Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 3. С. 595–601.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

О двух случаях задачи n тел

Р. Леман-Филе

До сих пор строгое решение задачи трех тел возможно только в тех случаях, когда обе силы притяжения, действующие на каждую материальную точку, объединяются в одну результирующую силу, которая проходит через центр тяжести системы и пропорциональна расстоянию от него до соответствующей материальной точки, так что силы, действующие на три материальные точки, ведут себя как радиус-векторы, исходящие из центра тяжести. Если предположить, что в произвольный начальный момент времени имеет место такое состояние и что, кроме того, в тот же момент времени начальные скорости лежат в плоскости трех материальных точек, пропорциональны вышеупомянутым радиус-векторам и образуют с ними одинаковый угол, причем направление поворота тоже одинаково, то нетрудно доказать, что три материальные точки должны описывать вокруг центра тяжести подобные друг другу траектории, при условии, что вышеупомянутая особенность результирующих сил, имеющая место только в один определенный момент времени, сохраняется и во все последующие моменты. Однако именно в таком случае из-за подобия участков кривых, описываемых точками, все время повторяется конфигурация системы, подобная начальной, а значит, сохраняется и начальное свойство результирующих сил.

Эти простейшие соображения до сих пор позволили нам найти решение задачи трех тел только в двух случаях, которые описаны, например, в главе VI книги X «Небесной механики» Лапласа[1]. В этих случаях три материальные точки либо находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, то есть лежат в вершинах равностороннего треугольника, либо определенным образом расположены на одной прямой.

Оба случая допускают обобщение, первый — для четырех, а второй — для n материальных точек.

Пусть m_1, m_2, m_3, m_4 — это четыре материальные точки, $\Delta_{i,k}$ — расстояние между m_i и m_k, $\varphi(\Delta)$ — сила, с которой единичная масса действует на материальную точку, удален-

Lehmann-Filhéz R. Ueber zwei Fälle des Vielkörperproblems // Astronomische Nachrichten, 1891, vol. 127, no. 9, p. 137–143.

[1]Очень похожее представление Лагранжа («Essai sur le problème des trois corps», гл. II) не содержит такой ясной характеристики этих случаев, как у Лапласа.

ную на расстояние Δ. Тогда можно записать следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= m_2\frac{\varphi(\Delta_{1,2})}{\Delta_{1,2}}(x_2-x_1)+\\
&\qquad + m_3\frac{\varphi(\Delta_{1,3})}{\Delta_{1,3}}(x_3-x_1)+m_4\frac{\varphi(\Delta_{1,4})}{\Delta_{1,4}}(x_4-x_1),\\
\frac{d^2x_2}{dt^2} &= m_1\frac{\varphi(\Delta_{1,2})}{\Delta_{1,2}}(x_1-x_2)+\\
&\qquad + m_3\frac{\varphi(\Delta_{2,3})}{\Delta_{2,3}}(x_3-x_2)+m_4\frac{\varphi(\Delta_{2,4})}{\Delta_{2,4}}(x_4-x_2),\\
\frac{d^2x_3}{dt^2} &= m_1\frac{\varphi(\Delta_{1,3})}{\Delta_{1,3}}(x_1-x_3)+\\
&\qquad + m_2\frac{\varphi(\Delta_{2,3})}{\Delta_{2,3}}(x_2-x_3)+m_4\frac{\varphi(\Delta_{3,4})}{\Delta_{3,4}}(x_4-x_3),\\
\frac{d^2x_4}{dt^2} &= m_1\frac{\varphi(\Delta_{1,4})}{\Delta_{1,4}}(x_1-x_4)+\\
&\qquad + m_2\frac{\varphi(\Delta_{2,4})}{\Delta_{2,4}}(x_2-x_4)+m_3\frac{\varphi(\Delta_{3,4})}{\Delta_{3,4}}(x_3-x_4)
\end{aligned}$$

и аналогичные уравнения для $\dfrac{d^2y_1}{dt^2}$, $\dfrac{d^2z_1}{dt^2}$ и т. д.

Теперь положим

$$\Delta_{1,2}=\Delta_{1,3}=\Delta_{1,4}=\Delta_{2,3}=\Delta_{2,4}=\Delta_{3,4}=\Delta,$$

утверждая тем самым, что в какой-то определенный момент времени 4 точки образуют вершины правильного тетраэдра. Теперь, выбирая в качестве начала координат центр тяжести, мы записываем условия

$$\begin{aligned}
m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4&=0,\\
m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+m_4y_4&=0,\\
m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3+m_4z_4&=0,
\end{aligned}$$

с помощью которых вышеуказанные уравнения упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2}&=-(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}x_1,\\
\frac{d^2x_2}{dt^2}&=-(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}x_2,\\
\frac{d^2x_3}{dt^2}&=-(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}x_3,\\
\frac{d^2x_4}{dt^2}&=-(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}x_4,\\
\frac{d^2y_1}{dt^2}&=-(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}y_1,
\end{aligned}$$

и т. д.

В результате силы, действующие на m_1, m_2, m_3, m_4, будут иметь вид

$$(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\,r_1,$$
$$(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\,r_2,$$
$$(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\,r_3,$$
$$(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\,r_4.$$

Конфигурация системы в какой-то произвольно выбранный момент времени будет того же типа, который возникает из-за описанных выше свойств результирующих сил. Необходимо понять, как мы должны определять начальные скорости точек, чтобы по истечении некоторого времени эта конфигурация по-прежнему сохранялась, иначе говоря, чтобы точки снова образовывали правильный тетраэдр. Разумеется, это можно сделать бесконечным числом способов, однако мы должны, в соответствии с нашим предположением, ограничиться только теми скоростями, которые пропорциональны радиус-вектору, исходящему из центра тяжести, и образуют с ним один и тот же угол, так как только при этом условии вышеуказанные силы вынуждают точки двигаться по подобным друг другу кривым.

Теперь тетраэдр может перейти в подобный себе тетраэдр, расположенный таким же образом относительно центра тяжести; для этого мы сначала вытянем четыре вершины вдоль их радиус-векторов r_1, r_2, r_3, r_4 на расстояния, пропорциональные этим радиус-векторам, а затем придадим тетраэдру вращение относительно центра тяжести. Тогда суммарное перемещение вершины за бесконечно малый промежуток времени должно быть пропорционально радиус-вектору, причем это справедливо и для компонент, возникающих из-за вращения и перпендикулярных радиусу.

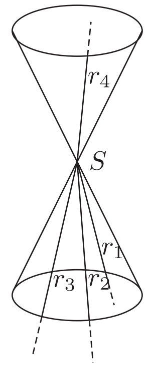
Теперь возникает вопрос, нельзя ли вращать тетраэдр вокруг оси, проходящей через некоторую внутреннюю точку S так, чтобы перемещения вершин были пропорциональны их расстояниям r_1, r_2, r_3, r_4 до точки S.

Нетрудно показать, что это невозможно.

Пусть радиусы образуют с осью вращения углы α_1, α_2, α_3, α_4, тогда смещения вершин пропорциональны величинам

$$r_1\sin\alpha_1,\quad r_2\sin\alpha_2,\quad r_3\sin\alpha_3,\quad r_4\sin\alpha_4;$$

тогда они могут вести себя так же, как величины r, только в том случае, когда эти радиусы образуют с осью вращения одинаковые углы.



Допустим, что так оно и есть. Поскольку мы считаем, что ось вращения проходит через точку S, эта ось обязательно должна пройти через два из четырех вогнутых трехгранных углов, имеющих общую вершину S и ребра r.

Сначала займемся одним из двух углов, через которые проходит ось. По нашему предположению углы между радиусами r и осью вращения равны, поэтому четыре радиус-вектора лежат на боковой поверхности прямого двойного конуса с окружностью в основании, вершина которого совпадает с точкой S, а ось — с осью вращения. При этом те три радиуса r, которые образуют ребра интересующего нас угла, назовем их r_1, r_2, r_3, лежат на одной из боковых поверхностей, и только r_4 — на другой.

Но в то же время данная ось проходит еще и через второй угол, ребра которого уже отличаются от r_1, r_2, r_3; одно из ребер в любом случае совпадает с r_4, а еще два — с предыдущими, допустим, r_1 и r_2. В результате ось вращения должна служить осью и второго прямого двойного конуса с окружностью в основании, вершина которого тоже совпадает с точкой S, причем на одной его боковой поверхности лежат r_1, r_2, r_4, и только радиус r_3 лежит на другой. Но тогда невозможно, чтобы ось этого нового двойного конуса совпадала с осью предыдущего. Таким образом, искомая ось вращения должна обладать такими свойствами, которые невозможны по построению. Поэтому тетраэдр не может вращаться вокруг внутренней точки S так, чтобы смещения его вершин были пропорциональны их расстояниям до точки S.

Итак, если в результате «растягивания» вершин, пропорционального радиусам r, тетраэдр должен перейти в подобный и аналогично расположенный относительно точки S тетраэдр, то это «растягивание» должно происходить только по радиус-векторам r_1, r_2, r_3, r_4, а именно, все вершины либо стремятся к точке S, либо удаляются от нее.

Теперь мы можем сформировать условие, которому должны удовлетворять начальные скорости точек m_1, m_2, m_3, m_4. В результате точки всегда будут описывать прямые линии, и хотя размеры тетраэдра будут постоянно изменяться, но каждая из его сторон все время будет занимать положение, параллельное начальному.

Теперь нетрудно по-настоящему проинтегрировать уравнения движения.

Пусть на сей раз координаты материальных точек отсчитываются не от центра тяжести S, а от любой другой точки. Обозначим координаты точки S через X, Y, Z. Тогда (Лаплас, «Небесная механика», книга I, § 15)

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{\sum m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)}{\sum m_i}-\frac{\sum m_im_k[(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2]}{(\sum m_i)^2}.$$

Если поместить произвольно взятое начало координат в материальную точку m_1, то

$$\begin{gathered}x_1=y_1=z_1=0,\quad X^2+Y^2+Z^2=r_1^2,\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2=x_3^2+y_3^2+z_3^2=x_4^2+y_4^2+z_4^2=\\ =(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2=\text{и т. д.}=\Delta^2,\end{gathered}$$

следовательно,

$$r_1^2=\frac{m_2+m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}\,\Delta^2-\frac{m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_4+m_3m_4}{(m_1+m_2+m_3+m_4)^2}\,\Delta^2,$$

откуда

$$\Delta=\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{\sqrt{m_2(m_2+m_3+m_4)+m_3(m_3+m_4)+m_4m_4}}\,r_1.$$

Тогда ускоряющая сила, действующая на точку m_1, равна

$$\begin{aligned}(m_1+m_2+m_3+m_4)\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\,r_1&=\\ =\sqrt{m_2(m_2+m_3+m_4)+m_3(m_3+m_4)+m_4m_4}&\cdot\\ \cdot\varphi\left[\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{\sqrt{m_2(m_2+m_3+m_4)+m_3(m_3+m_4)+m_4m_4}}\,r_1\right]&.\end{aligned}$$

Предположив, что у нас действует закон тяготения Ньютона

$$\varphi(\Delta) = \frac{k^2}{\Delta^2},$$

переписываем выражение для действующей силы в форме

$$\frac{k^2[m_2(m_2+m_3+m_4)+m_3(m_3+m_4)+m_4m_4]^{3/2}}{(m_1+m_2+m_3+m_4)^2}\cdot\frac{1}{r_1^2}.$$

Иначе говоря, точка m_1 пробегает свою прямолинейную траекторию так, как если бы ее притягивала масса

$$\frac{[m_2(m_2+m_3+m_4)+m_3(m_3+m_4)+m_4m_4]^{3/2}}{(m_1+m_2+m_3+m_4)^2},$$

помещенная в точку S.

Выражения для ускорений, действующих на другие материальные точки, получаются из найденного выше с помощью перестановки индексов. Впрочем, нам известно, что траектории, описываемые этими точками, подобны траектории точки m_1 с коэффициентом, равным отношению начальных радиус-векторов.

Тем самым задача об определении движения четырех материальных точек, на которые действуют силы взаимного притяжения, в случае, когда эти точки в некоторый момент времени образуют правильный тетраэдр и все приближаются к центру тяжести либо удаляются от него со скоростями, пропорциональными расстояниям от них до этого центра, полностью решена.

Второй случай задачи трех тел, для которого уже найдено строгое решение, а именно, когда m_1, m_2, m_3 определенным образом расположены на одной прямой, допускает обобщение не только для 4, но и для n материальных точек.

Примем за ось x положение данной прямой в какой-то определенный момент времени; пусть нумерация материальных точек в направлении возрастания абсцисс имеет вид m_1, m_2, $m_3, \ldots, m_n$, так что $x_i - x_k = \pm\Delta_{i,k} = \pm\Delta_{k,i}$, где знак плюс берется при $i > k$, а знак минус — при $i < k$. Тогда в общем случае имеем

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = \sum \pm m_i\varphi(\Delta_{i,k}),$$

где $\pm$ зависит от того, $i > k$ или $i < k$. Суммирование проводится по всем значениям i, кроме $i = k$.

Если теперь отсчитывать абсциссы от общего центра тяжести S системы, то мы будем предполагать, что

$$\frac{1}{x_1}\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{x_2}\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{1}{x_3}\frac{d^2x_3}{dt^2} = \ldots = -K,$$

и тогда в общем случае

$$-Kx_k = \sum \pm m_i\varphi(\Delta_{i,k}),$$

где $\pm$ зависит от того, $i > k$ или $i < k$.

Это определение согласуется с утверждением о том, что центр тяжести S служит началом координат; действительно, если каждое из вышеуказанных уравнений умножить на соответствующее m_k и сложить найденные произведения, то, с учетом знаков в выражении для суммы, мы получим

$$-K(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n) = 0,$$

то есть

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n = 0.$$

Система n уравнений

$$\begin{cases} -Kx_1 = & +m_2\varphi(\Delta_{1,2}) + m_3\varphi(\Delta_{1,3}) \quad + \ldots + m_n\varphi(\Delta_{1,n}) \\ -Kx_2 = -\, m_1\varphi(\Delta_{1,2}) & + m_3\varphi(\Delta_{2,3}) \quad + \ldots + m_n\varphi(\Delta_{2,n}) \\ -Kx_3 = -\, m_1\varphi(\Delta_{1,3}) \quad -m_2\varphi(\Delta_{2,3}) & \quad + \ldots + m_n\varphi(\Delta_{3,n}) \end{cases} \tag{A}$$

содержит $n+1$ неизвестных K, x_1, x_2, $x_3, \ldots$, x_n, так что одна из них, очевидно, должна оставаться произвольной. Если считать, что $\varphi(\Delta)$ пропорциональна некоторой степени расстояния Δ, как и происходит в природе, то уравнения станут однородными, и мы сможем определить с их помощью n неизвестных величин K, $\frac{x_1}{x_n}$, $\frac{x_2}{x_n}, \ldots$, $\frac{x_{n-1}}{x_n}$. Условие $m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = 0$ в расчет можно не принимать, так как оно тождественно выполняется в силу этих уравнений. Впрочем, этим условием можно заменить одно из уравнений. Возникает лишь один вопрос: будут ли найденные нами значения неизвестных действительны. То, что это на самом деле возможно, доказывается без труда; мы только укажем, как следует для этого рассуждать.

Допустим, мы убедились, что в случае n материальных точек уравнения (А) дают нам действительные значения неизвестных. Для начала добавим к системе еще одну материальную точку m_{n+1} с бесконечно малой массой, лежащую на расстоянии x_{n+1} от центра тяжести всей системы. В результате во всех уравнениях (А) появится новый, бесконечно малый член, содержащий множитель m_{n+1}, а величины K, x_1, $x_2, \ldots$, x_n получат бесконечно малые приращения dK, dx_1, $dx_2, \ldots$, dx_n. Кроме того, к системе (А) добавится новое уравнение для значения $-(K + dK)x_{n+1}$. Если сохранить только первые степени бесконечно малых величин, то уравнения можно считать линейными относительно неизвестных dK, dx_1, $dx_2, \ldots$, dx_n, причем коэффициенты этих уравнений, очевидно, действительны, так как и последнее из них зависит только от действительных начальных значений K, x_1, $x_2, \ldots$, x_n. Таким образом, мы можем получить лишь действительные значения для dK, dx_1, $dx_2, \ldots$, dx_n, так что и суммарные значения неизвестных $K + dK$, $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2, \ldots$, $x_n + dx_n$ представляют собой действительные функции данной величины x_{n+1}.

Теперь мы можем придать массе m_{n+1} бесконечно малое приращение, так, чтобы ее абсцисса x_{n+1} относительно центра тяжести новой системы не изменилась. Рассуждая так же, как и раньше, показываем, что приращение неизвестных обязательно будет действительным. Таким образом, все время увеличивая m_{n+1}, мы в конце концов достигнем произвольного конечного значения, при этом значения неизвестных постоянно будут действительными. Следует заметить, что при таком постепенном построении системы две точки никогда не подойдут бесконечно близко друг к другу, так как тогда сила притяжения между ними стала бы бесконечно большой и уже не могла бы быть пропорциональна расстоянию до центра тяжести. Отсюда также следует, что исходный порядок расположения точек не изменяется.

Но если предположить, что сила притяжения является ньютоновой, то в случае трех материальных точек, как известно, значения неизвестных будут действительными («Небесная механика», книга X, глава VI), следовательно, в силу только что доказанного, это же будет верно и для четырех материальных точек и т. д., то есть и в общем случае n материальных точек.

Итак, мы всегда можем расположить n материальных точек, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона и взятых в заданном порядке $m_1, m_2, \ldots, m_n$ на прямой, таким образом, чтобы результирующая сила притяжения, действующая на каждую точку, была пропорциональна расстоянию от этой точки до центра тяжести всей системы. В целом при различном порядке точек возможны $\frac{1}{2}n!$ таких расположений.

Если теперь предположить, что скорости всех точек параллельны, хотя и имеют произвольный наклон относительно прямой, и пропорциональны расстоянию до центра тяжести, то точки будут описывать вокруг центра тяжести подобные друг другу траектории, лежащие в одной плоскости. При этом, сохраняя отношения между взаимными расстояниями, эти точки все время будут лежать на одной прямой, проходящей через центр тяжести и поворачивающейся вокруг него.

Теперь нетрудно выяснить, какого рода будут траектории, описываемые точками. Очевидно, что, решая систему (A), мы выразим все абсциссы друг через друга, а именно

$$x_1 = \alpha_1 x_n, \quad x_2 = \alpha_2 x_n, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n.$$

Теперь, поскольку в природе

$$\varphi(\Delta) = \frac{k^2}{\Delta^2},$$

величина K всегда имеет вид

$$K = \frac{c}{x_n^3}.$$

Итак, на точку m_n действует ускоряющая сила $\frac{c}{x_n^2}$, так что точка m_n описывает кривую второго порядка. Другие точки описывают кривые, подобные ей.

Изучение легко интегрируемого случая, когда n точек одинаковой массы расположены в вершинах правильного n-угольника, не представляет особого интереса.

Ueber zwei Fälle des Vielkörperproblems

R. Lehmann-Filhez

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 595–601 (Russian)
Originally published in: *Astronomische Nachrichten*, 1891, vol. 127, no. 9, p. 137–143. © 1891.