



УДК: 531.31

MSC 2010: 37J60, 70E18

## Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом

Т. Б. Иванова, Е. Н. Пивоварова

В работе исследуется возможность управления движением шара с маятниковым механизмом в неголономной постановке при помощи гейтов — элементарных движений, таких как разгон и торможение при движении по прямой, поворот на заданный угол и их сопряжение. Также рассмотрено управляемое движение системы вдоль прямой с постоянным ускорением. Для данной задачи приведен алгоритм вычисления управляющих моментов сил и показано, что получаемая при этом приведенная система обладает первым интегралом движения.

Ключевые слова: неголономная связь, управление, сферическая оболочка, интеграл движения

---

Получено 5 августа 2013 года

После доработки 21 октября 2013 года

---

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2012–2014 годы, № 1.1248.2011 «Неголономные динамические системы и проблемы управления», № 1.7734.2013 «Разработка неголономных мобильных систем», ФЦП «Научные и научнопедагогические кадры инновационной России», соглашение № 14.В37.21.1935 «Топологические методы в механике и гидродинамике». Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1, грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук МД-2324.2013.1.

---

Иванова Татьяна Борисовна

[tbesp@rcd.ru](mailto:tbesp@rcd.ru)

Пивоварова Елена Николаевна

[l.n.pivovarova@gmail.com](mailto:l.n.pivovarova@gmail.com)

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1



## Содержание

Введение . . . . .	508
1. Уравнения движения . . . . .	509
2. Управление при помощи гейтов и их сопряжения . . . . .	511
2.1. Разгон по прямой . . . . .	512
2.2. Движение с изменением направления . . . . .	514
3. Движение при фиксированных параметрах . . . . .	517

## Введение

Исследованию динамики и управления таких средств передвижения, как робот-колесо, робот-шар, передвигающихся за счет изменения положения центра масс, посвящено значительное количество работ последнего десятилетия (см., например, [1, 6, 7, 10–14]). Также активно изучается возможность управления данными системами и при помощи других внутренних механизмов, например роторов [3, 4]. Интерес к таким системам обусловлен наличием некоторых преимуществ в маневренности по сравнению с колесными экипажами. Подробный обзор литературы по сферическим роботам с различными механизмами передвижения, а также их описание и области применения приведены в [9, 13, 14].

Движение сферических роботов, передвигающихся за счет колебаний маятника, изучается в работах [1, 5, 7, 8, 11–14]. В частности, в работе [13] рассмотрено управление при движении маятникового сфероробота по наклонной плоскости и найден максимальный угол наклона плоскости, на который может подняться аппарат (то же самое для одноколесного робота рассматривается в [7]). В [14] рассмотрен вопрос преодоления препятствия и найдена максимальная высота, которую может преодолеть такой робот. В [11] рассматривается управление шаром при движении по прямой и по окружности для разных типов управляющих устройств (регуляторов).

В работе [1] рассматриваются вопросы управления сферическим роботом с маятниковым приводом в случае проскальзывания в точке контакта и в неголономной постановке. Основное внимание уделено определению алгоритма дополнительного управления для приближения к заданной траектории из произвольной точки в случае вырождения матрицы, определяющей управление. Тем не менее, исследование [1] приводит к физически странному заключению о том, что введение малого параметра может привести к управляемости данной системой, тогда как обращение этого параметра в нуль соответствует отсутствию управляемости, что ставит под сомнение корректность полученных результатов.

Данная работа является продолжением исследования движения сферической оболочки, катящейся без проскальзывания по горизонтальной плоскости, с закрепленным в ее центре волчком Лагранжа [5, 8]. Ранее в работе [5] были получены уравнения движения для свободной системы (уравнения движения для системы внутри катящегося шара также получены в [2]), приведены все необходимые первые интегралы и инвариантная мера, указано сведение к квадратурам. В [8] было рассмотрено *свободное* движение шара с волчком Лагранжа, проанализирована устойчивость периодических решений и построены траектории точки контакта.

В работе изучается *управляемое* движение шара с маятником. Особое внимание уделяется рассмотрению управления шаром при помощи гейтов (простейших движений — таких, как разгон до определенной скорости и остановка по прямой и поворот на заданный

угол) и их сопряжения за одно колебание маятника, приводятся конкретные примеры таких движений. В последней части работы рассмотрено управляемое движение вдоль прямой с фиксированными параметрами по заранее заданному закону движения шара, указаны недостатки такого подхода и на примере рассмотрен алгоритм вычисления управляющих моментов сил.

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим сферическую оболочку (рис. 1) относительно неподвижной системы координат (ось  $Oz$  направлена вертикально вниз). Обозначим через  $G_s$  центр масс оболочки, а через  $G_t$  — центр масс волчка, расстояние между ними  $R_t = |G_s G_t|$ . Вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль оси симметрии волчка (здесь и далее векторы будем обозначать полужирным курсивом).

Предполагая, что в системе главных осей волчка его тензор инерции имеет вид  $\hat{\mathbf{i}} = \text{diag}(i, i, i + j)$ , запишем кинетическую энергию системы в форме [5, 8]

$$T = \frac{1}{2}(M \mathbf{V}^2 + I \Omega^2) + \frac{1}{2}(m \mathbf{v}^2 + i \omega^2 + j(\omega, \mathbf{n})^2),$$

где  $\mathbf{V}, \Omega$  — скорость центра и угловая скорость оболочки,  $M, I$  — ее масса и момент инерции,  $\mathbf{v}, \omega$  — скорость центра масс и угловая скорость волчка,  $m, i, j$  — его масса и компоненты тензора инерции.

В данной работе будем исследовать управляемое движение системы. Управляющий момент может быть создан двигателем, который установлен в точке крепления маятника к шару, приводит в движение маятник и, соответственно, сам шар. Обозначим через  $\mathbf{Q}$  момент силы, создаваемый двигателем.

Тогда изменение углового момента относительно точки  $G_s$  и импульса оболочки можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \Omega} = I \dot{\Omega} = R_o \mathbf{k} \times \mathbf{N}_o - \mathbf{Q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} = M \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{N}_o + \mathbf{N}_t + M g \mathbf{k}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{N}_o, \mathbf{N}_t$  — силы реакции, действующие на оболочку в точке контакта  $Q_o$  и точке крепления волчка  $G_s$ . Для волчка относительно его центра масс имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = i \dot{\omega} + j(\omega, \mathbf{n}) \dot{\mathbf{n}} = R_t \mathbf{n} \times \mathbf{N}_t + \mathbf{Q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = m \dot{\mathbf{v}} = m g \mathbf{k} - \mathbf{N}_t. \quad (1.2)$$

Скорость центра масс волчка определяется соотношением

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + R_t \omega \times \mathbf{n} = R_o \mathbf{k} \times \Omega + R_t \omega \times \mathbf{n};$$

скорость центра оболочки  $\mathbf{V}$  связана с угловой скоростью оболочки  $\Omega$  условием отсутствия проскальзывания в точке контакта  $Q_o$ :

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}_s = R_o \mathbf{k} \times \Omega, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{r}_s$  — радиус-вектор точки контакта.

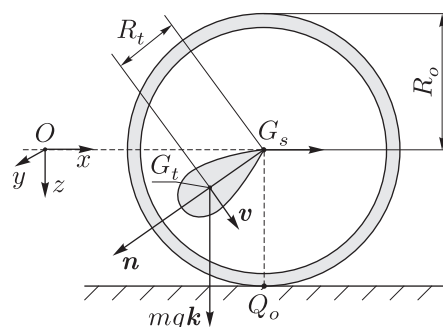


Рис. 1. Сферическая оболочка с закрепленным в ее центре осесимметричным маятником.

Эволюцию вектора  $\mathbf{n}$  можно найти из уравнения

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}.$$

Исключая силы реакции  $\mathbf{N}_o, \mathbf{N}_t$  из уравнений (1.1), (1.2), получаем уравнения управляемого движения сферической оболочки с осесимметричным волчком, закрепленным в геометрическом центре оболочки:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + mR_o^2\mathbf{k} \times (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{k}) - mR_oR_t\mathbf{k} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}) &= mR_oR_t\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) - \mathbf{Q}, \\ i\dot{\boldsymbol{\omega}} + mR_t^2\mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}) - mR_oR_t\mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{k}) &= \\ &= -j(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - mR_t^2\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) + mgR_t\mathbf{n} \times \mathbf{k} + \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{J} = \text{diag}(I + MR_o^2, I + MR_o^2, I)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$ .

Дифференцируя уравнение (1.3) по времени, получим выражение для  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{R_o}\dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{k} = \frac{1}{R_o}\mathbf{a} \times \mathbf{k}, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{a}$  — ускорение точки контакта.

Нашей задачей является определение такого управляющего момента  $\mathbf{Q}$ , чтобы точка контакта (соответствующая проекции центра шара) двигалась по заданному закону  $\mathbf{r}_s(t) = (x(t), y(t), 0)^T$ . При этом заданными функциями являются также скорость центра масс  $\mathbf{V}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0)^T$  и его ускорение  $\mathbf{a}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), 0)^T$ .

Задавая закон движения точки контакта по плоскости  $\mathbf{r}_s(t)$  из системы уравнений (1.4), (1.5), получим систему девяти уравнений для проекций векторов  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Q}$ , которую можно представить в виде

$$\mathbf{F}\mathbf{y} = \mathbf{A}, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{y} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{Q})^T$ ,  $\mathbf{F}$  — матрица, элементы которой зависят от  $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}$ , а  $\mathbf{A}$  — вектор-функция, зависящая от  $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ .

Для того чтобы система (1.6) имела решение (чтобы было возможно управляемое движение), необходимо существование обратной матрицы  $\mathbf{F}^{-1}$ , то есть выполнение условия  $\det \mathbf{F} \neq 0$ , из которого следует (см. также [1]) необходимость выполнения условия

$$i + mR_t^2 > mR_oR_t. \quad (1.7)$$

Условие (1.7) можно удовлетворить, выбирая соответствующим образом геометрические характеристики системы. Для определенности выберем в качестве маятника тонкий диск, подвешенный на невесомом стержне, параметры которого удовлетворяют условию (1.7): радиус диска  $R_d = 0.92R_o$ , длина стержня  $R_t = 0.25R_o$ . Отметим, что данная система аналогична тележке, катящейся без трения по внутренней поверхности сферической оболочки.

Таким образом, для определения управляющего момента  $\mathbf{Q}(t)$  необходимо решить систему (1.6) дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Однако система не сможет начать новый маневр (например, для смены направления движения при объезде препятствия), если задан только закон движения  $\mathbf{r}_s(t)$ . Кроме того, необходимо, чтобы шар остановился в конечной точке траектории, то есть необходимо, чтобы в конечный момент времени маятник оказался в нижнем положении, а скорость и ускорение были равны нулю. Как правило, заранее таким условиям сложно удовлетворить, так как это существенно усложняет определение функции  $\mathbf{r}_s(t)$  для всей траектории движения.

Другим подходом к управлению при маневрировании по общей траектории является использование гейтов. При таком подходе каждое движение должно совершаться *за одно колебание маятника*, что является необходимым условием для перехода к новому движению. При комбинировании таких движений можно получить любую сложную траекторию (что полезно, например, при объезде препятствий).

В данной работе мы рассмотрим оба подхода — управление при помощи гейтов (раздел 2) и управление при движении с фиксированными параметрами (такими, как ускорение, раздел 3).

Для удобства все уравнения движения будем записывать в безразмерном виде. Для этого за единицу массы примем массу маятника  $m$ , за единицу времени выберем величину  $t_0 = \sqrt{\frac{i+j}{mgR_t}}$ , за единицу измерения длины — величину  $x_0 = gt_0^2$ , где  $g$  — ускорение свободного падения, то есть в уравнениях сделаем замены:

$$\frac{t}{t_0} \rightarrow t, \quad \frac{x}{x_0} \rightarrow x, \quad \frac{M}{m} \rightarrow M, \quad \Omega t_0 \rightarrow \Omega, \quad \omega t_0 \rightarrow \omega, \quad \frac{Q t_0^2}{m x_0^2} \rightarrow Q.$$

Также для сокращения записи формул введем обозначения:

$$i_0 = i + R_t^2, \quad I_0 = I + (1 + M)R_o^2.$$

## 2. Управление при помощи гейтов и их сопряжения

Вектор  $\mathbf{n}$ , направленный вдоль оси симметрии маятника, представим в виде

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^T,$$

где  $\theta$  — угол отклонения маятника от вертикали,  $\varphi$  — угол между осью  $Ox$  и направлением колебания маятника (рис. 2).

При определении  $\mathbf{Q}(t)$  будем задавать угол  $\theta$  отклонения маятника от вертикали таким образом, чтобы в начале и в конце маневра маятник находился в нижнем положении:

$$\theta(t, \alpha, T) = \alpha \sin^2 \left( \frac{\pi t}{T} \right), \quad \theta(\alpha, T)|_{t=0} = \theta(\alpha, T)|_{t=T} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  — пока неизвестный параметр, определяющий амплитуду колебания,  $T$  — задаваемое время одного колебания маятника, равное времени одного маневра.

Для определения параметра  $\alpha$ , соответствующего заданному изменению скорости, необходимо из системы (1.4) с учетом (1.5) и (2.1) выразить ускорение  $a(t, \alpha, T)$ , на которое накладывается дополнительное условие:

$$\Delta V(\alpha, T) = \int_0^T a(t, \alpha, T) dt. \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2) при различных значениях параметра  $\alpha$  и периода колебаний  $T$ , получим зависимость  $\Delta V(\alpha, T)$  (поверхность второго порядка), из которой, выбрав необходимую скорость и время совершения маневра  $T$ , находим параметр  $\alpha$ .

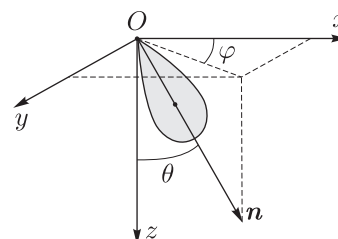


Рис. 2. Определение углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

Далее, зная  $\alpha$ , можно в явном виде определить ускорение  $a(t, \alpha, T)$  и из уравнений (1.4) выразить управляющие моменты.

Рассмотрим описанный алгоритм в конкретных случаях: разгон шара до заданной скорости при движении по прямой и поворот *за одно колебание маятника*.

## 2.1. Разгон по прямой

Направим ось  $Ox$  вдоль направления движения. Очевидно, что при движении по прямой маятник будет совершать колебания в одной плоскости (в данном случае в плоскости  $Oxz$ ), следовательно, вектор  $\mathbf{n}$ , направленный вдоль оси симметрии маятника, можно записать в виде

$$\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T,$$

где  $\theta$  — угол отклонения маятника от вертикального положения, задаваемый выражением (2.1).

Из девяти уравнений движения (1.4) нетривиальных останется только три:

$$\begin{aligned} I_0 \dot{\Omega}_2 - R_o R_t (\dot{\omega}_2 \cos \theta - \omega_2^2 \sin \theta) + Q_2 &= 0, \\ i_0 \dot{\omega}_2 - R_o R_t \dot{\Omega}_2 \cos \theta + R_t \sin \theta - Q_2 &= 0, \\ \dot{\theta} &= \omega_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Значение  $\dot{\Omega}_2$  определяется из (1.5):

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{a(t)}{R_o}, \quad \dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_3 = 0. \quad (2.4)$$

При подстановке (2.4) в (2.3) получим выражение для ускорения шара в виде

$$a(t, \alpha, T) = R_o \frac{\ddot{\theta}(R_o R_t \cos \theta - i_0) + R_o R_t \dot{\theta}^2 \sin \theta - R_t \sin \theta}{I_0 - R_o R_t \cos \theta}, \quad (2.5)$$

где  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$  являются явными функциями от времени и параметров  $\alpha$  и  $T$ , определяемыми из (2.1).

Численно интегрируя (2.2), с учетом (2.5) получим поверхность, изображенную на рисунке 3а. Данная поверхность  $\Delta V(\alpha, T)$  антисимметрична относительно плоскости  $\alpha = 0$ , так как функция  $a(t, \alpha, T)$  антисимметрична относительно замены  $\alpha \rightarrow -\alpha$  (это легко показать, подставив в (2.5) функцию  $\theta(t, \alpha_1, T)$  в явном виде (2.1)).

Кроме того, при  $T \rightarrow 0$  имеем  $\Delta V_{\max} \rightarrow \infty$ , то есть чем быстрее происходит колебание маятника, тем больше увеличивается скорость.

На рисунке 3б представлены сечения данной поверхности при различных значениях  $T$ . Из графиков видно, что заданным  $\Delta V$  и  $T$  соответствует как минимум два значения  $\alpha$ : при  $\alpha = \alpha_1$  маятник совершает колебание на меньший угол, чем при  $\alpha = \alpha_2$  (из-за этого при  $\alpha = \alpha_2$  скорость меняется немонотонно).

Выбрав конкретное значение  $\alpha$ , например  $\alpha_1$ , подставляя (2.5) в уравнения движения (2.3) и численно интегрируя их, получим управляющие моменты:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_3 &= 0, \\ Q_2 &= \frac{a(t, \alpha, T)}{R_o} I_0 + R_o R_t (\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2). \end{aligned}$$

Таким образом, для разгона по прямой необходимо создать управляющий момент, перпендикулярный направлению движения и плоскости колебания маятника.

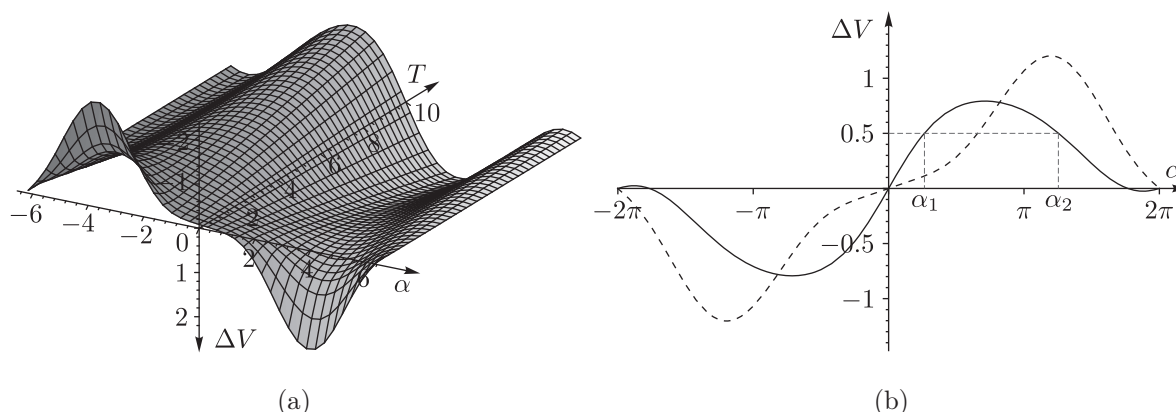


Рис. 3. (a) Поверхность  $\Delta V(\alpha, T)$ . (b) Сечение поверхности  $\Delta V(\alpha, T)$  плоскостями  $T = 5$  (сплошная линия) и  $T = 1$  (пунктирная линия).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим разгон шара из состояния покоя до скорости  $V_1 = 0.5$  за время  $T = 5$ . Такому движению соответствует значение параметра  $\alpha = 0.83$  (см. рис. 3b). Так как шар движется из состояния покоя и маятник находится в нижнем положении, начальные условия имеют вид

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{r} = (0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{V} = (0, 0, 0)^T.$$

Подставив найденное значение  $\alpha$  в уравнения движения (2.3) и численно интегрируя их (с указанными начальными условиями), получим соответствующее управление  $\mathbf{Q} = (0, Q_2, 0)^T$  для такого разгона (рис. 4).

Ниже представлены графики зависимости ненулевых компонент вектора  $\mathbf{n}$ , скорости  $\mathbf{V}$ , ускорения шара  $a(t)$  и угловой скорости маятника  $\boldsymbol{\omega}$  от времени (рис. 4). Из них видно, что за  $T = 5$  шар набрал скорость  $\Delta V = 0.5$ , двигаясь далее с постоянной скоростью. Маятник при этом совершил одно полное колебание и вернулся в начальное положение.

Чтобы шар остановился, необходимо совершить колебание маятника в обратном направлении с той же амплитудой и за тот же промежуток времени (то есть  $\alpha = -0.83$ ,  $T = 5$ ). В конце маневра маятник так же, как и при разгоне, окажется в нижнем вертикальном положении.

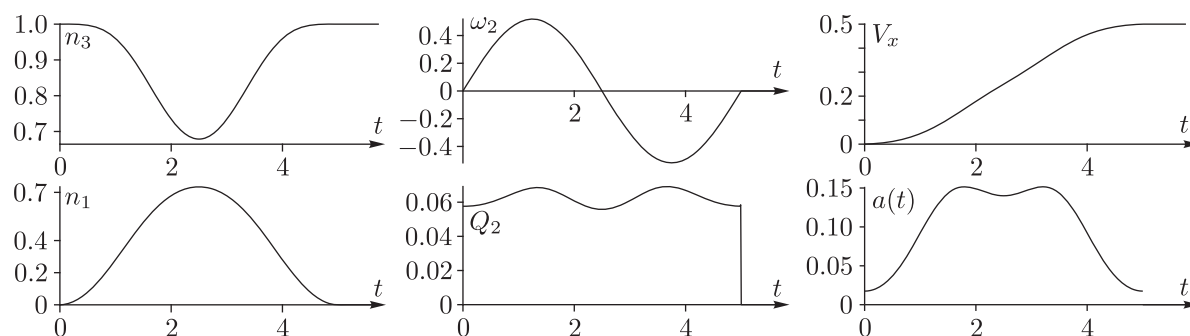


Рис. 4. Зависимость векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{Q}$ , а также скорости и ускорения шара от времени при разгоне за одно колебание маятника.

## 2.2. Движение с изменением направления

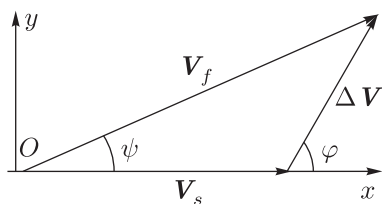


Рис. 5.  $V_s$  — начальная скорость движения,  $\Delta V$  — изменение скорости,  $V_f$  — скорость движения шара после завершения маневра.

Для простоты предположим, что шар в начальный момент времени двигался вдоль оси  $Ox$  с некоторой постоянной скоростью  $V_s$ . Рассмотрим такое движение, при котором маятник совершает одно колебание в произвольном заранее заданном направлении (под углом  $\varphi$  к направлению движения, см. рис. 2). При этом шар отклонится от первоначальной траектории на некоторый угол  $\psi$  (см. рис. 5). Вектор  $\mathbf{n}$ , направленный вдоль оси симметрии маятника, можно записать в виде

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^T,$$

где  $\theta$  — угол отклонения маятника от вертикали,  $\varphi$  — угол между начальным направлением движения шара и направлением колебания маятника.

Уравнения движения (1.4) в проекциях на оси неподвижной системы координат запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 I_0 - R_o R_t (\dot{\omega}_1 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta \dot{\theta}) + Q_1 &= 0, \\ \dot{\Omega}_2 I_0 - R_o R_t (\dot{\omega}_2 \cos \theta - \omega_2 \sin \theta \dot{\theta}) + Q_2 &= 0, \\ i_0 \dot{\omega}_1 - R_o R_t \dot{\Omega}_1 \cos \theta - R_t \sin \theta \sin \varphi - Q_1 &= 0, \\ i_0 \dot{\omega}_2 - R_o R_t \dot{\Omega}_2 \cos \theta + R_t \sin \theta \cos \varphi - Q_2 &= 0, \\ \dot{\theta} &= \omega_2 \cos \varphi - \omega_1 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Производные угловых скоростей шара будут иметь вид

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{\dot{V}_2}{R_o} = \frac{a_2(t)}{R_o}, \quad \dot{\Omega}_2 = -\frac{\dot{V}_1}{R_o} = -\frac{a_1(t)}{R_o}, \quad \dot{\Omega}_3 = 0, \quad (2.6)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — это проекции скорости на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Ускорения  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  можно представить в виде

$$a_1(t) = a(t, \alpha, T) \cos \varphi, \quad a_2(t) = a(t, \alpha, T) \sin \varphi, \quad (2.7)$$

где  $a(t, \alpha, T)$  определяется выражением (2.5), а  $\theta$  по-прежнему является функцией времени и параметров  $\alpha, T$  и определяется выражением (2.1).

Дифференцируя уравнение (1.3) по времени, с учетом (2.6) и (2.7) получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} = R_o \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} = R_o \left( -\dot{\Omega}_2, \dot{\Omega}_1, 0 \right)^T = a(t) \mathbf{s},$$

где  $\mathbf{s} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T = \frac{\Delta V}{\Delta V}$  — постоянный для одного маневра единичный вектор, вдоль которого изменяется скорость (см. рис. 5). Так как  $\varphi$  является углом между начальным направлением движения и направлением колебания маятника, справедливо следующее

**Предложение 1.** *Скорость шара изменяется в направлении колебания маятника.*



Если угол  $\varphi = 0$ , мы получим разгон шара по прямой, рассмотренный в разделе 2.1.

Рассмотрим другой частный случай — колебание под углом  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  к первоначальному направлению движения. В этом случае вектор, направленный вдоль оси симметрии маятника, можно записать в виде

$$\mathbf{n} = (0, \sin \theta, \cos \theta)^T.$$

Уравнения движения (1.4) перепишем в виде

$$\begin{aligned} I_0 \dot{\Omega}_1 - R_o R_t (\dot{\omega}_1 \cos \theta + \omega_1^2 \sin \theta) + Q_1 &= 0, \\ i_0 \dot{\omega}_1 - R_o R_t \dot{\Omega}_1 \cos \theta - R_t \sin \theta - Q_1 &= 0, \\ \dot{\theta} &= -\omega_1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Как и в предыдущем случае, угол отклонения маятника от вертикали зададим в виде (2.1). Производные угловой скорости шара будут иметь вид

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{\dot{V}_2}{R_o} = \frac{a(t)}{R_o}, \quad \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0. \tag{2.9}$$

Выражение для ускорения шара  $a(t, \alpha, T)$  будет иметь такой же вид, как при разгоне шара по прямой (2.5), а управления запишутся в форме

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{a(t, \alpha, T)}{R_o} I_0 - R_o R_t (\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2), \\ Q_2 &= Q_3 = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Таким образом, как и в случае разгона по прямой, для поворота на заданный угол необходимо создать управляющий момент, перпендикулярный плоскости колебания маятника и, соответственно, направлению вектора изменения скорости.

Далее, дифференцируя уравнение (1.3) по времени, с учетом (2.5) и (2.9) получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} = R_o \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} = R_o \left( -\dot{\Omega}_2, \dot{\Omega}_1, 0 \right)^T = (0, a(t, \alpha, T), 0)^T, \tag{2.11}$$

то есть скорость меняется только в направлении оси  $Oy$  — в направлении колебания маятника.

Нашей задачей является определение такого значения параметра  $\alpha$ , при котором произошел бы поворот на заданный угол  $\psi$ . Для этого проинтегрируем уравнение (2.11) в пределах от 0 до  $T$  и найдем проекции скорости  $V_1, V_2$  в конечный момент времени, которые связаны с углом поворота в абсолютной системе координат следующим соотношением (см. рис. 6):

$$\psi = \text{arctg} \frac{V_2}{V_1}.$$

Изменяя параметры  $\alpha$  и  $T$ , получим зависимость  $\psi(\alpha, T)$ , изображенную на рисунке 7а. Функция  $\psi(\alpha, T)$  также является антисимметричной относительно плоскости  $\alpha = 0$ , и при  $T \rightarrow 0$  имеем  $\psi_{\max} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

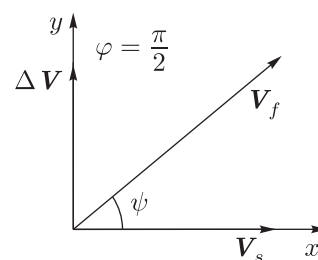


Рис. 6. Изменение скорости движения шара.

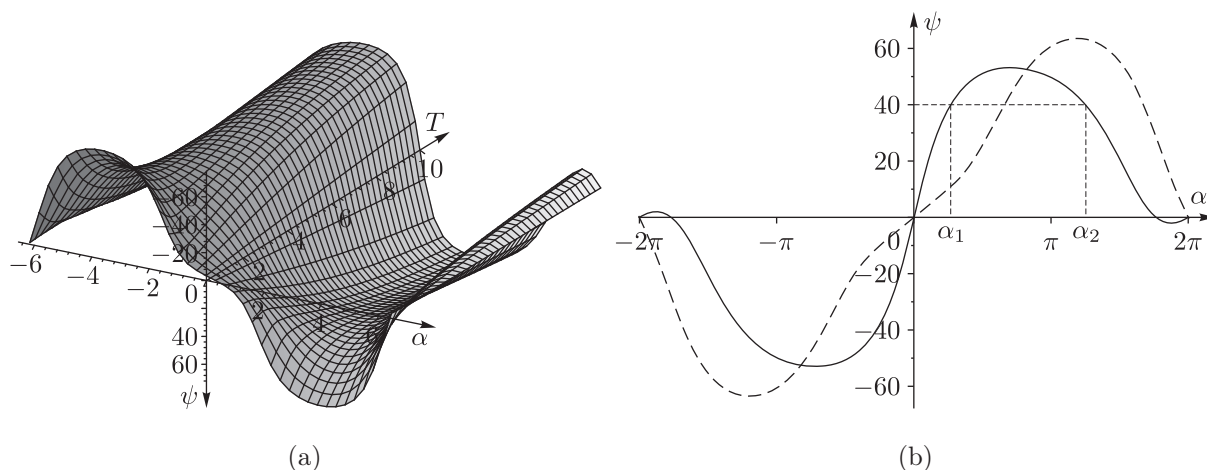


Рис. 7. (а) Поверхность  $\psi(\alpha, T)$ . (б) Сечение поверхности  $\psi(\alpha, T)$  плоскостями  $T = 5$  (сплошная линия) и  $T = 1$  (пунктирная линия).

На рисунке 7b представлены сечения данной поверхности при различных значениях  $T$ . Из графиков видно, что, как и в предыдущем случае, заданным  $\psi$  и  $T$  соответствует как минимум два значения  $\alpha$ .

Подставляя выбранное значение параметра  $\alpha$ , например  $\alpha_1$ , в уравнения движения (2.8) и численно интегрируя их с учетом (2.5), получим управления (2.10).

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим поворот шара на угол  $\psi = 40^\circ$  за время  $T = 5$  с начальными условиями следующего вида:

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{r} = (0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{V} = (V_s, 0, 0)^T,$$

где  $V_s$  — начальная скорость.

Выберем начальную скорость таким образом, чтобы изменение скорости  $\Delta V$  и параметр  $\alpha$  были такими же, как в предыдущем примере, то есть  $V_s = \Delta V \operatorname{ctg} \psi = 0.6$ .

Траектория такого движения представлена на рисунке 8.

Так как все параметры аналогичны предыдущему примеру, с точностью до замены  $n_1 \rightarrow n_2$ ,  $\omega_2 \rightarrow -\omega_1$ ,  $V_x \rightarrow V_y$ ,  $Q_2 \rightarrow -Q_1$ , в данном случае все функции будут иметь вид, представленный на рисунке 4.

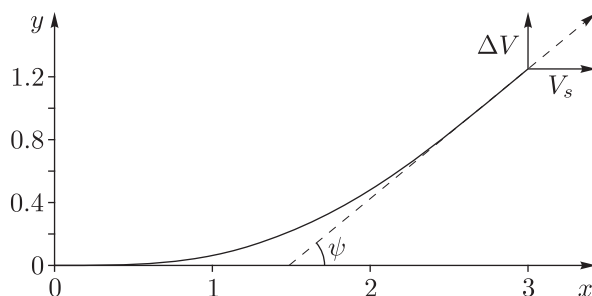


Рис. 8. Траектория движения шара при повороте на угол  $\psi = 40^\circ$ ,  $V_s = 0.6$ .

### 3. Движение при фиксированных параметрах

В данном разделе будет рассмотрено управление, которое задает движение с постоянным ускорением вдоль заданной прямой (в более общем случае — заданной кривой). Такое управление используется, например, в обычных транспортных средствах, то есть фактически определяется в системе отсчета, связанной с телом. В данном случае такой подход, как будет показано ниже, обладает некоторыми недостатками, обусловленными консервативностью возникающей системы.

Продemonстрируем на конкретном примере алгоритм определения такого управления. Для этого рассмотрим равноускоренное движение шара по прямой вдоль оси  $Ox$  по закону

$$x(t) = \frac{a_0 t^2}{2},$$

где  $a_0 = \text{const}$  — заданное ускорение шара.

Предположим, что шар катится без верчения, то есть  $\Omega_3 = 0$ . Аналогично (2.4), с учетом (1.3) получим

$$\dot{\Omega}_1(t) = 0, \quad \dot{\Omega}_2(t) = -\frac{a_0}{R_o},$$

то есть при разгоне вдоль оси  $Ox$  маятник совершает колебания только в плоскости  $Oxz$ , а следовательно, вектор  $\mathbf{n}$  имеет вид

$$\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T,$$

где  $\theta$  — угол отклонения маятника от вертикали, неизвестная функция от времени. Угловая скорость маятника имеет вид  $\omega_2 = \dot{\theta}$ .

Подставляя полученные выражения в уравнения движения, находим управляющие моменты, которые обеспечивают равноускоренное движение по прямой вдоль оси  $Ox$ :

$$Q_1 = Q_3 = 0,$$

$$Q_2 = \frac{a_0}{R_o} I_0 + R_o R_t (\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2),$$

и уравнение для определения зависимости угла  $\theta$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{a_0 I_0 - a_0 R_o R_t \cos \theta - R_o R_t (R_o \sin \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta)}{R_o (i_0 - R_o R_t \cos \theta)}. \quad (3.1)$$

Данная система, помимо геометрического интеграла ( $\mathbf{n}^2 = 1$ ), имеет еще один интеграл движения, квадратичный по угловой скорости:

$$C = -\frac{R_o}{2} (i_0 - R_o R_t \cos \theta)^2 \dot{\theta}^2 + R_o R_t \left( i_0 - \frac{R_o R_t}{2} \cos \theta \right) (\cos \theta - a_0 \sin \theta) +$$

$$+ a_0 \theta \left( I_0 i_0 + \frac{R_o^2 R_t^2}{2} \right) - a_0 R_o R_t I_0 \sin \theta,$$

который является аналогом интеграла обобщенной энергии в равноускоренной системе отсчета.

На рисунке 9 представлен фазовый портрет системы (3.1) на плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  при равноускоренном движении шара по прямой с ускорением  $a_0 = 0.1$ . При выбранных параметрах

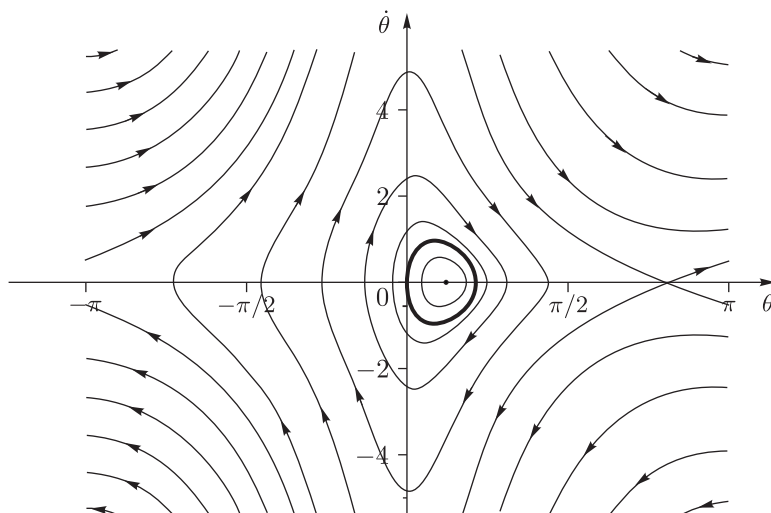


Рис. 9. Фазовый портрет системы при равноускоренном движении шара по прямой.

системы на фазовой плоскости имеется две неподвижные точки, одна из которых соответствует устойчивому положению равновесия типа центр (при  $\theta = 0.38$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ), другая — неустойчивая точка типа седло (при  $\theta = 2.56$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ).

Из рисунка 9 видно, что существует единственная траектория, соответствующая состоянию покоя в начальный момент времени (проходит через точку  $(0, 0)$ , жирная кривая). Периодическое движение по этой траектории обеспечивается периодическим управляющим моментом. На рисунке 10 показана зависимость векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{Q}$  от времени для начальных условий  $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ . Из графиков видно, что маятник совершает колебания в плоскости  $Oxz$ , а вектор управляющего момента меняется периодически и направлен вдоль оси  $Oy$ .

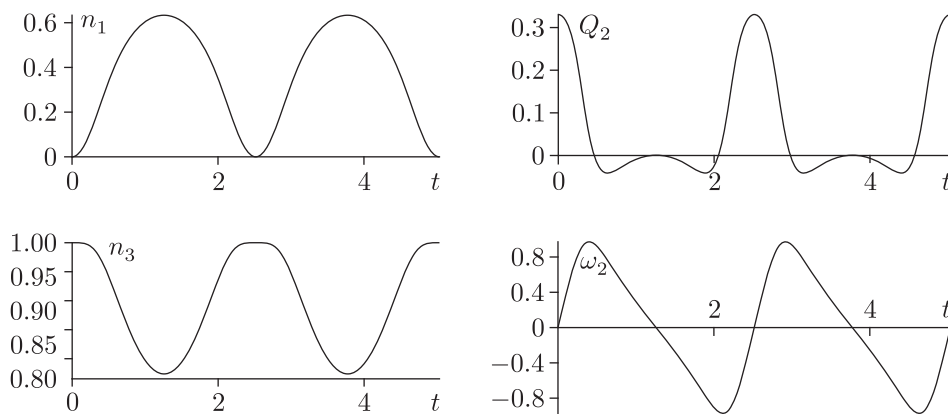


Рис. 10. Зависимость ненулевых компонент векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{Q}$  от времени при движении шара по прямой с постоянным ускорением  $a_0 = 0.1$  для начальных условий  $\theta = \dot{\theta} = 0$ .

Если в начальный момент времени задать угол отклонения, соответствующий устойчивой неподвижной точке, шар будет двигаться равноускоренно. При этом отклонение маятника на постоянный угол будет поддерживаться постоянным значением управляющего момента. Любым другим (произвольным) начальным условиям соответствуют замкнутые периодические траектории, для реализации которых нужно постоянно прилагать периоди-

ческое управление, что неудобно для пользователя (то есть движение с постоянным ускорением сложно поддерживать в ручном режиме).

Кроме того, существенным недостатком такого управления является сложность переключения на другой режим движения в произвольный момент времени (например, если скорость достигла заданного значения), так как маятник может не оказаться в нижнем положении.

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову, И. С. Мамаеву, А. А. Килину за обсуждения и полезные замечания.

## Список литературы

- [1] Баландин Д. В., Комаров М. А., Осипов Г. В. Управление движением сферического робота с маятниковым приводом // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2013, № 4, с. 150–163.
- [2] Болотин С. В., Попова Т. В. Об уравнениях движения системы внутри катящегося шара // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 51–58 [Bolotin S. V., Popova T. V. On the motion of a mechanical system inside a rolling ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 159–165].
- [3] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307 [Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272].
- [4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76 [Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158].
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Две неголономные интегрируемые связки твердых тел // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 559–568 [Borisov A. V., Mamaev I. S. Two non-holonomic integrable problems tracing back to Chaplygin // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 191–198].
- [6] Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. К теории управления моноциклом // ПММ, 2005, т. 69, № 4, с. 569–583.
- [7] Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2005, № 4, с. 165–173.
- [8] Пивоварова Е. Н., Иванова Т. Б. Исследование устойчивости периодических решений в задаче о качении шара с маятником // Вестн. УдГУ. Матем. Механ. Компьютер. науки, 2012, № 4, с. 146–155.
- [9] Chase R., Pandya A. A review of active mechanical driving principles of spherical robots // Robotics, 2012, vol. 1, no. 1, pp. 3–23.
- [10] Das T., Murkherjee R. Dynamic analysis of rectilinear motion of a self-propelling disk with unbalance masses // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 2001, vol. 68, pp. 58–66.
- [11] Kayacan E., Bayraktaroglu Z. Y., Saeys W. Modeling and control of a spherical rolling robot: A decoupled dynamics approach // Robotica, 2012, vol. 30, no. 12, pp. 671–680.
- [12] Michaud F., Caron S. Roball, the rolling robot // Auton. Robots, 2002, vol. 12, pp. 211–222.
- [13] Nagai M. Control system of a spherical robot: Master Thesis. Lulea University of Technology, 2008.
- [14] Schroll G. C. Dynamic model of a spherical robot from first principles: Master Thesis. Colorado State University, 2010.



## Dynamics and Control of a Spherical Robot with an Axisymmetric Pendulum Actuator

Tatyana B. Ivanova<sup>1</sup>, Elena N. Pivovarova<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1</sup>tbesp@rcd.ru, <sup>2</sup>l.n.pivovarova@gmail.com

This paper investigates the possibility of the motion control of a ball with a pendulum mechanism with non-holonomic constraints using gaits — the simplest motions such as acceleration and deceleration during the motion in a straight line, rotation through a given angle and their combination. Also, the controlled motion of the system along a straight line with a constant acceleration is considered. For this problem the algorithm for calculating the control torques is given and it is shown that the resulting reduced system has the first integral of motion.

MSC 2010: 37J60, 70E18

Keywords: non-holonomic constraint, control, spherical shell, integral of motion

Received August 5, 2013, accepted October 21, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 507–520 (Russian)