Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

Е. В. Новикова, А. Г. Родионова, Н. В. Родионова

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2013

УДК 517.9 (075)
ББК 21.161.6я7
Н 731

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ
Рецензент: к.ф.-м.н. **Л. А. Белоусов**

Н731 **Новикова Е. В., Родионова А. Г., Родионова Н.В.**
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков: учебно-методическое пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2013. – 58 с.

ISBN 978-5-4312-0237-7

Учебно-методическое пособие содержит набор практических заданий по линейным уравнениям n-го порядка и краткое теоретическое сопровождение, необходимое для лучшего усвоения материала. В каждом параграфе разобраны примеры с подробным алгоритмом решений. Нумерация заданий сквозная.

Пособие рассчитано на студентов, изучающих дифференциальные уравнения. Пособие может быть полезно преподавателям для проведения практических занятий и для подготовки индивидуальных заданий. Его также можно использовать в качестве типового расчета.

ISBN 978-5-4312-0237-7
УДК 517.9 (075)
ББК 21.161.6я7

Предисловие

Дифференциальные уравнения описывают множество процессов в физике, химии, биологии, технике, экономике и изучаются студентами различных направлений подготовки бакалавриата и магистратуры.

Учебно-методическое пособие посвящено важному разделу дисциплины – линейным дифференциальным уравнениям высших порядков и нацелено на формирование способности выпускников применять в профессиональной деятельности методы математического моделирования.

Пособие разбито на главы в соответствии с видами дифференциальных уравнений порядка n. В каждой главе изложен теоретический материал, который позволит обучающимся систематизировать знания основных понятий, теорем и методов их практического применения при подготовке к контрольным работам и экзаменам; рассмотрены основные типы задач, разобраны примеры. Пособие содержит разработанный авторами многовариантный комплект заданий, который может быть использован в качестве типового расчёта для выработки навыков решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной работы студентов. Нумерация заданий сквозная.

Данное учебно-методическое пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий обучающимся, а также студентам заочной формы обучения и аспирантам.

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА n

§1. Общие положения

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots\ + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $a_i(x),\ i = \overline{1,n},\ f(x)$ – непрерывные на интервале (a,b) функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots\ + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

и называется однородным уравнением (ЛОУ). При $f(x) \neq 0$ уравнение (1) называется неоднородным (ЛНУ).

Определение 2. Решением уравнения (1) на (a,b) называется функция $y = \varphi(x),\ \varphi : (a,b) \to \mathbb{R},$ если она n раз непрерывно дифференцируема на (a,b) и при всех $x \in (a,b)$ имеет место равенство

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\varphi'(x) + a_n(x)\varphi(x) = f(x).$$

Пусть для уравнения (1) поставлена задача Коши, то есть наряду с уравнением (1) заданы начальные условия в точке $x_0 \in (a,b)$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{01}, \quad \dots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \qquad (3)$$

где $y_0,\ y_{01}, \dots , y_{0,n-1}$ – произвольные вещественные числа.

Теорема 1. Если функции $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, $f(x)$ непрерывны на интервале (a,b), то решение задачи Коши (1), (3) существует и единственно на (a,b).

Определение 3. Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется оператор вида

$$L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y,$$

$$L:\ C^{(n)}(a,b)\to C(a,b).$$

Используя это определение, уравнения (1) и (2) можно записать в виде

$$L(y)=f(x), \tag{1'}$$

$$L(y)=0\ . \tag{2'}$$

В дальнейшем отождествляем представления (1) и $(1')$, (2) и $(2')$ соответственно.

В силу линейности операции дифференцирования оператор $L(y)$ однороден и аддитивен, то есть обладает свойствами:

$$L(\alpha y)=\alpha L(y), \tag{4}$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $y\in C^{(n)}(a,b)$;

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2), \tag{5}$$

где $y_1,y_2\in C^{(n)}(a,b)$.

Теорема 2. Линейная комбинация решений ЛОУ (2) $y_1(x),\ \ldots\ ,y_m(x)$ на (a,b) также является решением ЛОУ (2) на (a,b).

Доказательство. Так как $L(y_i)=0$ при $x\in(a,b)$, то

$$L\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L(y_i)=0 \quad \text{для всех } x\in(a,b),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i=\overline{1,m}.$

Упражнение 1. Показать, что множество решений ЛОУ (2) на интервале (a,b) образует линейное пространство.

Теорема 3. Если комплекснозначная функция $y(x)=u(x)+iv(x)$ является решением ЛОУ (2), то ее вещественная и мнимая части, то есть функции $u(x)$ и $v(x)$, также являются решениями ЛОУ (2).

Теорема 4. (Принцип наложения решений). Если функции $y_1(x), \dots, y_m(x),\ x\in(a,b)$, являются решениями уравнений $L(y)=f_1(x),\ \dots\ ,L(y)=f_m(x)$ соответственно, то функция $y(x)=\sum_{i=1}^{m} y_i(x)$ является решением ЛНУ

$$L(y)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x), \quad x\in(a,b).$$

Доказательство. Поскольку

$$L(y_i)=f_i(x), \quad i=\overline{1,m}, \quad x\in(a,b),$$

то

$$L(y)=L\left(\sum_{i=1}^{m} y_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{m} L(y_i)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x), \quad x\in(a,b).$$

Применение теоремы 4 на практике позволяет упростить процесс решения линейных неоднородных уравнений, правая часть которых представлена в виде суммы двух и более функций.

Теорема 5. Если функция $y(x)$ – решение ЛНУ (1), а функция $z(x)$ – решение ЛОУ (2) на (a,b), то их сумма $y(x)+z(x)$ является решением ЛНУ (1) на (a,b).

Доказательство. Так как $L(y)=f(x)$ и $L(z)=0$ при $x\in(a,b)$, то $L(y+z)=L(y)+L(z)=f(x)$, $x\in(a,b)$.

Теорема 6. Разность двух решений линейного неоднородного уравнения (1) есть решение соответствующего линейного однородного уравнения (2).

Доказательство. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два решения ЛНУ (1), то $L(y_1)=L(y_2)=f(x)$. Тогда для функции $z(x)=y_1(x)-y_2(x)$ справедливы равенства

$$L(z)=L(y_1-y_2)=L(y_1)-L(y_2)=f(x)-f(x)=0,\ x\in(a,b).$$

§2. Линейная независимость функций

Определение 4. Функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x)$ называются линейно зависимыми на (a,b), если найдутся такие константы $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, $\alpha_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,m}$, $\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k^2>0$, что справедливо равенство

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\ \ldots+\alpha_m\varphi_m(x)=0,\quad x\in(a,b). \tag{6}$$

Если же равенство (6) возможно лишь для тривиального набора констант $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$, то функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a,b).

Замечание 1. Существенно, что линейная зависимость и независимость системы функций устанавливается на определенном промежутке, то есть одни и те же функции могут быть линейно зависимы на одном множестве, и линейно независимы на другом.

Пример 1. Рассмотрим функции $\varphi_1(x) = x^3$, $\varphi_2(x) = |x^3|$.

Очевидно, что $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = x^3$ при $x \in [0, 2]$, то есть данные функции линейно зависимы. Однако, на отрезке $[-2, 2]$ равенство $\alpha_1 x^3 + \alpha_2 |x^3| = 0$ возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. В этом случае функции линейно независимы.

Упражнение 2. Докажите, что линейно независимыми на $\mathbb{R}$ системами функций являются:

1) одночлены $1,\ x,\ x^2, \ldots, x^n$;

2) функции $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$, где $k_i \in \mathbb{R}$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$;

3) функции $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx$.

Определение 5. Определителем Вронского системы $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на интервале (a,b) функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ называется определитель вида:

$$W(x) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 7. (Необходимое условие линейной зависимости системы функций). Если система $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на (a,b) функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$

линейно зависима на (a,b), то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на (a,b):

$$W(x)=0, \quad x\in(a,b).$$

Следствие 1. Если определитель Вронского системы функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a,b)$, то система функций линейно независима на интервале (a,b).

Замечание 2. Равенство нулю определителя Вронского является необходимым, но не достаточным условием линейной зависимости системы функций.

§3. Линейное однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение (2).

Теорема 8. Если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями ЛОУ (2) на интервале (a,b), то следующие утверждения эквивалентны:

1) $W(x)=0$ при любых $x\in(a,b)$;

2) существует $x_0\in(a,b)$ такое, что $W(x_0)=0$;

3) функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на интервале (a,b).

Определение 6. Фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения n-го порядка на (a,b) называется система из n линейно независимых на интервале (a,b) решений этого уравнения.

Замечание 3. Фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (2) определяется неоднозначно.

Замечание 4. ФСР уравнения (2) образует базис пространства решений ЛОУ (2) (см. замечание 1).

Определение 7. Функция $y=\varphi\left(x,\, C_1,\, \ldots,\, C_n\right)$ называется общим решением линейного дифференциального уравнения n-го порядка на $\left(a,b\right)$, если:

1) при любом фиксированном наборе констант $C_1=C_1^*,\, \ldots,\, C_n=C_n^*$ функция $y=\varphi\left(x,\, C_1^*,\, \ldots,\, C_n^*\right)$ является решением этого уравнения;

2) для любых начальных данных $\left(x_0, y_0, y_{01},\, \ldots,\, y_{0,n-1}\right)$, где $x_0\in\left(a,b\right)$, $y_0, y_{01},\, \ldots,\, y_{0,n-1}$ – произвольные вещественные числа, существует единственный набор постоянных $C_1=C_1^0,\, \ldots,\, C_n=C_n^0$ такой, что функция $y=\varphi\left(x, C_1^0,\, \ldots,\, C_n^0\right)$ является решением соответствующей задачи Коши.

Теорема 9. Пусть $y_1\left(x\right),\, \ldots,\, y_n\left(x\right)$ – фундаментальная система решений ЛОУ (2) на интервале $\left(a,b\right)$. Тогда общее решение этого уравнения на $\left(a,b\right)$ имеет вид

$$y_{\text{о.о.}}\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\left(x\right),$$

где $C_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$, – произвольные постоянные.

§4. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим ЛНУ (1) и изучим структуру его общего решения.

Теорема 10. Пусть $y_1\left(x\right),\, \ldots,\, y_n\left(x\right)$ – фундаментальная система решений ЛОУ (2) на интервале $\left(a,b\right)$, $y_{\text{ч.н.}}\left(x\right)$ –

некоторое частное решение ЛНУ (1). Тогда общее решение $y_{\text{о.н.}}(x)$ ЛНУ (1) на (a,b) имеет вид:

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) + y_{\text{ч.н.}}(x), \tag{7}$$

где $C_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$.

Доказательство. В силу теорем 2 и 5 формула (7) при любом наборе констант $C_k \in \mathbb{R}$ определяет решение ЛНУ (1). Покажем теперь, что константы в формуле (7) можно выбрать так, что будет получено любое наперед заданное решение ЛНУ (1).

Пусть $\tilde{y}(x)$ – заданное решение ЛНУ (1). В силу теоремы 6 разность $\tilde{y}(x) - y_{\text{ч.н.}}(x)$ двух решений ЛНУ (1) является решением ЛОУ (2). По теореме 9 об общем решении ЛОУ найдется, притом единственный, набор констант $C_1 = \tilde{C}_1, \ldots, C_n = \tilde{C}_n$ такой, что на интервале (a,b) выполнено равенство

$$\tilde{y}(x) - y_{\text{ч.н.}}(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \ldots + \tilde{C}_n y_n(x),$$

а, следовательно, и равенство

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k y_k(x) + y_{\text{ч.н.}}(x).$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (1) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения (2) и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

§5. Метод вариации произвольных постоянных

Пусть известна фундаментальная система решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ЛОУ (2) и его общее решение

$$y_{\text{о.о.}}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, общее решение ЛНУ (1) ищем в виде, повторяющем вид общего решения ЛОУ (2), в котором константы $C_1, \ldots, C_n$ заменены на пока произвольные непрерывно дифференцируемые на интервале (a,b) функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$:

$$y_{\text{о.н.}}(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x). \qquad (8)$$

Для определения этих функций накладываем условия на их производные:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \ \ldots \ + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ \ldots \ + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ \ldots \ + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (9)$$

Определителем данной системы является определитель Вронского $W(x) = W(y_1, \ldots, y_n)$. Поскольку $W(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$, то система (9) имеет единственное решение:

$$C_k'(x) = \psi_k(x), \quad k = \overline{1,n}. \qquad (10)$$

Интегрируя (10), находим искомые функции

$$C_k(x) = \int \psi_k(x)\, dx + \tilde{C}_k, \qquad (11)$$

Подставляя (11) в равенство (8), получим общее решение неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \tilde{C}_1 y_1 + \ \ldots \ + \tilde{C}_n y_n + \\ & + \left[y_1 \int \psi_1(x) dx + y_2 \int \psi_2(x) dx + \ \ldots \ + y_n \int \psi_n(x) dx \right]. \end{aligned} \qquad (12)$$

§6. Построение линейного однородного дифференциального уравнения n–го порядка по его решениям

Рассмотрим ЛОУ (2).

Теорема 11. Пусть n раз непрерывно дифференцируемые на интервале (a,b) функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ таковы, что составленный из них определитель Вронского $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ не равен нулю ни в одной точке интервала (a,b). Тогда существует линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными на (a,b) коэффициентами такое, что данные функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образуют его фундаментальную систему решений. Это уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Замечание 5. Как правило, левую часть уравнения (13) преобразуют, раскладывая определитель по элементам последнего столбца.

Пример 2. Составить ЛОУ, для которого функции $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ образуют ФСР.

Решение. Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на $\mathbb{R}$, то $W(y_1, y_2) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Составим ЛОУ, применяя формулу (13):

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & y \\ e^x & 2e^{2x} & y' \\ e^x & 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad e^x e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & y' \\ 1 & 4 & y'' \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Раскладывая определитель в (14) по элементам 3-го столбца, получим искомое дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

§7. Формула Остроградского–Лиувилля

Отметим, что в дифференциальном уравнении (13) коэффициент при старшей производной $y^{(n)}(x)$ представляет собой определитель Вронского $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и, по условию теоремы 11, $W(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$.

Несложно убедиться, что коэффициент при $y^{(n-1)}(x)$, равный

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

представляет собой производную от определителя Вронского. Действительно, по правилу дифференцирования функционального определителя n-го порядка его производная равна сумме n определителей, каждый из которых получен из исходного заменой одной из строк строкой из производных.

Продифференцируем по этому правилу определитель Вронского. Все определители, входящие в сумму, кроме последнего, будут равны нулю, поскольку содержат совпадающие i-ю и $(i+1)$-ю строки. Единственный ненулевой определитель, в котором последняя строка заменена строкой из производных, и равен производной от определителя Вронского:

$$W'(x) = W_1(x).$$

Разделив обе части уравнения (13) на определитель Вронского $W(x)$ (учитывая, что $W(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$), получим ЛОУ со старшим коэффициентом, равным единице.

Обозначим коэффициент при $y^{(n-1)}(x)$ через

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}.$$

Проинтегрируем обе части от x_0 до x, тогда

$$W(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt \right).$$

Выражая постоянную C через начальное значение $W(x_0)$, получаем формулу Остроградского–Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt \right),$$

где $\left[x_0, x\right] \subset (a,b)$.

Применяя формулу Остроградского–Лиувилля на практике к нахождению общего решения уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = 0$, у которого известно ненулевое частное решение y_1, получаем уравнение первого порядка:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C_1\, \mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.$$

Раскроем определитель $y_1 y' - y_1' y = C_1 e^{-\int p(x)\,dx}$. Разделив обе части на y_1^2, получаем $\left(\dfrac{y}{y_1}\right)' = \dfrac{C_1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)\,dx}$, откуда

$$y = y_1 \left(C_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)\,dx} dx + C_2 \right).$$

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА n С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_{n-1}y'+a_n y=0, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$.

Очевидно, что данное уравнение есть частный случай ЛОУ (2), рассмотренного в главе I, поэтому для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно построить фундаментальную систему решений этого уравнения. Вводя, как и прежде, линейный дифференциальный оператор

$$L(y)=y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_{n-1}y'+a_n y,$$

запишем уравнение (1) в форме $L(y)=0$.

Применяя метод Эйлера, будем искать частные решения (1) в виде

$$y=e^{\lambda x}, \tag{2}$$

где λ – вещественное или комплексное число, которое нужно определить.

Вычисляя производные функции $y=e^{\lambda x}$ до n-го порядка, имеем

$$y'=\lambda e^{\lambda x},\quad y''=\lambda^2 e^{\lambda x},\quad \dots\quad ,y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}.$$

Тогда

$$L\left(e^{\lambda x}\right)=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n\right)e^{\lambda x}=0$$

или $L\left(e^{\lambda x}\right)=P(\lambda)\,e^{\lambda x}=0$, где $P(\lambda)\doteq\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$ называется характеристическим многочленом, а уравнение

$P(\lambda)=0$ – характеристическим уравнением. Корни характеристического уравнения называются характеристическими числами уравнения.

§1. Случай различных корней характеристического уравнения

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ \dots \ + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (3)$$

Легко заметить, что уравнение (3) составляется для уравнения (1) по следующему правилу: производные k-го порядка искомой функции заменяются на λ^k. Особенно нужно обратить внимание на то, что $y(x)$ заменяется на $\lambda^0 = 1$.

Структура фундаментальной системы решений уравнения (1) определяется свойствами корней характеристического уравнения (3).

В данном параграфе рассмотрим случай, когда все корни различны.

1. Все корни характеристического уравнения действительные и различные. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения, причем $\lambda_j \neq \lambda_k$ для всех $j \neq k$ $(\lambda_j \in \mathbb{R})$.

Напомним, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы на $\mathbb{R}$. В этом случае фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ \dots \ , y_n = e^{\lambda_n x}, \qquad (4)$$

а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ \dots \ + C_n e^{\lambda_n x}, \qquad (5)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные действительные постоянные.

2. Все корни различные, но среди них есть комплексные. Тогда каждому корню $a+ib$ $\left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ соответствует комплексно-сопряженный корень $a-ib$ (почему?), и в этом случае каждой паре сопряженных корней $a \pm ib$ соответствуют действительные частные решения вида

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx. \tag{6}$$

Упражнение 1. Показать линейную независимость функций (6) на $\mathbb{R}$.

Заметим, что при $a=0$ получим чисто мнимые корни $\pm ib$, которым будут соответствовать решения дифференциального уравнения вида

$$y_1 = \cos bx, \quad y_2 = \sin bx. \tag{7}$$

Итак, алгоритм нахождения фундаментальной системы решений в случае различных корней характеристического уравнения заключается в следующем: находим действительные решения, которые соответствуют всем парам сопряженных комплексных корней, а также решения, соответствующие действительным корням.

Пример 1. Дано уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0. \tag{8}$$

Найти ФСР и общее решение.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменяя в уравнении (8) y'', y', y на $\lambda^2, \lambda, 1$ соответственно. Таким образом, получаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Данное уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$ Так как оба корня действительны и различны, то фундаментальная система решений имеет следующий вид:

$$y_1 = e^{x}, \quad y_2 = e^{3x}.$$

Общее решение представимо в виде:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}.$$

Пример 2. Дано уравнение

$$y'' + y' + y = 0. \tag{9}$$

Найти ФСР и общее решение.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменяя в уравнении (9) y'', y', y на λ^2, λ, 1 соответственно. Получаем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Данное характеристическое уравнение имеет комплексные (комплексно-сопряженные) корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Здесь $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ФСР имеет следующий вид:

$$y_1 = e^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad y_2 = e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

а общее решение представимо в виде

$$y = \left[C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right] e^{\frac{x}{2}}.$$

Пример 3. Дано уравнение

$$y^{IV} - 16y = 0. \tag{10}$$

Найти ФСР и общее решение.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменяя в уравнении (10) y^{IV} и y на λ^4 и 1 соответственно. Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 16 = 0$ можно представить следующим образом:

$$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0.$$

Данное уравнение имеет четыре корня, два из которых различны и действительны $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2,$ а два чисто мнимые $\lambda_3 = 2i$ и $\lambda_4 = -2i$ (здесь $a = 0,\ b = 2$).

Тогда ФСР имеет следующий вид:

$$y_1 = e^{2x},\quad y_2 = e^{-2x},\ y_3 = \cos 2x,\quad y_4 = \sin 2x,$$

а общее решение представимо в виде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

§2. Случай наличия кратных корней

В данном параграфе будут рассмотрены случаи, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные действительные и комплексные корни.

1. Среди корней характеристического уравнения имеется действительный корень λ_1 кратности m.

Тогда уравнение имеет m частных решений:

$$e^{\lambda_1 x},\quad xe^{\lambda_1 x},\quad x^2 e^{\lambda_1 x},\quad \dots\quad , x^{m-1} e^{\lambda_1 x}. \tag{11}$$

Обратим внимание на то, что последняя степень x будет на единицу меньше кратности корня λ_1.

После нахождения других корней характеристического уравнения строят ФСР и общее решение.

2. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные комплексные.

Обозначим через $\lambda_1 = a + ib$ корень кратности m. Данный корень будет иметь комплексно-сопряженный корень такой же кратности m. Таким образом, уравнение будет иметь $2m$ действительных линейно независимых частных решения следующего вида:

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx,\quad xe^{ax}\cos bx,\ \dots\ ,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx,\quad xe^{ax}\sin bx,\ \dots\ ,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx. \end{cases} \tag{12}$$

Если $a=0,$ то система (12) примет вид:

$$\begin{cases} \cos bx, \quad x\cos bx, \ \dots , \ x^{m-1}\cos bx, \\ \sin bx, \quad x\sin bx, \ \dots \ , \ x^{m-1}\sin bx. \end{cases} \tag{13}$$

Пример 4. Решить уравнение

$$y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0. \tag{14}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменяя в уравнении (14) y''', y'', y', y на $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$ соответственно. Получаем $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0.$

Данное уравнение имеет три корня $\lambda_1 = -1,$ $\lambda_2 = -1,$ $\lambda_3 = -3.$ Среди них есть действительный корень $\lambda_1 = -1$ кратности 2. Ему соответствует два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{-x},$ $y_2 = xe^{-x}$.

Так как среди корней уравнения имеется еще один корень $\lambda_3 = -3,$ то ФСР имеет вид

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}, \quad y_3 = e^{-3x}.$$

Общее решение записывается следующим образом:

$$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) + c_3 e^{-3x}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0. \tag{15}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Его можно представить в виде

$$\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)^2 = 0,$$

поэтому данное уравнение имеет двукратные комплексные корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$ $\quad \lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$ Им соответствуют следующие четыре линейно независимых действительных решения:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad y_2 = x e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$
$$y_3 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad y_4 = x e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$

которые составляют фундаментальную систему решений.

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left[C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 x \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right.$$
$$\left. + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 x \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right].$$

В заданиях 1-5 решить линейные однородные дифференциальные уравнения.

Задание 1.

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$
2. $y'' - 2y' - 8y = 0$
3. $y'' - 9y' + 14y = 0$
4. $y'' + y' - 6y = 0$
5. $y'' + 5y' - 14y = 0$
6. $y'' + y' - 2y = 0$
7. $y'' + 7y' + 12y = 0$
8. $y'' - y' - 12y = 0$
9. $y'' - y' - 30y = 0$
10. $y'' - 11y' + 28y = 0$
11. $y'' + 12y' + 36y = 0$
12. $y'' + 3y' - 28y = 0$
13. $y'' + 6y' - 27y = 0$
14. $y'' + y' - 20y = 0$

15 $y'' + 3y' - 4y = 0$

16. $y'' - 10y' + 24y = 0$
17. $y'' - y' - 6y = 0$
18. $y'' + 2y' - 24y = 0$
19. $y'' - 13y' + 40y = 0$
20. $y'' - 4y' - 32y = 0$
21. $y'' - 3y' - 40y = 0$
22. $y'' + 5y' + 4y = 0$
23. $y'' - y' - 56y = 0$
24. $y'' + y' - 42y = 0$
25. $y'' + 5y' - 36y = 0$

Задание 2.

1. $y''-10y'+25y=0$
2. $y''+10y'+25y=0$
3. $4y''+12y'+9y=0$
4. $9y''+30y'+25y=0$
5. $16y''-8y'+y=0$
6. $y''-12y'+36y=0$
7. $y''+14y'+49y=0$
8. $4y''-20y'+25y=0$
9. $y''+8y'+16y=0$
10. $y''+4y'+4y=0$
11. $16y''+56y'+49y=0$
12. $y''+6y'+9y=0$
13. $y''-16y'+64y=0$
14. $64y''-16y'+y=0$
15. $36y''+12y'+y=0$
16. $y''-20y'+100y=0$
17. $y''+18y'+81y=0$
18. $81y''-18y'+y=0$
19. $64y''+48y'+9y=0$
20. $y''-6y'+9y=0$
21. $y''-14y'+49y=0$
22. $49y''+14y'+y=0$
23. $49y''-42y'+9y=0$
24. $y''+12y'+36y=0$
25. $25y''-30y'+9y=0$

Задание 3.

1. $y'''-4y''+5y'-2y=0$
2. $y'''-5y''+7y'-3y=0$
3. $y'''-5y''+8y'-4y=0$
4. $y'''+y''-5y'+3y=0$
5. $y'''+3y''-4y=0$
6. $y'''-6y''+5y'+12y=0$
7. $y'''-3y'+2y=0$
8. $y'''-8y''+19y'-12y=0$
9. $y'''-5y''-y'+5y=0$
10. $y'''-4y''-7y'+10y=0$
11. $y'''-3y''-9y'-5y=0$
12. $y'''-9y''+15y'-7y=0$
13. $y'''-2y''-7y'-4y=0$
14. $y'''-7y''-y'+7y=0$
15. $y'''-3y'-2y=0$
16. $y'''-y''-y'+y=0$
17. $y'''-8y''+20y'-16y=0$
18. $y'''-8y''+19y'-12y=0$
19. $y'''-7y''+16y'-12y=0$
20. $y'''-3y''-y'+3y=0$
21. $y'''-6y''+11y'-6y=0$
22. $y'''+3y''+3y'+y=0$
23. $y'''-7y''+14y'-8y=0$
24. $y'''+6y''+12y'+8y=0$
25. $y'''-3y''-6y'+8y=0$

Задание 4.

1. $y''-6y'+10y=0$
2. $y''+8y'+25y=0$
3. $y''+6y'+10y=0$
4. $y''+12y'+45y=0$
5. $y''+4y'+29y=0$
6. $y''-14y'+53y=0$
7. $y''+4y'+40y=0$
8. $y''-16y'+68y=0$
9. $y''-8y'+52y=0$
10. $y''+8y'+20y=0$
11. $y''-10y'+61y=0$
12. $y''+12y'+40y=0$
13. $y''-8y'+25y=0$
14. $y''+10y'+29y=0$
15. $y''+4y'+13y=0$
16. $y''+10y'+106y=0$
17. $y''+14y'+58y=0$
18. $y''-2y'+82y=0$
19. $y''-2y'+10y=0$
20. $y''-16y'+73y=0$
21. $y''+2y'+10y=0$
22. $y''-16y'+65y=0$
23. $y''-4y'+13y=0$
24. $y''-14y'+50y=0$
25. $y''+4y'+13y=0$

Задание 5.

1. $y'''-7y''+16y'-10y=0$
2. $y'''-4y''+6y'-4y=0$
3. $y'''+7y''+16y'+10y=0$
4. $y'''+3y''+7y'+5y=0$
5. $y'''-9y''+25y'-17y=0$
6. $y'''+y''+3y'-5y=0$
7. $y'''-3y''+12y'-10y=0$
8. $y'''-5y''+12y'-8y=0$
9. $y'''-y''+8y'-10y=0$
10. $y'''-3y''+4y'+8y=0$
11. $y'''+2y''=0$
12. $y'''+3y''+4y'+2y=0$
13. $y'''-4y''+14y'-20y=0$
14. $y'''+y''-2y=0$
15. $y'''+y''+8y'-10y=0$
16. $y'''+y''+y'+y=0$
17. $y'''-5y''+9y'-5y=0$
18. $y'''-y''+y'-y=0$
19. $y'''-3y''+y'+5y=0$
20. $y'''-y''+4y'-4y=0$
21. $y'''-3y''+4y'-2y=0$
22. $y'''+y''+4y'+4y=0$
23. $y'''-y''+2y=0$
24. $y'''-2y''+y'-2y=0$
25. $y'''-2y''+4y'-8y=0$

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n-го порядка вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $f(x)$ – непрерывная на интервале (a,b) функция.

Данное уравнение представляет собой частный случай ЛНУ (1) (глава I), поэтому структура его общего решения, определяется теоремой 10 главы I.

Напомним, что, согласно этой теореме, общее решение неоднородного уравнения (1) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения:

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x).$$

Построение общего решения $y_{\text{о.о.}}(x)$ однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ \ldots + a_n y = 0,$$

подробным образом описано в главе II.

Рассмотрим два метода отыскания частного решения неоднородного уравнения.

§ 1. Метод вариации произвольной постоянной

Метод вариации произвольной постоянной применяется для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения n- го порядка как с постоянными, так и переменными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения. Данный метод подробно описан в главе I. Остановимся на частном случае уравнения (1).

Для уравнения второго порядка $y'' + a_1 y' + a_2 y = f\left(x\right)$ система (9) в главе I примет следующий вид

$$\begin{cases} C_1'\left(x\right) y_1 + C_2'\left(x\right) y_2 = 0, \\ C_1'\left(x\right) y_1' + C_2'\left(x\right) y_2' = f\left(x\right). \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему (2) относительно C_1' и C_2', получаем

$$C_1' = -\frac{y_2 f\left(x\right)}{W(y_1, y_2)}; \quad C_2' = \frac{y_1 f\left(x\right)}{W(y_1, y_2)},$$

откуда находим

$$C_1\left(x\right) = -\int \frac{y_2\left(x\right) f\left(x\right)}{W(y_1, y_2)}\, dx + \tilde{C}_1; \; C_2\left(x\right) = \int \frac{y_1\left(x\right) f\left(x\right)}{W(y_1, y_2)}\, dx + \tilde{C}_2,$$

где $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ – определитель Вронского решений y_1 и y_2.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение. Здесь соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y = 0, \tag{3}$$

а $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\cos x}$, $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\; k \in \mathbb{Z}\right)$. Характеристическое уравнение для (3) $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $\lambda_1 = i,\; \lambda_2 = -i,$ и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{о.н.}} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \qquad (4)$$

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)(\cos x) = \dfrac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

следовательно, $C_1'(x) = -\operatorname{tg} x$, $C_2'(x) = 1$.

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1; \quad C_2(x) = x + \tilde{C}_2.$$

Подставляя полученные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (10), имеем

$$y_{\text{о.н.}} = \tilde{C}_1\cos x + \tilde{C}_2\sin x + \cos x\,\ln|\cos x| + x\sin x.$$

Здесь $\tilde{C}_1\cos x + \tilde{C}_2\sin x$ – общее решение однородного уравнения (9), а $\cos x\,\ln|\cos x| + x\sin x$ – частное решение исходного уравнения.

Задание 6. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных уравнения

1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$
2. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$
3. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$
4. $y'' - 2y' = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}$
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$
7. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
8. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$

9. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 2x}$

10. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$

11. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 2x}$

12. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \cos x}$

13. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$

14. $y'' - y' = \frac{1}{e^{-2x} \cos^2 e^x}$

15. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$

16. $y'' - y' = \frac{1}{2e^x + 1}$

17. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin^2 3x}$

18. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

19. $y'' + 9y = \frac{1}{\cos^2 3x}$

20. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$

21. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$

22. $y'' + 16y = \operatorname{ctg} 4x$

23. $y'' + y = \operatorname{tg} x$

24. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x$

25. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$

§2. Метод неопределенных коэффициентов

Данный метод применим для нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами только в том случае, когда его правая часть имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]. \qquad (5)$$

Здесь $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, α, β – вещественные постоянные.

Далее будут подробно разобраны виды частных решений для различных видов правых частей.

I. Функция $f\left(x\right)$ принимает следующий вид:

$$f\left(x\right)=P_m\left(x\right)e^{\alpha x}. \tag{6}$$

Здесь возможны четыре случая.

1) $\alpha=0$, правая часть принимает вид $f\left(x\right)=P_m\left(x\right)$, и число 0 не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=\tilde{P}_m\left(x\right),$$

где $\tilde{P}_m\left(x\right)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ \dots\ +A_mx^0$ – многочлен степени m с неизвестными коэффициентами $A_0,A_1,\dots,A_m$.

2) $\alpha=0$, и число 0 является корнем характеристического уравнения кратности s. Тогда частное решение принимает вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=x^S\tilde{P}_m\left(x\right),$$

где $\tilde{P}_m\left(x\right)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ \dots\ +A_mx^0$ – многочлен степени m с неизвестными коэффициентами $A_0,A_1,\dots,A_m$.

3) $\alpha\neq0$, α не является корнем характеристического уравнения, тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=\tilde{P}_m\left(x\right)e^{\alpha x},$$

где $\tilde{P}_m\left(x\right)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ \dots\ +A_mx^0$ – многочлен степени m с неизвестными коэффициентами $A_0,A_1,\dots,A_m$.

4) $\alpha\neq0$, и α является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=x^S\tilde{P}_m\left(x\right)e^{\alpha x},$$

где $\tilde{P}_m\left(x\right)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ \dots\ +A_mx^0$ – многочлен степени m с неизвестными коэффициентами $A_0,A_1,\dots,A_m$.

II. Функция $f(x)$ принимает следующий вид: $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Здесь возможны четыре случая.

1) $\alpha=0$, правая часть принимает вид $f(x)=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x,$ и числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x,$$

где $k=\max(m,n)$, а $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ – многочлены k-ой степени с неопределенными коэффициентами $P_0,P_1,\dots,P_k$ и $Q_0,Q_1,\dots,Q_k$:

$$\tilde{P}_k(x)=P_0x^k+P_1x^{k-1}+\dots+P_kx^0,$$

$$\tilde{Q}_k(x)=Q_0x^k+Q_1x^{k-1}+\dots+Q_kx^0.$$

2) $\alpha=0$, и числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]x^S,$$

где $k=\max(m,n)$, а $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ – многочлены k-ой степени с неопределенными коэффициентами $P_0,P_1,\dots,P_k$ и $Q_0,Q_1,\dots,Q_k$.

3) $\alpha\neq0$, и числа $\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right],$$

где $k=\max(m,n)$, а $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ – многочлены k-ой степени с неопределенными коэффициентами $P_0, P_1, \dots, P_k$ и $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$.

4) $\alpha \neq 0$, и числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]x^S,$$

где $k=\max(m,n)$, а $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ – многочлены k-ой степени с неопределенными коэффициентами $P_0, P_1, \dots, P_k$ и $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' - y' - 6y = 2x + 1$.

Решение. Здесь соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' - y' - 6y = 0$, а $f(x) = 2x + 1$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ имеет два различных корня $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}.$$

В данном случае число $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $y_{\text{ч.н.}}$ имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = Ax + B,$$

где A и B – неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Вычисляем $y'_{\text{ч.н.}} = A$ и $y''_{\text{ч.н.}} = 0$. Подставляя $y''_{\text{ч.н.}}$, $y'_{\text{ч.н.}}$, $y_{\text{ч.н.}}$ в исходное уравнение, получаем:

$$-6Ax + (-A + 6B) = 2x + 1.$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при x^1, x^0, имеем систему:

$$\begin{cases} -6A = 2 \\ -A + 6B = 1, \end{cases}$$

решением которой является $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{9}$. Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9},$$

а общее решение $y_{\text{о.н.}}$ представимо в виде

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right).$$

Пример 3. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 10y' = 4x - 1.$

Решение. Здесь соответствующее однородное уравнение имеет вид $y''' - 7y'' + 10y' = 0$, а $f(x) = 4x - 1.$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0$ имеет три различных корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}.$$

В данном случае число $\alpha = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, поэтому $y_{\text{ч.н.}}$ имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx,$$

где A и B – неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Вычисляем $y'_{\text{ч.н.}}$, $y''_{\text{ч.н.}}$, $y'''_{\text{ч.н.}}$:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B, \quad y''_{\text{ч.н.}} = 2A, \quad y'''_{\text{ч.н.}} = 0.$$

Подставляя $y'''_{\text{ч.н.}}$, $y''_{\text{ч.н.}}$, $y'_{\text{ч.н}}$ и $y_{\text{ч.н.}}$ в исходное уравнение, получаем:

$$20Ax + \left(-14A + 10B\right) = 4x - 1.$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при x^1, x^0, имеем систему:

$$\begin{cases} 20A = 4 \\ -14A + 10B = -1, \end{cases}$$

решением которой являются $A = \dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{9}{50}$.

Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = \left(\frac{1}{5}x + \frac{9}{50}\right)x,$$

а общее решение $y_{\text{о.н.}}$ представимо в виде

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{5x} + \left(\frac{1}{5}x + \frac{9}{50}\right)x.$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' - 4y = \left(3x - 1\right)e^x$.

Решение. Здесь соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' - 4y = 0$, а $f\left(x\right) = \left(3x - 1\right)e^x$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4 = 0$ имеет два различных корня $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}.$$

В данном случае число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $y_{\text{ч.н.}}$ имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = \left(Ax + B\right) e^{x},$$

где A и B – неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Вычисляем $y'_{\text{ч.н.}}$, $y''_{\text{ч.н.}}$:

$$y'_{\text{ч.н.}} = Axe^{x} + e^{x}\left(A + B\right),$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = e^{x}\left(A + B\right) + Ae^{x} + Axe^{x}.$$

Подставляя $y''_{\text{ч.н.}}$, $y'_{\text{ч.н.}}$ и $y_{\text{ч.н.}}$ в исходное уравнение, получаем:

$$-3Axe^{x} + e^{x}\left(2A - 3B\right) = \left(3x - 1\right) e^{x}.$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при xe^{x}, e^{x}, получаем систему:

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ 2A - 3B = -1 \end{cases}$$

Получаем $A = -1,\ B = -\dfrac{1}{3}.$

Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = \left(-x - \frac{1}{3}\right) e^{x},$$

а общее решение $y_{\text{о.н.}}$ представимо в виде

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \left(-x - \frac{1}{3}\right) e^{x}.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2x}$.

Решение. Здесь соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' + 4y' + 4y = 0$, а $f\left(x\right) = 5e^{-2x}$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+4=0$ имеет корень $\lambda=-2$ кратности 2, и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о.}}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-2x}x.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{о.н.}}=y_{\text{о.о.}}+y_{\text{ч.н.}}.$$

В данном случае число $\alpha=-2$ является корнем характеристического уравнения, поэтому $y_{\text{ч.н.}}$ имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=Ax^2e^{-2x},$$

где A – неизвестный коэффициент, который необходимо определить.

Вычисляем $y'_{\text{ч.н.}}$ и $y''_{\text{ч.н.}}$:

$$y'_{\text{ч.н.}}=2Axe^{-2x}-2Ax^2e^{-2x},$$

$$y''_{\text{ч.н.}}=2Ae^{-2x}-8Axe^{-2x}+4Ax^2e^{-2x}.$$

Подставляя $y''_{\text{ч.н.}}$, $y'_{\text{ч.н.}}$ и $y_{\text{ч.н.}}$ в исходное уравнение, получаем:

$$2Ae^{-2x}=5e^{-2x}.$$

Таким образом, $A=\dfrac{5}{2}$, и частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}}=\frac{5}{2}e^{-2x}x^2,$$

а общее решение $y_{\text{о.н.}}$ представимо в виде

$$y_{\text{о.н.}}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-2x}x+\frac{5}{2}e^{-2x}x^2.$$

Пример 6. Найти общее решение $y''-7y'+6y=\sin x.$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2-7\lambda+6=0.$ Корни: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=1.$ Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}.$$

Так как числа $\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение $y_{\text{ч.н.}}$ неоднородного уравнения находим по формуле:

$$y_{\text{ч.н.}} = A\sin x + B\cos x.$$

Находим производные $y'_{\text{ч.н.}}$ и $y''_{\text{ч.н.}}$:

$$y'_{\text{ч.н.}} = A\cos x - B\sin x, \qquad y''_{\text{ч.н.}} = -A\sin x - B\cos x.$$

Подставляя $y'_{\text{ч.н.}}$ и $y''_{\text{ч.н.}}$ в исходное уравнение, получаем:

$$-A\sin x - B\cos x - 7A\cos x + 7B\sin x + 6A\sin x + 6B\cos x = \sin x$$

или

$$(5A + 7B)\sin x + (5B - 7A)\cos x = \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получаем систему линейных уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} 5A + 7B = 1 \\ -7A + 5B = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = \dfrac{5}{74}$, $B = \dfrac{7}{74}$. Тогда частное решение $y_{\text{ч.н.}}$ имеет вид:

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x,$$

а общее решение примет вид:

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x} + \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x.$$

Пример 7. Найти общее решение $y'' + y = x\sin x.$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0.$ Его корнями являются $\lambda_1 = +i,\ \lambda_2 = -i.$ Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть данного в условии дифференциального уравнения имеет вид: $x \sin x.$

Поскольку $\pm i$ являются корнями характеристического уравнения кратности 1, для нахождения частного решения $y_{\text{ч.н.}}$ неоднородного уравнения используем формулу:

$$y_{\text{ч.н.}} = x(Ax + B)\cos x + x(Cx + D)\sin x.$$

Находим $y',\ y''$:

$$y' = -\left(Ax^2 + Bx\right)\sin x + \left(Cx^2 + Dx\right)\cos x + (2Ax + B)\cos x +$$
$$+(2Cx + D)\sin x,$$
$$y'' = -\left(Ax^2 + Bx\right)\cos x - \left(Cx^2 + Dx\right)\sin x - 2(2Ax + B)\sin x +$$
$$+2(2Cx + D)\cos x + 2A\cos x + 2C\sin x.$$

Подставляя $y,\ y''$ в исходное уравнение, получим соотношение вида:

$$-2(2Ax + B)\sin x + 2(2Cx + D)\cos x + 2A\cos x + 2C\sin x = x\sin x$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x,\ \cos x,\ x\sin x,$ $x\cos x,$ получаем систему линейных уравнений для нахождения $A,\ B,\ C,\ D$:

$$\begin{array}{c|l} x\sin x & -4A = 1 \Rightarrow A = -1/4, \\ x\cos x & 4C = 0 \ \Rightarrow C = 0, \\ \sin x & -2B = 0 \ \Rightarrow B = 0, \\ \cos x & 2D + 2A = 0 \ \Rightarrow D = 1/4. \end{array}$$

Таким образом,

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x,$$

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

В заданиях 7–11 решить линейные неоднородные уравнения со специальной правой частью.

Задание 7.

Линейные однородные с правой частью вида $(Ax+B)$:

1. $y''+y'-2y=2x+5$
2. $y''+y'-2y=5x$
3. $y''-y'-6y=3x+5$
4. $y''-6y'+8y=3x$
5. $y''-2y'-8y=-x+2$
6. $y''-2y'-8y=5$
7. $y''-4y=x+2$
8. $y''-y'-12y=2$
9. $y''+4y'-5y=4x+2$
10. $y''+2y'-8y=3x+2$
11. $y''-7y'+12y=-3x+2$
12. $y''+5y'+4y=-3x+2$
13. $y''-2y'-8y=-3x+4$
14. $y''+6y'+8y=-3x+1$
15. $y''-5y'+4y=x+3$
16. $y''-3y'+2y=7x+1$
17. $y''-y'-12y=2x-1$
18. $y''+2y'-3y=4x+1$
19. $y''-4y'+4y=x-1$
20. $y''-4y'-5y=-3x+1$
21. $y''+y'-12y=x+2$
22. $y''-6y'+8y=-x+6$
23. $y''+5y'+4y=2$
24. $y''-8y'+15y=-2x+1$
25. $y''-4y'+3y=4x$

Задание 8.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью вида $\left(Ax+B\right)e^{\alpha x}$:

1. $y''+4y'+4y=\left(-2x+1\right)e^{2x}$
2. $y''+5y'-6y=\left(x+2\right)e^{2x}$
3. $y''-5y'+6y=\left(2x+3\right)e^{2x}$
4. $y''+5y'-6y=\left(x+2\right)e^{-6x}$
5. $y''+5y'+6y=\left(3x+1\right)e^{2x}$
6. $y''+7y'+12y=\left(x+3\right)e^{-4x}$
7. $y''-3y'-4y=\left(-2x+1\right)e^{x}$
8. $y''-5y'+4y=\left(x-2\right)e^{2x}$
9. $y''-3y'-4y=\left(-3x+1\right)e^{-x}$
10. $y''-4y'+4y=\left(3x-2\right)e^{2x}$
11. $y''-3y'-10y=e^{-x}$
12. $y''-6y'+9y=\left(3x+4\right)e^{3x}$
13. $y''-3y'-18y=\left(2x+1\right)e^{-x}$
14. $y''-10y'+25y=\left(x+2\right)e^{3x}$
15. $y''+5y'+6y=4xe^{-x}$
16. $y''-y'-12y=\left(-x+2\right)e^{-3x}$
17. $y''+y'-2y=5xe^{-x}$
18. $y''-3y'-10y=\left(2x+2\right)e^{-2x}$
19. $y''+2y'+y=\left(2x+4\right)e^{-x}$
20. $y''-2y'-6y=\left(2x+1\right)e^{3x}$
21. $y''-7y'+12y=\left(2x+4\right)e^{3x}$
22. $y''-4y'-12y=\left(3x+1\right)e^{6x}$
23. $y''-9y=\left(x+4\right)e^{3x}$
24. $y''-4y'-12y=\left(3x+1\right)e^{6x}$
25. $y''+y'-6y=\left(x+2\right)e^{2x}$

Задание 9.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения третьего порядка с правой частью вида $\left(Ax+B\right)e^{\alpha x}$:

1. $y'''-y'=\left(2x+3\right)e^{2x}$
2. $y'''-3y''+2y'=\left(2x+1\right)e^{2x}$
3. $y'''+2y''-8y'=\left(2x+3\right)e^{-x}$
4. $y'''-4y''-5y'=\left(2x+3\right)e^{-x}$

5. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = (2x+3)e^{-x}$

6. $y''' - 3y' - 2y = (2x-1)e^{2x}$

7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = (3x-1)e^{x}$

8. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (-x-1)e^{x}$

9. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = (2x+1)e^{-2x}$

10. $y''' - 5y'' + 6y' = (2x+1)e^{-x}$

11. $y''' - 3y'' = 2xe^{-x}$

12. $y''' - 9y' = 4xe^{-3x}$

13. $y''' + 5y'' + 4y' = 2xe^{-3x}$

14. $y''' + 7y'' + 12y' = -xe^{-3x}$

15. $y''' + 3y'' - y' - 3y = -xe^{-3x}$

16. $y''' - y'' = (2x+1)e^{3x}$

17. $y''' - 2y'' + y' = (6x+1)e^{2x}$

18. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (2x+3)e^{x}$

19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = (x+3)e^{2x}$

20. $y''' + 2y'' + y' = (x+5)e^{-x}$

21. $y''' + 3y'' + 2y' = (x-1)e^{-x}$

22. $y''' - 3y'' = (2x-1)e^{3x}$

23. $y''' + 4y'' + 4y' = (x+2)e^{2x}$

24. $y''' + y'' - 2y' = (x+2)e^{x}$

25. $y''' - 3y' + 2y = (4x+1)e^{x}$

Задание 10.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью вида $\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{\alpha x}$:

1. $y'' + y' - 2y = -\cos 2x \cdot e^{-3x}$
2. $y'' - 4y = \cos 2x \cdot e^{x}$
3. $y'' + y' - 2y = \cos x \cdot e^{x}$
4. $y'' - y' - 2y = \left(2\cos 3x + \sin 3x\right) \cdot e^{x}$
5. $y'' + 3y' + 2y = \left(2\cos 3x + \sin 3x\right) \cdot e^{x}$
6. $y'' + 3y' + 2y = \left(-\cos 3x + \sin 3x\right) \cdot e^{x}$
7. $y'' - 4y' + 3y = -\cos 3x + \sin 3x$
8. $y'' + y' - 2y = -\cos 2x + \sin 2x$
9. $y'' + 3y' + 2y = -\cos 2x + 3\sin 2x$
10. $y'' + 2y' + y = 2\cos 2x + 3\sin 2x$
11. $y'' - 2y' = \left(2\cos 2x + 2\sin 2x\right) \cdot e^{x}$
12. $y'' - 4y' = \left(-\cos 2x + 2\sin 2x\right) \cdot e^{x}$
13. $y'' - 4y' = -\cos 3x + 3\sin 3x$
14. $y'' - 2y' + 5y = \cos 2x \cdot e^{x}$
15. $y'' - 2y' + 5y = -\cos 3x + 3\sin 3x$
16. $y'' + 2y' + 5y = 2\sin 2x \cdot e^{x}$
17. $y'' + 4y = -2\sin 2x$
18. $y'' + 9y = -\sin 3x$
19. $y'' + 9y = 2\cos 3x - \sin 3x$
20. $y'' - 2y' + 2y = 2\cos 3x - \sin 3x$
21. $y'' - 2y' + 2y = \left(\cos x - \sin x\right) \cdot e^{x}$
22. $y'' + y = -\sin x \cdot e^{x}$
23. $y'' - 6y' + 10y = \left(\cos x + 2\sin x\right) \cdot e^{x}$

24. $y'' + 4y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$

25. $y'' + 16y = \cos 2x + 2\sin 2x$

Задание 11.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения третьего порядка с правой частью вида $\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{\alpha x}$:

1. $y''' - y' = \cos 2x + 2\sin 2x$
2. $y''' + y'' - 2y' = 2\sin 2x \cdot e^{-x}$
3. $y''' - 3y'' + 2y' = 3\cos x \cdot e^{-x}$
4. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2\sin x \cdot e^{-x}$
5. $y''' + y'' - 2y' = 3\cos x + 2\sin x$
6. $y''' - 3y' + 2y = \cos x + 2\sin x$
7. $y''' - 3y' + 2y = \left(\cos x + 2\sin x\right)e^{-2x}$
8. $y''' + 2y'' - y' - 2y = \left(\cos x + 2\sin x\right)e^{-3x}$
9. $y''' + 2y'' - 3y' = \left(\cos 2x + 2\sin 2x\right)e^{-3x}$
10. $y''' - 3y' + 2y = \cos 2x \cdot e^{-3x}$
11. $y''' + y'' - 2y' = 3\cos 2x \cdot e^{-x}$
12. $y''' + 4y' = \cos 2x \cdot e^{-x}$
13. $y''' + y' = 3\cos 2x$
14. $y''' + y' = 4\cos x$
15. $y''' + 2y'' = 4\cos x \cdot e^{-x}$
16. $y''' - 2y'' + 4y' = \left(2\cos x + 3\sin x\right)e^{-x}$
17. $y''' + 4y' - 4y = \left(2\cos x + 3\sin x\right)e^{-x}$
18. $y''' - 3y'' + 9y' - 5y = \sin 2x \cdot e^{x}$
19. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \sin x \cdot e^{-x}$
20. $y''' + 3y'' + 3y' + y = \sin 2x \cdot e^{x}$

21. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (\cos x + \sin x)e^{x}$

22. $y''' + 5y'' + 6y' = (\cos x + \sin x)e^{-x}$

23. $y''' + 7y'' + 12y' = 2\cos x \cdot e^{-x}$

24. $y''' - y'' - 12y' = -2\cos x \cdot e^{-x}$

25. $y''' - 3y'' - 4y' = (-\cos x + \sin x)e^{-x}$

Задание 12.

Пусть известны все корни характеристического уравнения. Составить соответствующее линейное однородное уравнение, выписать $y_{\text{о.о.}}$. По виду правой части составить частное $y_{\text{ч.н.}}$ и общее $y_{\text{о.н.}}$ решение неоднородного линейного уравнения.

1. $\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3, \\ f(x) = (5x-1)e^{2x} + 3x + x\cos x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i, \\ f(x) = 4x^2 - x + 5e^{2x} + 3\sin 2x \end{cases}$

3. $\begin{cases} \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm i, \\ f(x) = 1 - 2x + 7xe^{x}\cos x + 2\sin x \end{cases}$

4. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1,\ \lambda_3 = 5, \\ f(x) = 12x^2 - 5 + 3xe^{-x}\cos 5x \end{cases}$

5. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = -2 \pm i,\ \lambda_{3,4} = \pm 2i, \\ f(x) = 3\cos x + 5x\sin 2x + 11x^2 e^{-2x} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \lambda_{1,2,3} = -3,\ \lambda_{4,5} = 0, \\ f(x) = 19x^2 + 5x - 14e^{-3x} + \sin 3x \end{cases}$

7. $\begin{cases} \lambda_1 = -2, \ \ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i, \\ f(x) = \operatorname{sh} x + 10e^x \sin x - 2xe^{-2x} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 3, \ \ \lambda_3 = -3, \\ f(x) = 4\cos^2 x + (5x-1)\cos 3x \end{cases}$

9. $\begin{cases} \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = 2, \ \ \lambda_3 = -2, \\ f(x) = 1 + 2\operatorname{sh} 2x + 3x\cos 2x \end{cases}$

10. $\begin{cases} \lambda_1 = -1, \ \ \lambda_{2,3} = -3, \\ f(x) = -3 + 5xe^x \cos 3x + 2xe^{-x} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = 3 \pm 2i, \ \ \lambda_{3,4} = 2, \\ f(x) = xe^{3x}\cos 2x - 5xe^{2x} + \sin 2x \end{cases}$

12. $\begin{cases} \lambda_1 = 4, \ \ \lambda_2 = -4, \ \ \lambda_{3,4} = \pm 3i, \\ f(x) = (6x+1)\sin 4x + \left(7x^2 - 2\right)e^{-4x} + 2x\cos 3x \end{cases}$

13. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = 3, \ \ \lambda_{3,4} = 3 \pm 3i, \\ f(x) = 3x + 8\cos 3x + xe^{3x}\sin 3x \end{cases}$

14. $\begin{cases} \lambda_1 = 4, \ \ \lambda_{2,3} = \pm 2i, \\ f(x) = 2\operatorname{ch} 2x + \left(7x^2 + 1\right)e^{4x} - 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm i, \ \ \lambda_3 = 2, \\ f(x) = 2\sin^2 x + \left(4x^2 + 3x\right)e^{2x} - 2e^x \end{cases}$

16. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = 0, \ \ \lambda_{3,4} = -1 \pm i, \\ f(x) = 5x^3 + 3x - xe^{-x}\cos x + 6\sin x \end{cases}$

17. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = 2 \pm i, \ \ \lambda_{3,4} = \pm 2i, \\ f(x) = 3xe^{2x}\sin x - 4\sin 3x\cos x + 5x^2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = -2, \ \ \lambda_3 = -1, \ \ \lambda_4 = 2, \\ f(x) = \sin 2x + (3x-1)e^{-2x} + 3x \end{cases}$

19. $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 1, \ \ \lambda_{3,4} = -1, \\ f(x) = e^{-x}(7x+2) + 2x^2 + 6 + 7\cos x \end{cases}$

20. $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 3, \ \ \lambda_3 = -3, \\ f(x) = \cos 3x + 2\sin 3x + 7x^2 + 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \lambda_1 = 4, \ \ \lambda_2 = 1, \ \ \lambda_3 = -1, \\ f(x) = e^{x}(3x+2) + 2\sin 4x - 7e^{-x} \end{cases}$

22. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = 1, \ \ \lambda_{3,4} = \pm i, \\ f(x) = 2\cos x + e^{x}(6x-1) + 7e^{-x} + 9x^2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \lambda_1 = 3, \ \ \lambda_{2,3} = -3, \\ f(x) = \sin 2x + 3x^2 + 3 + e^{3x}(6x+1) \end{cases}$

24. $\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1, \ \ \lambda_{3,4} = 6, \\ f(x) = \frac{1}{2}\sin 6x + e^{6x}(7x+1) + e^{x}(2x-1) \end{cases}$

25. $\begin{cases} \lambda_1 = 2, \ \ \lambda_{2,3} = \pm 2i, \\ f(x) = 6\cos 2x + e^{-2x}(x+3) + 6x^2 \end{cases}$

§3. Уравнение Эйлера

Некоторые виды линейных уравнений с переменными коэффициентами с помощью замены переменных можно преобразовать в уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение Эйлера:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ \ \dots \ \ + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

где $a_k \in \mathbb{R}, \ k = 1, 2, \dots n, \ f(x) \in C(a,b).$

Введем замену независимой переменной по формулам $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = e^{-t}$ при $x < 0$). Пересчитаем производные, полагая y функцией от t:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t e^{-t} = \varphi_1\left(y'_t\right) e^{-t}, \quad \text{где} \quad \varphi_1\left(y'_t\right) \doteq y'_t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \left(y''_{tt} - y'_t\right) e^{-2t} = \varphi_2\left(y'_t, y''_{tt}\right) e^{-2t},$$

где $\varphi_2\left(y'_t, y''_{tt}\right) \doteq y''_{tt} - y'_t$. Несложно показать по индукции, что

$$y^{(n)}_{x^n} = \varphi_n\left(y'_t, y''_{tt}, \ldots, y^{(n)}_{x^n}\right) e^{-nt}.$$

Подставляя полученные выражения для производных в исходное уравнение, в каждом слагаемом сможем сократить множители, содержащие явно t:

$$x^k y^{(k)} = e^{kt}\varphi_k\left(y'_t, y''_{tt}, \ldots, y^{(k)}_{t^k}\right) e^{-kt} = \varphi_k\left(y'_t, y''_{tt}, \ldots, y^{(k)}_{t^k}\right).$$

Таким образом, получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пример 8. Решить уравнение $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 6\ln x$.

Решение. Подставляя $x = e^t$ ($x > 0$) и выражения для y'_x и y''_{xx} (см. выше), получим

$$e^{2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) e^{-2t} + 3e^t y'_t e^{-t} - 3y = 6t,$$

$$y''_{tt} + 2y'_t - 3y = 6t.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ имеет различные вещественные корни $\lambda = 1$ и $\lambda = -3$, следовательно,

$$y_{\text{о.о.}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}.$$

Правая часть неоднородного уравнения имеет специальный вид. Замечая, что среди корней характеристического уравнения нет значения $\lambda = 0$, отвечающего правой части, частное решение ищем в форме $y_{\text{ч.н.}}(t) = At + B$.

Подставляя в неоднородное уравнение $y' = A$ и $y'' = 0$, получим $2A - 3(At + B) = 6t$, откуда $A = -2$, $B = -\dfrac{4}{3}$. Итак,

$$y_{\text{о.н.}}(t) = y_{\text{о.о.}}(t) + y_{\text{ч.н.}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} - 2t - \frac{4}{3}.$$

Возвращаясь к исходной независимой переменной, получаем ответ:

$$y_{\text{о.н.}}(x) = C_1 x + C_2 x^{-3} - 2\ln x - \frac{4}{3}.$$

Замечание 1. Уравнение

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, приводится к уравнению с постоянными коэффициентами заменой $ax + b = e^t$ при $ax + b > 0$ (или $ax + b = e^{-t}$ при $ax + b < 0$).

ГЛАВА IV

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ

Решение линейного дифференциального уравнения порядка выше первого с переменными коэффициентами не всегда можно выразить через элементарные функции. В таком случае можно представить искомое решение в виде степенного ряда.

Для примера рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Предположим, что функции $p(x)$, $q(x)$ разлагаются в степенные ряды, сходящиеся при $|x - x_0| < r$, т. е.

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{2}$$

Напомним, что такие функции называются аналитическими.

Теорема 1. Если функции $p(x)$, $q(x)$ – аналитические при $|x - x_0| < r$, то всякое решение $y = y(x)$ уравнения (1) является аналитическим при $|x - x_0| < r$, т. е. разлагается в степенной ряд $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k$, который сходится при $|x - x_0| < r$.

Для упрощения изложения считаем $x_0 = 0$, тогда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \tag{3}$$

Используя правило дифференцирования степенных рядов, получим:

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, x^{k-1},$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, C_k\, x^{k-2}.$$

Подставляя $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ в уравнение (1), имеем:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1) C_k\, x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^k = 0. \qquad (4)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots,$ получим рекуррентную систему линейных уравнений относительно неизвестных $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$

Заметим, что коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, а также $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ нам известны.

Таким образом, система имеет вид:

$$\begin{array}{c|c} x^0 & 2C_2 + a_0 C_1 + b_0 C_0 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2 C_2 + 2a_0 C_2 + b_0 C_1 + b_1 C_0 = 0, \\ x^2 & 4\cdot 3 C_4 + 3a_0 C_3 + a_2 C_1 + b_0 C_2 + b_1 C_1 + b_2 C_0 = 0, \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array} \qquad (5)$$

Заметим, что каждое из уравнений (5) содержит на один коэффициент больше, чем предыдущее. В первом уравнении считаем C_0, C_1 произвольными, и они будут играть роль произвольных постоянных.

Если задать C_0, C_1, то из первого уравнения найдем C_2, из второго – C_3, из третьего – C_4 и т. д. Одним словом, из $(s+1)$-го уравнения можно определить C_{s+2}, зная $C_0, C_1, \ldots, C_{s+1}$.

На практике поступают следующим образом. Находим два линейно независимых решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, как было описано выше, полагая константы $C_0=1$, $C_1=0$ для решения $y_1(x)$ и $C_0=0$, $C_1=1$ для решения $y_2(x)$.

В этом случае $y_1(x)$, $y_2(x)$ будут удовлетворять следующим начальным условиям:

$$y_1(0)=1, \quad y_1'(0)=0;$$
$$y_2(0)=0, \quad y_2'(0)=1.$$

В силу линейной независимости решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ всякое решение уравнения (1) будет являться линейной комбинацией этих решений, т. е.

$$y(x)=A\,y_1(x)+B\,y_2(x).$$

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y''-xy'-2y=0 \tag{6}$$

в виде степенного ряда.

Решение. Здесь $p(x)=-x$, т. е. $a_0=0$, $a_1=-1$, $a_i=0$ для всех $i\ge 2$; $q(x)=-2$, т. е. $b_0=-2$, $b_j=0$ для всех $j\ge 1$.

Ищем $y(x)$ в виде степенного ряда $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k x^k$, тогда, подставляя $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ в (6), получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,C_k\,x^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty} k\,C_k\,x^k-2\sum_{k=0}^{\infty} C_k\,x^k=0. \tag{7}$$

Расписывая подробно (7), имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &2C_2x^0+3\cdot 2C_3x^1+4\cdot 3C_4x^2+5\cdot 4C_5x^3+6\cdot 5C_6x^4+\ \dots \\ &\quad -\left(C_1x+2C_2x^2+3C_3x^3+4C_4x^4+\ \dots\ \right)- \\ &\quad\quad -2\left(C_0x^0+C_1x^1+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+\ \dots\ \right)=0. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0,$ тогда $C_0=1,\ C_1=0.$ Для нахождения коэффициентов $C_i,\ i\ge 2,$ имеем соотношения:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 2C_2-2C_0=0 \quad \Rightarrow C_2=C_0=1, \\
x^1 & 3\cdot 2C_3-C_1-2C_1=0 \quad \Rightarrow C_3=0, \\
x^2 & 4\cdot 3C_4-2C_2-2C_2=0 \quad \Rightarrow C_4=1/3, \\
x^3 & 5\cdot 4C_5-3C_3-2C_3=0 \quad \Rightarrow C_5=0, \\
x^4 & 6\cdot 5C_6-4C_4-2C_4=0 \quad \Rightarrow C_6=1/(3\cdot 5), \\
\ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{array}$$

Таким образом,

$$y_1(x)=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{3\cdot 5}x^6+\ \ldots\quad . \tag{9}$$

Пусть $y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1,$ тогда $C_0=0,\ C_1=1.$ Приравнивая коэффициенты при $x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ \ldots$ получим

$$C_2=0,\ \ C_3=\frac{1}{2},\ \ C_4=0,\ \ C_5=\frac{1}{2\cdot 4},\ \ C_6=0,\ \ C_7=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6},\ \ \ldots .$$

Ясно, что $C_{2k}=0,\ \ C_{2k+1}=\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)}$, где $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y_2(x)&=x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\ \ldots = \\ &=x\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\ \ldots\right)=xe^{\frac{x^2}{2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$y(x)=A\,y_1(x)+B\,y_2(x),$$

где $y_1(x)$ задается формулой (9), $y_2(x)$ – формулой (10), а A и B – произвольные постоянные.

Заметим, что $y(0)=A,\ y'(0)=B.$

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' + xy = 0. \tag{11}$$

Решение. Ищем решение уравнения (11) в виде ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k x^k$. Подставляя $y,\ y''$ в уравнение, получим соотношение

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,C_k\,x^{k-2} + x\sum_{k=0}^{\infty} C_k\,x^k = 0. \tag{12}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для нахождения C_k:

$$\begin{array}{c|c}
x^0 & 2C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \\
x^1 & 3\cdot 2C_3 + C_0 = 0, \\
x^2 & 4\cdot 3C_4 + C_1 = 0, \\
x^3 & 5\cdot 4C_5 + C_2 = 0, \\
\ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Из уравнений получаем

$$C_2 = 0, \quad C_{k+3} = -\frac{C_k}{(k+2)\,(k+3)}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Положим $C_0 = 1,\ C_1 = 0,$ тогда $C_{3m} \neq 0$ для всех $m = 0,\ 1, \ldots$, а все остальные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, имеем

$$C_{3(m+1)} = -\frac{C_{3m}}{(3m+2)\,(3m+3)}, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

откуда

$$C_{3m} = \frac{(-1)^m}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ \ldots\ \cdot(3m-1)3m}, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Построенное решение имеет вид:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ \ldots \ \cdot (3m-1)3m}. \tag{13}$$

Для получения второго решения положим $C_0 = 0,\ C_1 = 1.$ Тогда $C_{3m+1} \neq 0$ для всех $m = 0, 1, \ldots$, а все остальные коэффициенты равны нулю. Таким образом,

$$C_1 = 1, \quad C_{3m+1} = \frac{(-1)^m}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ \ldots \ \cdot 3m(3m+1)}, \quad m = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Следовательно,

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ \ldots \ \cdot 3m(3m+1)}. \tag{14}$$

Все решения уравнения (11) выражаются формулой

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x) =$$
$$= A\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ \ldots \ \cdot (3m-1)3m}\right) +$$
$$+ B\left(x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ \ldots \ \cdot 3m(3m+1)}\right).$$

Упражнение 1. Покажите, что дифференциальное уравнение $y'' + xy' + y = 0$ имеет линейно независимые решения

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \ldots \ \cdot (3m+1)},$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ \ldots \ + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Упражнение 2. Покажите, что дифференциальное уравнение $y'' - \left(2 + \dfrac{x^2}{4}\right) y = 0$ имеет в качестве своих решений функции

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

где $C_0 = C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 2,$

$$C_{k+2} = 2C_k + \frac{k(k-1)}{4} C_{k-2}, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots .$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2005. 275 с.
2. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2006. 275 с.
3. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 383 с.
4. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Спец. литература, 1996. 370 с.
5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высшая школа, 1989. 383 с.
6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 231 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Ижевск: РХД, 2005. 174 с.
8. Шолохович Ф.А. Лекции по дифференциальным уравнениям (университетский курс). Екатеринбург: Урал. изд-во, 2005. 231 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ