alpha_j + t_{2j} \sin \alpha_j), \quad (2.5)$$

где α_j — угол между векторами T_j и t_{1j} . В стационарной точке функции (2.4) для каждого из контактов вида (2.5) выполнено равенство

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = \left(A^{-1}(x + T), \frac{\partial T_j}{\partial \alpha_j} \right) + 2\lambda_j \left(T_j, \frac{\partial T_j}{\partial \alpha_j} \right) = 0.$$

Если считать равенство (1.2) выполненным, то отсюда получаем

$$(w, t_{1j}) \sin \alpha_j - (w, t_{2j}) \cos \alpha_j = 0. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) означает, что в точке контакта сила трения T_j коллинеарна проекции ускорения на касательную плоскость. Согласно условиям Куна–Таккера, минимуму соответствует антиколлинеарность, то есть выполнены равенства второй формулы (2.1). В силу единственности решения [1], в точке минимума выпуклой функции (2.3) выполнены как законы трения, так и уравнение динамики (1.2), что и требовалось.

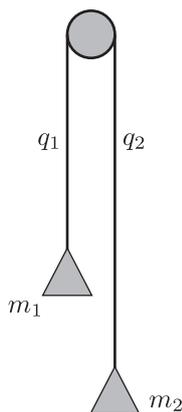


Рис. 2

ПРИМЕР 2. «Пирамида», сложенная из нескольких прямоугольных блоков (рис. 2), рассматривалась в качестве примера комбинаторных сложностей, возникающих при анализе систем с трением Треска [9]. В начальный момент система покоится, и в каждом контакте возможны три варианта движения (начало скольжения влево или вправо либо покой). Если число блоков $n = 10$, то имеется $3^{10} = 59\,049$ различных возможностей для решения системы (1.2). Для упорядочения громоздкого перебора было предложено использовать метод Лемке в отношении некоторой задачи линейного программирования, построенной при помощи введения вспомогательных дополнительных переменных.

Альтернативный подход связан с использованием теоремы 10. В данной системе координаты q выберем так: q_1 — смещение верхнего блока относительно среднего, q_2 — смещение среднего блока относительно нижнего, q_3 — смещение нижнего блока относительно неподвижной опоры. Тогда скорость нижнего блока равна \dot{q}_3 , скорость среднего блока равна $\dot{q}_3 + \dot{q}_2$, а верхнего блока — $\dot{q}_3 + \dot{q}_2 + \dot{q}_1$. Отсюда для матрицы кинетической энергии получаем выражение

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 + m_2 & m_1 + m_2 \\ m_1 & m_1 + m_2 & m_1 + m_2 + m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Обобщенные силы F_j , соответствующие координатам q_j , найдем из уравнения баланса мощностей:

$$F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + F_3 \delta q_3 = P_1 \delta (q_1 + q_2 + q_3) + P_2 \delta (q_2 + q_3) + P_3 \delta q_3,$$

откуда

$$F_1 = P_1, \quad F_2 = P_1 + P_2, \quad F_3 = P_1 + P_2 + P_3.$$

Допустимое множество реакций — это прямоугольный параллелепипед

$$|T_i| \leq \mu_i N_i, \quad N_1 = gm_1, \quad N_2 = g(m_1 + m_2), \quad N_3 = g(m_1 + m_2 + m_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

где μ_i — коэффициенты трения, g — ускорение свободного падения. Согласно теореме 10, определение движения сводится к проектированию точки $F = (F_1, F_2, F_3)$ на множество (2.8) в смысле метрики (1.6) в пространстве $R = (R_1, R_2, R_3)$. Решение этой задачи можно свести к последовательности проектирований точки на гиперплоскости (грани параллелепипеда). Схема алгоритма такова. За начальное приближение к решению возьмем $F^0 = F$, а $F^1 = \pi_1(F)$ — проекция точки z_0 на множество $|R_1| \leq \mu_1 N_1$. Для построения

этой проекции выясним расположение точки z_0 по отношению к плоскостям $R_1 = \pm\mu_1 N_1$. Если эта точка лежит между плоскостями (то есть $|F_1| < \mu_1 N_1$), то считаем $F^1 = F^0$, иначе проектируем точку на ближайшую из плоскостей. К примеру, если $F_1 > \mu_1 N_1$, то полагаем

$$F^1 = F - \lambda(1, 0, 0)A, \quad \lambda = (F_1 - \mu_1 N_1) a_{11}^{-1}. \quad (2.9)$$

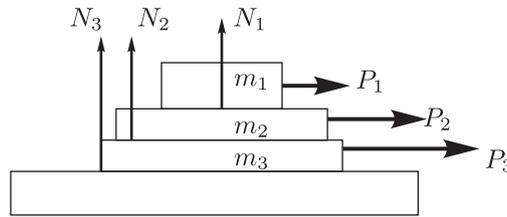


Рис. 3

Следующая итерация строится путем проектирования $z_2 = \pi_2(z_1)$ на множество $|R_2| \leq \mu_2 N_2$, и далее циклическим образом. Общее число итераций может быть конечным или бесконечным, в последнем случае они сходятся к решению в геометрической прогрессии. Это позволяет построить простой алгоритм (приближенного) решения задачи.

Имеется и другой, «геометрический» метод. Все пространство $\mathbb{R}^3 = \{F\}$ разбивается на 27 частей, соответствующих возможному поведению системы (для уяснения структуры разбиения можно использовать кубик Рубика). Эти части удобно сопоставить триплетам из символов «единица», «минус единица» и «нуль» по следующему правилу. Тройка $(0, 0, 0)$ соответствует параллелепипеду (2.8) (скольжения нет) (см. рис. 4). К каждой из шести граней этого параллелепипеда примыкает полубесконечный цилиндр с направляющей An , где n — внешняя нормаль к этой грани. Им отвечают тройки с двумя нулями (скольжение в одном контакте): к примеру, $(1, 0, 0)$ означает скольжение вправо в первом контакте (рис. 4). Далее, к каждому из двенадцати ребер примыкает неограниченный четырехгранник с пятью ребрами, одно из которых совпадает с выбранным ребром параллелепипеда, а четыре других — лучи вида An . Они отвечают скольжению в двух контактах: например, $(1, 0, -1)$ описывает скольжение вправо в первом контакте и влево — в третьем контакте (на рис. 4 изображена аналогичная область $(1, 1, 0)$). Остальные восемь областей — это трехгранные углы, примыкающие к вершинам и соответствующие скольжению во всех трех контактах. Для определения, в какой из областей расположена точка F , достаточно вычислить небольшое число проекций. Проектирование $\pi_1(F)$ по формуле (2.9) смещает точку вдоль вектора An_1 , при этом в тройке, характеризующей положение точки F относительно описанных выше областей, первая компонента обратится в нуль, а две другие не изменятся. Если окажется, что

$$|F_2^1| \leq \mu_2 N_2, \quad |F_3^1| \leq \mu_3 N_3, \quad (2.10)$$

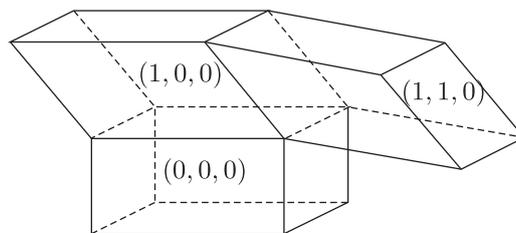


Рис. 4



то ответ получен: $F \in (1, 0, 0)$ (если $F_1 < -\mu_1 N_1$ или $|F_1| < \mu_1 N_1$, а неравенства (2.10) выполнены, то $F \in (-1, 0, 0)$ и $F \in (0, 0, 0)$ соответственно). В противном случае следует выполнить следующие два проектирования $\pi_2^*(F^1)$ и $\pi_3^*(F^1)$ точки F^1 в плоскости $F_1^1 = \text{const}$ (что обозначается посредством «звездочки» в верхнем индексе оператора проектирования) на множества, заданные неравенствами (2.10). При таком проектировании сохраняется информация об одном из символов в изображающей тройке: проекция $\pi_2^*(F^1)$ позволяет определить третий символ, а проекция $\pi_3^*(F^1)$ — второй. Для построения этих проекций надо учесть, что $|F_1| = \text{const} \leq \mu_1 N_1$, и в выражении кинетической энергии можно считать $\dot{q}_1 = 0$. Формула (2.9) в случае $F_2^2 > \mu_2 N_2$ модифицируется так:

$$\begin{aligned} \pi_2^*(F^1) &= F^1 - \lambda(0, 1, 0)A^1, \quad \lambda = (F_2^1 - \mu_2 N_2) / a_{22}^1, \\ a_{11}^1 &= a_{12}^1 = a_{13}^1 = a_{21}^1 = a_{31}^1 = 0, \quad a_{33}^1 = M + m_3, \\ a_{22}^1 &= a_{23}^1 = a_{32}^1 = M, \quad M = m_1 + m_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сравнивая третью компоненту вектора (2.11) со значениями $\pm\mu_3 N_3$, находим третий символ в триplete. Аналогично находим вектор $\pi_3^*(F^1)$, сравниваем его вторую компоненту со значениями $\pm\mu_2 N_2$ и находим второй символ из трех. Теперь для нахождения оставшегося (первого) символа достаточно вычислить проекцию $\pi_3^*(\pi_2(F))$. Следовательно, для определения характера движения системы требуется не более пяти проектирований. Значения ускорений затем находятся подстановкой в уравнение (1.2).

В случае $n = 4$ аналогичный подход позволяет найти все символы, кроме первого, за шесть проектирований, и еще три проекции потребуются для определения первого символа; общее число операций не превосходит девяти. По индукции, если в случае $n = r$ для решения задачи требуется $C(r)$ проекций, то для $n = r + 1$ в результате $C(r) + 1$ проекции определяются все символы, кроме первого. Вычисление первого символа требует еще n проекций. В итоге получаем общую формулу

$$C(n) = \frac{1}{2}n(n+1) - 1,$$

то есть трудоемкость пропорциональна квадрату размерности. В частности, $C(10) = 54$, что на три порядка меньше числа комбинаторных вариантов.

Подкрепим сказанное расчетом, полагая блоки и коэффициенты трения одинаковыми: $m_j = m$, $\mu_j = \mu$ ($j = 1, 2, 3$). Возьмем $P = \mu mg(2, -2, 3)$, тогда $F = \mu mg(2, 0, 3)$, и вследствие (2.8) имеем

$$N_1 = mg, \quad N_2 = 2mg, \quad N_3 = 3mg, \quad F_1 > \mu_1 N_1,$$

откуда вследствие формулы (2.9) получаем для первой из проекций

$$F^1 = \pi_1(F) = F - (a_{11}, a_{12}, a_{13})\mu m g a_{11}^{-1} = \mu mg(1, -1, 2). \quad (2.12)$$

Поскольку $|F_2^1| < \mu N_2$ и $|F_3^1| < \mu N_3$, то формула (2.12) определяет решение задачи: так как $F \in (1, 0, 0)$, то $w_2 = w_3 = 0$, $T_1 = -1$, и подстановка в систему (1.2) дает $w_1 = 1$, $T_2 = 1$, $T_3 = -2$. Для другой начальной точки: $F = \mu mg(2, -3, 1)$ по аналогии с (2.12) имеем

$$F^1 = \mu mg(1, -4, 0).$$

Поскольку $|F_3^1| < \mu N_3$, а $F_2^1 < -\mu N_2$, то второй символ в тройке — это минус единица. Для определения третьего символа воспользуемся формулой (2.11):

$$\pi_2^*(F^1) = F^1 + 2(0, 1, 1)\mu mg = \mu mg(1, -2, 2).$$



Так как третья компонента этого вектора по модулю меньше, чем μN_3 , то третий символ в тройке — это ноль. Для определения первого символа вычислим

$$F^2 = \pi_2(F) = F + (a_{21}, a_{22}, a_{23})\mu t g a_{22}^{-1} = \mu t g(2.5, -2, 2). \quad (2.13)$$

Поскольку $\pi_3^*(F^2) = F^2$, то первый символ равен единице. Следовательно, $F \in (1, -1, 0)$. Теперь можно легко решить систему (1.2), подставляя в нее $w_3 = 0$, $T_1 = -1$, $T_2 = 2$, мы найдем значения остальных трех переменных: $w_1 = 3$, $w_2 = -2$, $T_3 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. С течением времени величина F и, соответственно, R могут изменяться. Изменение положения R относительно одной из граней параллелепипеда (2.8) свидетельствует о возможной бифуркации. Методы анализа бифуркаций в системах с трением обсуждались в [13, 14].

ПРИМЕР 3. Две материальные точки массы m скреплены невесомым стержнем длины $2l$ и помещены без скоростей на горизонтальную шероховатую плоскость. В плоскости опоры к системе приложены некоторые силы. Требуется определить ускорения точек в начальный момент времени. Ранее были получены условия равновесия данной системы [10, 11]. Показано [1], что решение для ускорений в неравновесном случае можно определить из условия минимальности функции (2.2). Найдем формулы для реакций в начальный момент движения.

Направим ось абсцисс в опорной плоскости вдоль стержня, а ось ординат — через его середину. Дальнейшее положение стержня однозначно определяется абсциссой его центра q_1 и ординатами частиц q_2 и q_3 . Матрица кинетической энергии (для начального положения) имеет вид

$$A = \text{diag} \{2m, m, m\},$$

а внешние силы раскладываются на составляющие X (вдоль стержня), Y_1 и Y_2 (приложены к точкам перпендикулярно к стержню) (рис. 5). Силы трения с компонентами (T_{x1}, T_{y1}) и (T_{x2}, T_{y2}) удовлетворяют неравенствам

$$T_{xj}^2 + T_{yj}^2 \leq P^2, \quad P = \mu t g, \quad j = 1, 2, \quad (2.14)$$

где μ — коэффициент трения для каждой из частиц. Согласно теореме 11, в действительном движении эти силы можно найти из условия минимума функции

$$\Phi(T) = \frac{1}{2m} (X + T_{x1} + T_{x2})^2 + \frac{1}{m} (Y_1 + T_{y1})^2 + \frac{1}{m} (Y_2 + T_{y2})^2 \quad (2.15)$$

на множестве (2.14). Имеются следующие четыре возможности:

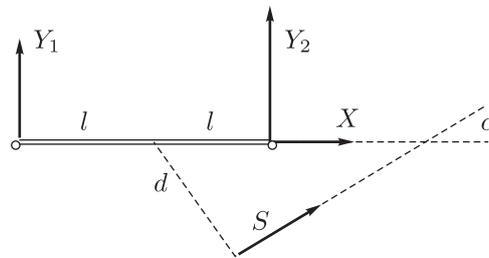


Рис. 5



1) Минимум функции (2.15) равен нулю (система находится в равновесии). В силу (2.14), такая ситуация имеет место в случае

$$|X| \leq \sqrt{P^2 - Y_1^2} + \sqrt{P^2 - Y_2^2}. \quad (2.16)$$

2) Ускорение первой точки равно нулю ($w_1 = w_2 = 0$), а второй — отлично от нуля, то есть система вращается вокруг первой точки. При этом

$$X^2 + Y_1^2 \leq P^2, \quad |Y_2| > P. \quad (2.17)$$

Первые два слагаемых в формуле (2.15) равны нулю, а третье слагаемое минимально, если

$$T_{y2} = -P \operatorname{sign} Y_2, \quad mw_3 = Y_2 + T_{y2}. \quad (2.18)$$

3) Третий случай зеркален предыдущему: система начинает вращение вокруг второй точки. В формулах (2.17) и (2.18) индексы меняются местами.

4) В четвертом случае (дополняющем три предыдущих) обе точки начинают скользить. При этом в формулах (2.14) обозначим

$$T_{x1} = -P \cos \varphi, \quad T_{y1} = -P \sin \varphi, \quad T_{x2} = -P \cos \psi, \quad T_{y2} = -P \sin \psi, \quad (2.19)$$

где углы φ и ψ образованы осью абсцисс и начальными направлениями движения первой и второй точек соответственно. Подставим выражения (2.19) в функцию (2.15), тогда условия ее минимальности выражаются системой уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (X - P \cos \varphi - P \cos \psi) \sin \varphi - 2(Y_1 - P \sin \varphi) \cos \varphi = 0, \\ m \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} &= (X - P \cos \varphi - P \cos \psi) \sin \psi - 2(Y_2 - P \sin \psi) \cos \psi = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Введем обозначения

$$u = \cos \varphi, \quad v = \cos \psi, \quad F_1 = Y_1/P, \quad F_2 = Y_2/P, \quad F_3 = X/P,$$

тогда уравнения (2.20) примут вид

$$\begin{aligned} u &= H_2(v), \quad v = H_1(u), \\ H_1(u) &= F_3 + u - \frac{2|F_1|u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad H_2(v) = F_3 + v - \frac{2|F_2|v}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

причем знаки перед радикалами выбраны из условия минимальности выражения (2.15).

Система (2.21) сводится к решению одного уравнения

$$u = H_2(H_1(u)), \quad u \in (-1, 1), \quad (2.22)$$

после чего значение v определится второй формулой (2.21). Из нескольких решений уравнения (2.22) следует отобрать то, для которого значение функции (2.15) будет наименьшим.

Для примера такого расчета допустим, что внешние силы сводятся к равнодействующей величины S , линия действия которой проходит на расстоянии d от центра и образует со стержнем угол α (рис. 5). Тогда в формуле (2.15)

$$X = S \cos \alpha, \quad Y_1 = \frac{1}{2}S(\sin \alpha - \kappa), \quad Y_2 = \frac{1}{2}S(\sin \alpha + \kappa), \quad \kappa = \frac{d}{l}.$$

Положим $P = 1$, $d = 2l$, $\alpha = \pi/6$ и будем увеличивать величину S от нуля. В интервале $0 < S < S^* = 0.8$ неравенство (2.16) выполнено, и система покоится. Для $S = S^*$ подкоренное выражение во втором слагаемом формулы (2.16) обращается в нуль, и для значений $S^* < S < S^{**} = 4/\sqrt{21} \approx 0.873$ стержень вращается вокруг первой точки в соответствии с (2.18). При значении $S = S^{**}$ первое выражение в формуле (2.17) обращается в равенство, и для $S > S^{**}$ скольжение начинается сразу в обоих контактах. Этот случай описывается системой (2.21), где $F_3 = X$, $F_1 = Y_1$, $F_2 = Y_2$. Уравнение (2.22) решалось численно; оказалось, что величина u монотонно уменьшается от значения $u = 0.755$ при $S = S^{**}$ до предельного значения $u = 0.5$ при $S \rightarrow \infty$. При этом величина v монотонно возрастает от нуля до предельного значения $v_\infty = \sqrt{3/28} \approx 0.327$ (предельные значения соответствуют началу движения стержня в отсутствие трения).

3. Случай трения Кулона

В общем случае нормальные реакции в формулах (2.1) априори неизвестны, и уравнение (1.2) следует решать при учете закона трения и условий связей (1.6). Общие алгоритмы решения такой задачи неизвестны, более того, отсутствуют условия существования в данной задаче единственного решения. Имеются частные результаты: показано, что решение существует, если коэффициенты трения достаточно малы [2]; доказано (при некоторых ограничениях) существование решения в случае, когда скорости скольжения во всех фрикционных контактах равны нулю [3]; для противоположного случая, когда все скорости скольжения отличны от нуля, получен критерий существования и единственности решения [4]. Для анализа общей ситуации воспользуемся результатами предыдущих разделов.

Возьмем произвольный допустимый набор нормальных реакций связей (1.1) N_j ($j = 1, \dots, k+l$) (для двусторонних связей эти числа произвольны, а для односторонних геометрических связей — неотрицательны). Согласно теореме 10, для данного набора нормальных реакций система (1.2) с кулоновым трением (2.1) имеет единственное решение; обозначим его $T(x)$, $x = F + N$. Допустим, что выполнены соотношения

$$(x + T(x), n_\alpha)_1 = \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, k+l, \quad N = \sum_{r=1}^{k+l} N_r n_r. \quad (3.1)$$

Тогда уравнение (1.2) согласуется как с законом трения, так и с уравнениями связей (1.7). Следовательно, данный набор реакций решает поставленную задачу в случае, когда все связи — двусторонние.

Если какие-либо из геометрических связей односторонние (то есть в уравнениях (1.1) $\phi_i(q, t) \geq 0$ для соответствующих этим связям значений индексов), а уравнения (3.1) выполнены при допустимых значениях реакций этих связей $N_i \geq 0$, то мы также имеем решение (связи напряжены). Обращение одной из реакций N_i в нуль свидетельствует об ослаблении этой связи, то есть в соответствующей формуле (1.6) имеем

$$(Aw, n_\alpha)_1 \geq \gamma_\alpha. \quad (3.2)$$

С использованием обозначений (1.9) и (1.10) уравнения (3.1) равносильны системе

$$(x + T(x) - B, n_\alpha)_1 = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k+l, \quad (3.3)$$

где неравенствам (3.2) также соответствует знак неравенства. Нетрудно показать, что все перечисленные ситуации можно объединить в форме вариационного неравенства.

Теорема 11. Для того чтобы допустимые значения нормальных реакций связей (1.1) $\{N_\alpha\}$ соответствовали решению системы

$$Aw = F + N + T(N) \quad (3.4)$$

с трением Кулона (2.1), необходимо и достаточно, чтобы силы трения удовлетворяли теореме 10, причем для всех допустимых значений нормальных реакций $N' = \sum_{r=1}^{k+l} N'_r n_r$ выполнялось вариационное неравенство

$$(F + N + T(F + N) - B, N' - N)_1 \geq 0. \quad (3.5)$$

Доказательство сводится к перебору рассмотренных выше случаев. Если все связи двусторонние, то в силу (3.3) соотношение (3.5) выполняется как равенство. То же самое относится к случаю, когда для всех односторонних связей нормальные реакции строго положительны. Неравенство возникает в случае, когда для некоторых односторонних связей $N_i = 0$: тогда $N'_i \geq 0$ и формула (3.5) при учете (3.4) равносильна (3.2), что и требовалось.

ПРИМЕР 4. В примере 1 возьмем $N \geq 0$ произвольно. В отсутствие трения в формуле (3.5) имеем $T(N) = 0$, и это неравенство принимает вид

$$((m_1g, m_2g) - (N + \beta)(1, 1), (N' - N)(-m_1^{-1}, -m_2^{-1})) \geq 0, \quad \forall N' \geq 0. \quad (3.6)$$

В случае $N > 0$ неравенство (3.6) равносильно уравнению

$$((m_1g, m_2g) - (N + \beta)(1, 1), (m_1^{-1}, m_2^{-1})) = 0,$$

откуда получаем значение (1.11), отвечающее случаю натянутой нити $\gamma < 2g$. Если же решением неравенства (3.6) является значение $N = 0$, то условие (3.6) выглядит так:

$$((m_1g, m_2g) - \beta(1, 1), (m_1^{-1}, m_2^{-1})) \leq 0,$$

что равносильно неравенству $\gamma > 2g$, что совпадает с анализом, проведенным в разделе 1.

Усложним задачу, введя в систему трение нити о стержень. При этом для возможности определения скорости скольжения будем считать, что длина нити неизменна, а грузики неподвижны относительно нити (то есть не несут катушек). Тогда

$$N = N(-1, -1), \quad T = T(1, -1), \quad |T| \leq 2\mu N \quad (3.7)$$

(здесь для удобства векторы n и t не нормированы: они имеют одинаковую длину $\sqrt{2}$, поэтому неравенство (3.7) справедливо). В последней формуле (3.7) принято во внимание, что вертикальная нагрузка на стержень равна удвоенной силе натяжения нити, и считается, что μ — это эффективный коэффициент трения, определенный при данных условиях контакта. Функция (2.4) принимает вид

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} (m_1g - N + T(N))^2 + \frac{1}{m_2} (m_2g - N - T(N))^2 \right), \quad (3.8)$$

где величина $T(N)$ равна $-2\mu N \operatorname{sign} \dot{q}_1$, если $\dot{q}_1 \neq 0$, а если $\dot{q}_1 = 0$, то T должно удовлетворять неравенству (3.7) и минимизировать выражение (3.8).

Рассмотрим эти случаи поочередно. Допустим, что $\dot{q}_1 < 0$ (то есть первая масса поднимается, и нить скользит вправо), тогда $T = 2\mu N$ и неравенство (3.5) принимает вид

$$((m_1g, m_2g) - N(1, 1) + 2\mu N(1, -1), (N' - N)(-m_1^{-1}, -m_2^{-1})) \geq 0, \quad \forall N' \geq 0.$$

Очевидно, что значение $N = 0$ не является решением; если же $N > 0$, приходим к уравнению

$$N(1 + 2\mu\chi) = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \chi = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.9)$$

Если выполнено неравенство

$$\mu\chi > -1/2,$$

то задача имеет единственное решение, а в противном случае она неразрешима. Случай $\dot{q}_1 > 0$ приводит к аналогичному результату: условие корректности примет вид

$$\mu\chi < 1/2.$$

Можно сделать вывод: при выполнении неравенства

$$2\mu|\chi| < 1 \quad (3.10)$$

движение системы однозначно определено при любом направлении скольжения, а в противном случае оно невозможно для одного из этих направлений. Такая ситуация аналогична парадоксам Пенлеве [7].

В случае $\dot{q}_1 = 0$ найдем точку минимума функции (3.8) по T при заданном N из условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{1}{m_1}(m_1g - N + T) + \frac{1}{m_2}(-m_2g + N + T) = 0,$$

откуда

$$T = -\chi N. \quad (3.11)$$

Если значение (3.11) принадлежит промежутку $|T| \leq 2\mu N$, то его и следует подставить в формулу (3.5), иначе выбираем одно из значений $T = \pm 2\mu N$ из соображений минимальности функции (3.8). Опуская расчеты, придем к такому результату.

В случае

$$|\chi| \leq 2\mu \quad (3.12)$$

получаем

$$N = \frac{1}{2}g(m_1 + m_2), \quad (3.13)$$

что соответствует покою $w_1 = w_2 = 0$.

Если выполнено неравенство

$$\chi < -2\mu$$

(для этого необходимо $2\mu < 1$, и неравенство (3.10) выполнено), то минимум функции (3.8) достигается при значении $T = -2\mu N$; по аналогии со случаем $\dot{q}_1 < 0$ получаем уравнение (3.9), откуда находим

$$w_1 = -w_2 = \frac{(2\mu + 1)\chi}{1 + 2\mu\chi} < 0.$$

Наконец, в случае

$$\chi > 2\mu$$

имеем

$$T = 2\mu N, \quad w_1 = -w_2 = \frac{(-2\mu + 1)\chi}{1 - 2\mu\chi} > 0.$$

Следовательно, при нулевой скорости скольжения движение определено однозначно.

4. Условия существования и единственности решения

Перепишем ключевое неравенство (3.5) в стандартной форме [5]

$$\begin{aligned} (\Psi(x), x' - x) \geq 0, \quad \forall x' \in K, \quad \Psi(x) = A^{-1}(x + T(x) - B), \\ K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = F + \sum_{j=1}^k N_j n_j \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $N_j \in \mathbb{R}$ для двусторонних связей и $N_j \in \mathbb{R}_+$ для односторонних связей; множество K выпукло и замкнуто.

Определение. Отображение $\Psi: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *коэрцитивным*, если для некоторого $x^0 \in K$ и всех $x \in K$ выполнено условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\Psi(x) - \Psi(x^0), x - x^0)}{\|x - x^0\|} = \infty. \quad (4.2)$$

Отображение называется *монотонным*, если

$$(\Psi(x) - \Psi(x'), x - x') \geq 0, \quad \forall x, x' \in K,$$

и *строго монотонным*, если равенство здесь достигается только при $N = N'$. *Сильная монотонность* выражается условием

$$(\Psi(x) - \Psi(x'), x - x') > \theta(x - x')^2, \quad \forall x, x' \in K, \quad (4.3)$$

выполненным для некоторого $\theta > 0$.

Предложение 1 ([5]). Если Ψ коэрцитивно, то неравенство (4.1) имеет решение. Если Ψ строго монотонно, то решение единственно. Сильная монотонность достаточна для существования и единственности.

Выясним, при каких условиях оператор (4.1) будет сильно монотонным. Левая часть неравенства (4.3) принимает вид

$$(\Psi(x) - \Psi(x'), x - x') = (N - N')_1^2 + (T(F + N) - T(F + N'), N - N')_1. \quad (4.4)$$

Согласно теореме 11, вектор $T(F + N)$ представляет собой проекцию вектора $-F$ на допустимое множество (2.1), вид которого зависит от N . В частности, придавая одной из

координат малое частное приращение ΔN_j , мы изменяем радиус соответствующего круга трения (в ту или иную сторону) на величину $\mu_j \Delta N_j$. Если точка лежала внутри круга трения (в данном контакте скольжения нет), то

$$T(F + N + \Delta N_j) = T(F + N),$$

а для контакта скольжения в направлении вектора $-t_k$ имеем

$$T(F + N + \Delta N_k) - T(F + N) = \mu_k t_k \Delta N_k + o(\Delta N_k),$$

то есть проекция точки на больший круг получается из проекции на меньший круг путем переноса вдоль направления скольжения (с возможной погрешностью $o(\Delta N_j)$). Следовательно, в общем случае

$$\frac{\partial T(F + N)}{\partial N_j} = \bar{\mu}_j t_j, \quad \bar{\mu}_j \in [0, \mu_j], \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.5)$$

Преобразуем второе слагаемое в формуле (4.4) по формуле конечных приращений при учете равенств (4.5):

$$\begin{aligned} & (T(F + N' + (N - N')) - T(F + N'), N - N')_1 = \\ & = \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial T(\xi)}{\partial N_i} (N_i - N'_i), N - N' \right) = \sum_{i,j=1}^k \sigma_{ij} (N_i - N'_i) (N_j - N'_j), \quad (4.6) \\ & \sigma_{ij} = \bar{\mu}_i (A^{-1} t_i, n_j), \quad i, j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

где ξ — некоторая промежуточная точка из отрезка (N, N') .

Формула (4.6) задает квадратичную форму относительно $(N - N')$, что позволяет оценить левую часть в формуле (4.4). Коэффициенты этой формы $\bar{\sigma}_{ij}$ вычисляются как средние значения:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}), \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (4.7)$$

Следовательно, правая часть в (4.4) представляет собой квадратичную форму с матрицей

$$\Omega = \|\omega_{ij}\|, \quad \omega_{ij} = (A^{-1} n_i, n_j) + \bar{\sigma}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (4.8)$$

Из предложения 1 сразу вытекает следующий результат.

Теорема 12. Если матрица (4.8) положительно определена для всех $|\bar{\mu}_j| \leq \mu_j$ и всех допустимых при заданных условиях векторах t_j ($j = 1, \dots, k$), то система (1.2) с кулоновым трением (2.1) (в каждом контакте) имеет единственное решение.

Рассмотрим некоторые частные случаи использования теоремы 12.

1°. Если трение отсутствует, то $T \equiv 0$, и условие теоремы выполнено.

2°. Следующий по сложности случай — трение скольжения, для каждого из контактов определяемое первым равенством (2.1) (с неодинаковыми, вообще говоря, коэффициентами трения). Необходимые и достаточные условия существования единственного решения ранее были получены в терминах положительности некоторых вспомогательных матриц [4]. Проверка условия теоремы 12 упрощается, так как множество допустимых направлений скольжения состоит из единственного элемента.

3°. К предыдущему случаю примыкают системы с контактами обоих типов (скольжение и качение) при условии, что возможные направления скольжения фиксированы (как в примере 2, в отличие от примера 3).



ПРИМЕР 5. Жесткий стержень движется в вертикальной плоскости, касаясь горизонтальной шероховатой опоры одним из своих концов. Введем систему отсчета с началом на опоре и горизонтальной осью абсцисс. В качестве обобщенных координат q_1, q_2 возьмем координаты точки контакта C , q_3 — угол наклона стержня к опоре. Считая массу и радиус инерции стержня единичными и обозначая половину его длины $l \geq 1$, составим систему (1.2) при помощи основных теорем динамики:

$$\begin{aligned} w_1 - hw_3 &= F_1 + T, & w_2 + aw_3 &= F_2 + N, \\ (1 + l^2)w_3 - hw_1 + aw_2 &= F_3, & h &= l \sin q_3, & a &= l \cos q_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Условия контакта содержат одностороннее ограничение, а также закон сухого трения:

$$q_2 \geq 0, \quad T = -\mu N_+(1, 0, 0) \operatorname{sign} v_1, \quad |T| \leq \mu N_+, \quad n = (0, 1, 0)$$

(последнее неравенство соответствует отсутствию скольжения). Будем считать, что в данный момент времени $q_2 = 0, v_2 = 0$, то есть вертикальная составляющая точки контакта равна нулю, причем $v_1 > 0$. Матрица кинетической энергии и обратная к ней имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & a \\ -h & a & 1 + l^2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + h^2 & -ah & h \\ -ah & 1 + a^2 & -a \\ h & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном примере $k = 1$, поэтому матрица (4.9) состоит из единственного элемента:

$$\Omega = (A^{-1}(n + \bar{\mu}t), n) = 1 + a^2 - \bar{\mu}ah.$$

Условие теоремы 12 выражается известным неравенством [7]

$$1 + a^2 > \mu|a|h, \quad (4.10)$$

которое гарантирует однозначную разрешимость задачи как в случае односторонней, так и в случае двусторонней связи между стержнем и опорой. Если знак неравенства противоположный, то задача в зависимости от приложенных сил F либо не имеет решений, либо имеет два решения. В частности, если на стержень действует лишь сила тяжести, то он не сможет скользить по опоре в направлении, образующем со стержнем тупой угол.

4°. Для случая, когда скорость скольжения во всех точках контакта равна нулю, было доказано существование решения при некоторых ограничениях на структуру системы [3]. Для формулировки этих условий необходимо в каждой из точек контакта задать в реальном трехмерном пространстве векторы реакции R_i ($i = 1, \dots, k$), включающие в себя нормальные составляющие и силы трения, а также ускорения этих точек a_i , а затем, исходя из основных теорем динамики и заданной кинематики системы, составить уравнения

$$(a_1, \dots, a_k) = \Lambda(R_1, \dots, R_k) + (b_1, \dots, b_k), \quad (4.11)$$

где элементы квадратной матрицы Λ размерности $3k$ и вектора b не зависят от реакций или ускорений. Решение системы (1.2) с трением покоя (2.1) (в отсутствие контактов скольжения) существует, если матрица Λ положительна [3]. Заметим, что в случае единственного контакта это условие всегда выполнено, так же как и в случае нескольких независимых контактов, но не при наличии зависимых контактов.

Более общий результат можно получить, используя теорию вариационных неравенств.



Теорема 13. Если выполнено одно из следующих двух условий:

1. из равенства $T + N = 0$ следует, что $T = 0$ и $N = 0$;
2. множество возможных значений $\{T + N\}$ содержит некоторую окрестность начала координат, причем в формуле (4.1) $V = 0$,

то неравенство (4.1) с трением покоя разрешимо.

Доказательство. По теореме 11,

$$T = \arg \min (F + N + T)_1^2, \tag{4.12}$$

где минимум ищется на множестве (2.1). В силу линейности формул (2.1), при одновременном умножении F и N на множитель $C > 0$ вектор T в выражении (4.12) также умножается на C . Пусть $\rho \gg 1$, тогда

$$T_\rho = \arg \min (F + N\rho + T)_1^2 = \rho \arg \min \left(\frac{F + T}{\rho} + N \right)_1^2,$$

откуда

$$\bar{T} = \frac{T_\rho}{\rho} = \arg \min \left(\frac{F}{\rho} + \bar{T} + N \right)_1^2. \tag{4.13}$$

Поскольку множество допустимых значений \bar{T} описывается неравенством (2.1), то для любого $\lambda \in (0, 1)$ вектор $\lambda\bar{T}$ также будет допустимым, причем для условия минимальности (4.13) необходимо следующее соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{F}{\rho} + \lambda\bar{T} + N \right)_1^2 = 2 \left(\frac{F}{\rho} + \bar{T} + N, \bar{T} \right)_1 \leq 0.$$

Отсюда следует

$$(\bar{F} + \bar{T} + N, \bar{F} + N), \quad \bar{F} = F/\rho. \tag{4.14}$$

Допустим, что выполнено первое условие теоремы. Тогда для достаточно больших значений ρ выражение (4.14) для всех $\|N\|_1 = 1$ ограничено снизу некоторым числом $\eta > 0$, следовательно,

$$(F + T_\rho + N\rho, F + N\rho)_1 \geq \eta\rho^2.$$

Очевидно, в данном неравенстве квадратичный по ρ рост левой части обусловлен слагаемыми T_ρ и $N\rho$. Поэтому величину F можно отбросить, несколько уменьшив правую часть; к примеру, для достаточно больших ρ имеем

$$(T_\rho + N\rho, N\rho)_1 \geq \eta\rho^2/2. \tag{4.15}$$

Из неравенства (4.15) сразу следует условие коэрцитивности (4.2) для любого $x^0 \in K$.

При выполнении второго условия теоремы в выражении (4.13) для достаточно больших ρ минимизируемая неотрицательная функция может принимать нулевое значение. В этом случае $w = 0$, то есть система покоится. Поскольку $V = 0$, то и $\gamma = 0$, то есть состояние покоя допускается связями (1.4). Теорема доказана.

Заметим, что это условие выполнено, если наложенные связи стационарны, причем в рассматриваемый момент система покоится, то есть $\dot{q} = 0$. Следующий пример показывает необходимость условий данной теоремы.



ПРИМЕР 6. Рассмотрим тяжелый однородный стержень, опирающийся на шероховатые стенку и пол («лестница»). Здесь результаты [3] неприменимы, поскольку матрица Λ в формуле (4.11) имеет нулевое подпространство, что соответствует реакциям в точках контакта, направленным вдоль стержня навстречу друг другу. Тем не менее, можно использовать теоремы 12 и 13. Первое условие теоремы 13 выполнено, если хотя бы одна из реакций не может быть направлена вдоль стержня, то есть коэффициенты трения (или один из них) достаточно малы. Для горизонтальной опоры это требование равносильно выполнению неравенства (4.10) а для вертикальной стенки в этом неравенстве достаточно поменять местами параметры a и h , а также изменить коэффициент трения о пол μ на коэффициент трения о стенку μ' :

$$1 + h^2 > \mu'|a|h. \quad (4.16)$$

Выполнение хотя бы одного из неравенств (4.10) или (4.16) гарантирует существование решений для любых внешних сил в случаях неподвижных и подвижных стенок. Если оба неравенства (4.10) и (4.16) имеют противоположный смысл (второе условие теоремы 13), то стержень может оставаться в равновесии при любых внешних силах при условии, что стенки неподвижны, то есть $V = 0$. Если $V \neq 0$, система (1.2) может быть несовместной. В частности, если внешние силы исчерпываются силой тяжести, вертикальная стенка неподвижна, а пол имеет в данный момент ускорение, направленное вверх, то стержень не может ни остаться в равновесии, ни скользить по одной из опор (см. пример 5).

Выведем условия существования и единственности в данном примере из теоремы 12. Будем считать, что стержень располагается правее стенки, тогда угол q_3 тупой и $a < 0$. В соответствии с формулой Эйлера, нормальная и касательная составляющие скорости точки контакта со стенкой равны следующим выражениям:

$$(\dot{q}, n_2) = \dot{q}_1 - 2h\dot{q}_3, \quad (\dot{q}, t_2) = \dot{q}_2 + 2a\dot{q}_3.$$

Следовательно,

$$n_2 = (1, 0, -2h), \quad t_2 = (0, 1, 2a).$$

Расчеты по формулам (4.9) приводят к таким результатам:

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= 1 + a^2 - \bar{\mu}ah, & \omega_{12} &= ah + \bar{\mu}(1 - h^2), \\ \omega_{21} &= ah + \bar{\mu}'(1 - a^2), & \omega_{22} &= 1 + h^2 - \bar{\mu}'ah. \end{aligned}$$

Условия теоремы 12 сводятся к неравенствам (4.10), (4.16), а также к соотношению

$$(\omega_{12} + \omega_{21})^2 < 4\omega_{11}\omega_{22}. \quad (4.17)$$

В частности, если стенка гладкая ($\mu' = 0$), то неравенство (4.17) принимает вид

$$(2ah + \bar{\mu}(1 - h^2))^2 < (1 + h^2)(1 + a^2 - \bar{\mu}ah),$$

то есть условия однозначной разрешимости более жесткие по сравнению с примером 5, где стенка отсутствует.

Список литературы

- [1] Пожарицкий Г. К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ, 1961, т. 25, № 4, с. 391–406.



- [2] Матросов В. М., Финогенко И. А. О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // ПММ, 1994, т. 58, № 6, с. 3–13.
- [3] Pang J.-S., Trinkle J. C. Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction // Math. Program. Ser. A, 1996, vol. 73, no. 2, pp. 199–226.
- [4] Иванов А. П. Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением // ПММ, 2008, т. 72, № 4, с. 531–546.
- [5] Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с. [Kinderlehrer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. (Pure Appl. Math., vol. 88.) New York: Academic Press, 1980. 313 pp.]
- [6] Румянцев В. В. О принципах Гаусса и Четаева для систем с неидеальными связями // Теорет. и прикл. механ., 1974, т. 5, № 1, с. 9–14.
- [7] Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. 316 с. [Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895. 111 pp.]
- [8] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 469 с. [Rockafellar R. T. Convex analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. 451 pp.]
- [9] Pfeiffer F., Glocker Ch. Multibody dynamics with unilateral contacts. New York: Wiley, 1996. 317 pp.
- [10] Жуковский Н. Е. Условия равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Собр. соч.: Т. 1 / Н. Е. Жуковский. Москва: Гостехиздат, 1948. С. 339–354.
- [11] Черноусько Ф. Л., Смышляев А. С. Условия равновесия стержня на шероховатой плоскости // ПММ, 2002, т. 66, № 2, с. 177–182.
- [12] Козлов В. В. Принцип Гаусса и реализация связей // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 281–285.
- [13] Иванов А. П. Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 479–498.
- [14] Иванов А. П. Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 231–247.

On the variational formulation of dynamics of systems with friction

Alexander P. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology
Insttitutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700, Russia
apivanov@orc.ru

We discuss the basic problem of dynamics of mechanical systems with constraints-finding acceleration as a function of the phase variables. It is shown that in the case of Coulomb friction, this problem is equivalent to solving a variational inequality. The general conditions for the existence and uniqueness of solutions are obtained. A number of examples is considered.

For systems with ideal constraints discussed problem has been solved by Lagrange in his “Analytical Dynamics” (1788), which became a turning point in the mathematization of mechanics. In 1829, Gauss gave his principle, which allows to obtain the solution as the minimum of a quadratic function of acceleration, called “constraint”. In 1872 Jellett gave examples of non-uniqueness of solutions in systems with static friction, and in 1895 Painlevé showed that in the presence of friction, together with the non-uniqueness of solutions is possible. Such situations were a serious obstacle to the development of theories, mathematical models and practical use of systems with dry friction. An unexpected and beautiful promotion was work by Pozharitskii, where the author extended the principle of Gauss on the special case where the normal reaction can be determined from the dynamic equations regardless of the values of the coefficients of

friction. However, for systems with Coulomb friction, where the normal reaction is a priori unknown, there are still only partial results on the existence and uniqueness of solutions. The approach proposed here is based on a combination of the Gauss principle in the form of reactions with the representation of the nonlinear algebraic system of equations for the normal reactions in the form of a variational inequality. The theory of such inequalities includes the results of existence and uniqueness, as well as the developed methods of solution.

MSC 2010: 70E55

Keywords: principle of least constraint, dry friction, Painlevé paradoxes

Received June 26, 2013, accepted July 9, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 479–498 (Russian)