Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 651–657.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.51
MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

О слоистых течениях плоской свободной конвекции

С. Н. Аристов, Е. Ю. Просвиряков

Построены новые точные стационарные решения системы Обербека – Буссинеска, описывающие слоистые течения конвекции Бенара – Марангони. Рассмотрены граничные условия двух типов: задание градиента температуры на одной из границ и на обеих границах одновременно. Показано, что при задании градиента температуры задача является существенно двумерной: не существует линейного преобразования, позволяющего преобразовать исследуемые течения к одномерным. Полученные решения физически проинтерпретированы, и найдены размеры слоев, при которых отсутствует трение на твердой поверхности и происходит смена направления скорости на свободной поверхности.

Ключевые слова: слоистые течения, аналитические решения, полиномиальные решения, понижение размерности, конвекция Бенара – Марангони

1. Введение

Описание тепловых потоков жидкости и газа, как известно, происходит благодаря интегрированию системы уравнений Обербека – Буссинеска [1, 2]. В связи с различной природой стратификации жидкости принято выделять два типа течений: адвективные и конвективные. Адвективные течения жидкости или газа индуцируются горизонтальным градиентом плотности (в качестве частного случая причины возникновения таких течений необходимо отметить наличие горизонтального градиента температуры). Характерное отличие этих

Получено 9 июля 2013 года
После доработки 5 сентября 2013 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12–01–00023–а), ФСР МФП НТС (программа СТАРТ) и ИВФ РТ (программа СТАРТ).

Аристов Сергей Николаевич
asn@icmm.ru
Институт механики сплошных сред УрО РАН
614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1

Просвиряков Евгений Юрьевич
evgen_pros@mail.ru
Казанский государственный национальный исследовательский университет им. А. Н. Туполева (КАИ)
420111, Россия, г. Казань, ул. Карла Маркса, д. 10

течений от конвективных заключается в том, что скорость потока перпендикулярна действию сил тяжести и плавучести. Необходимость изучения адвекции связана с решением задач геофизической гидродинамики [3] и с описанием некоторых технологических процессов [4]. В качестве первой работы, в которой описаны тепловые течения, индуцированные линейным распределением температуры на границе, необходимо указать работу Остроумова [5]. В статье [6] впервые было получено решение, описывающее адвекцию, которую вызывают термокапиллярные силы на свободной поверхности. Наиболее полно и исчерпывающе развитие и обобщение решений Остроумова и Бириха на другие классы жидкостей представлено в работах [7–11]. Отметим, что существует более широкий класс адвективных и конвективных течений, рассмотренных в [12–15]. Этот класс обобщает класс Линя [16] для уравнений магнитной динамики, в котором гидродинамические и магнитные поля линейны по горизонтальным координатам. В [12] приведена классификация точных решений уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных, а в [17] для уравнений газовой динамики и естественной конвекции были построены решения, зависящие от одной пространственной переменной. Несмотря на богатую историю исследований адвективных и конвективных течений, следует отметить, что описаны течения только для случая одинаково распределенного горизонтального градиента температуры на обеих границах, хотя возможно нагревать только одну из границ [14, 15]. Наибольший интерес представляет задача, когда имеет место свободная конвекция Бенара–Марангони. Поскольку отсутствуют решения, описывающие такого рода теплообмен, то в настоящей работе будет построено соответствующее точное решение.

2. Постановка задачи

Уравнения адвекции и конвекции, записанные в декартовой системе координат, в приближении Буссинеска имеют следующий вид [1, 2]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right) + g\beta T, \qquad (2.1)\\
\frac{\partial T}{\partial t} + V_x\frac{\partial T}{\partial x} + V_y\frac{\partial T}{\partial y} + V_z\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.
\end{gathered}$$

В системе уравнений (2.1) введены следующие обозначения: V_x, V_y, V_z — координаты вектора скорости, P — отклонение давления от гидростатического, деленное на постоянную среднюю плотность ρ жидкости, T — отклонение от средней температуры, ν, χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно, g — ускорение свободного падения. Отметим, что все функции, входящие в систему (2.1), являются непрерывно дифференцируемыми по всем переменным до второго порядка включительно.

Рассмотрим плоскопараллельное движение неоднородно нагретой жидкости (скорости зависят только от поперечной координаты z, а поля давления и температуры трехмерны). В этом случае система Обербека – Буссинеска переопределена, а ее решение будем искать в виде [14, 15, 17]

$$V_x = U, \quad V_y = V, \quad T = T_0 + T_1 x + T_2 y, \quad P = P_0 + P_1 x + P_2 y. \tag{2.2}$$

Отметим, что все функции в разложениях (2.2) зависят от поперечной координаты z и времени t. Очевидно, что вертикальная скорость V_z равна нулю в силу рассматриваемого течения. Важно заметить, что представление решения в форме (2.2) обобщает решение Бириха, при наложении условия постоянства на значения функций T_1 и T_2.

Подставим класс решений (2.2) в систему Обербека – Буссинеска (2.1), получим линейную систему уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial t} = -P_1 + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -P_2 + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial P_0}{\partial z} = g\beta T_0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2, \\
\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} + U T_1 + V T_2 = \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Система (2.3) далее будет изучаться при различных режимах течений и различных граничных условиях, представляющих физический интерес.

3. Стационарные решения конвекции Бенара – Марангони при распределении градиента температуры на одной из границ

Ограничимся изучением стационарных течений, описываемых системой (2.3). В этом случае система (2.3) принадлежит классу систем обыкновенных дифференциальный уравнений тринадцатого порядка. Для нахождения постоянных интегрирования общих решений стационарной краевой задачи сформулируем граничные условия для системы (2.3). На нижней $z = 0$ (твердой) границе выполняются соотношения

$$U = V = 0, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = T_2 = 0. \tag{3.1}$$

На верхней (свободной) границе справедливы условия

$$\begin{gathered}
P_0 = S, \quad P_1 = P_2 = 0, \\
T_0 = 0, \quad T_1 = A, \quad T_2 = B, \\
\eta \frac{dU}{dz} = -\sigma T_1, \quad \eta \frac{dV}{dz} = -\sigma T_2.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь σ и η — коэффициенты температурного поверхностного натяжения и динамической вязкости соответственно.

Решение системы уравнений (2.3), удовлетворящей граничным условиям (3.1) и (3.2), имеет вид

$$\begin{gathered}
T_1 = \frac{Az}{h}, \quad T_2 = \frac{Bz}{h},\\
P_1 = \frac{Ag\beta}{2h}\left(z^2 - h^2\right), \quad P_2 = \frac{Bg\beta}{2h}\left(z^2 - h^2\right),\\
U = -\frac{A\sigma z}{\eta} + \frac{Ag\beta}{\nu h}\left[\frac{z^4}{24} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{3}\right],\\
V = -\frac{B\sigma z}{\eta} + \frac{Bg\beta}{\nu h}\left[\frac{z^4}{24} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{3}\right],\\
T_0 = \frac{\left(A^2 + B^2\right)}{\chi h^2}\left[\frac{g\beta}{\nu}\left(\frac{z^7}{1008} - \frac{h^2 z^5}{80} + \frac{h^3 z^4}{36} - \frac{41 h^6 z}{2520}\right) + \frac{\sigma}{\eta}\left(-\frac{h z^4}{12} + \frac{h^4 z}{12}\right)\right],\\
P_0 = \frac{g\beta\left(A^2 + B^2\right)}{\chi h^2}\frac{g\beta}{\nu}\left(\frac{z^8}{8064} - \frac{h^2 z^6}{480} + \frac{h^3 z^5}{180} - \frac{41 h^6 z^2}{5040} + \frac{61 h^8}{15600}\right) +\\
+ \frac{g\beta\left(A^2 + B^2\right)}{\chi h^2}\frac{g\beta\sigma}{\nu\eta}\left(-\frac{h z^5}{60} + \frac{h^4 z^2}{24} - \frac{h^6}{40}\right) + S.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Проинтерпретируем полученные решения (3.3) с физической точки зрения. Вычислим касательные напряжения, возникающие на твердой стенке:

$$\tau_{xz} = \eta\frac{dU}{dz} = -A\sigma + \frac{Ag\beta\rho h^2}{3}, \quad \tau_{yz} = \eta\frac{dV}{dz} = -B\sigma + \frac{Bg\beta\rho h^2}{3}. \tag{3.4}$$

Существует такая толщина слоя $h_1 = \sqrt{\frac{3\sigma}{g\beta\rho}}$, что касательные напряжения на нижней границе обращаются в нуль одновременно. Такой эффект наблюдается у жидкостей, коэффициент поверхностного натяжения которых убывает с ростом температуры. Таких жидкостей, как известно, большинство [2]. Направление скорости по оси абсцисс и по оси ординат на верхней границе меняет знак при определенной толщине слоя: $h_1 = \sqrt{\frac{8\sigma}{g\beta\rho}}$.

Решение для краевой задачи, описывающей конвекцию Бенара–Рэлея, индуцированной градиентом температуры на твердой границе, записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}
T_1 = A\left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad T_2 = B\left(1 - \frac{z}{h}\right),\\
P_1 = \frac{Ag\beta}{2h}\left(-z^2 + 2zh - h^2\right), \quad P_2 = \frac{Bg\beta}{2h}\left(-z^2 + 2zh - h^2\right),\\
U = \frac{Ag\beta}{\nu h}\left[-\frac{z^4}{24} + \frac{z^3 h}{6} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{6}\right],\\
V = \frac{Bg\beta}{\nu h}\left[-\frac{z^4}{24} + \frac{z^3 h}{6} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{6}\right],\\
T_0 = \frac{g\beta\left(A^2 + B^2\right)}{\nu\chi h^2}\left[\frac{z^6}{144} - \frac{h z^5}{24} + \frac{5h^2 z^4}{48} - \frac{5h^3 z^3}{36} + \frac{h^4 z^2}{12} - \frac{h^5 z}{72}\right],\\
P_0 = \frac{g^2\beta^2\left(A^2 + B^2\right)}{\nu\chi h^2}\left[\frac{z^7}{1008} - \frac{h z^6}{144} + \frac{5h^2 z^5}{240} - \frac{5h^3 z^4}{144} + \frac{h^4 z^3}{36} - \frac{h^5 z^2}{144} - \frac{h^7}{42}\right] + S.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Несмотря на достаточно интересные и нетривиальные следствия, полученные при анализе течений, наибольший интерес представляет ситуация, в которой на разных границах заданы разные градиенты температуры. Это объясняется тем фактом, что если градиенты одинаковые, то при помощи невырожденного линейного преобразования (преобразование поворота на угол $\varphi = \arctan \frac{A}{B}$) рассматриваемую двумерную задачу можно свести к одномерной. Рассмотрим далее плоскую термокапиллярную конвекцию Бенара–Марангони, неприводимую к одномерной.

4. Стационарные решения конвекции Бенара–Марангони при распределении градиента температуры на разных границах

Для стационарных уравнений движений (2.3) запишем граничные условия. На нижней границе ($z = 0$) граничные условия выглядят следующим образом:

$$U = V = 0, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = B. \tag{4.1}$$

На верхней границе ($z = h$) справедливы условия

$$\begin{gathered} P_0 = S, \quad P_1 = P_2 = 0, \\ T_0 = 0, \quad T_1 = A, \quad T_2 = 0, \\ \eta \frac{dU}{dz} = -\sigma T_1, \quad \eta \frac{dV}{dz} = -\sigma T_2. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Вычисляем аналитическое решение краевой задачи (2.3), (4.1) и (4.2):

$$\begin{gathered} T_1 = \frac{Az}{h}, \quad T_2 = B\left(1 - \frac{z}{h}\right), \\ P_1 = \frac{Ag\beta}{2h}\left(z^2 - h^2\right), \quad P_2 = \frac{Bg\beta}{2h}\left(-z^2 + 2zh - h^2\right), \\ U = -\frac{A\sigma z}{\eta} + \frac{Ag\beta}{\nu h}\left[\frac{z^4}{24} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{3}\right], \\ V = \frac{Bg\beta}{\nu h}\left[-\frac{z^4}{24} + \frac{z^3 h}{6} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{6}\right], \\ T_0 = \frac{1}{\chi}\left[\frac{(a+b)\,z^7}{42} - \frac{bhz^6}{6} - \frac{(3a-5b)\,h^2 z^5}{10} + \frac{(4a-5b)\,h^3 z^4}{6} + \frac{2bh^4 z^3}{3}\right] - \\ - \frac{(41a+20b)\,h^6 z}{105\chi} + \frac{\sigma A^2}{h\chi\eta}\left(-\frac{hz^4}{12} + \frac{h^4 z}{12}\right), \\ P_0 = \frac{g\beta}{\chi}\left[\frac{(a+b)\,z^8}{336} - \frac{bhz^7}{42} - \frac{(3a-5b)\,h^2 z^6}{60} + \frac{(4a-5b)\,h^3 z^5}{30} + \frac{bh^4 z^4}{6}\right] - \\ - \frac{g\beta\,(41a+20b)\,h^6 z^2}{210\chi} + \frac{g\beta\sigma A^2}{h\chi\eta}\left(-\frac{hz^5}{60} + \frac{h^4 z^2}{24}\right) + S. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Здесь, для компактной записи, введены следующие обозначения: $a = \dfrac{A^2 g\beta}{2h^2}$ и $b = \dfrac{B^2 g\beta}{2h^2}$.

Сравнивая структуры решений краевых задач, получим, что касательные напряжения на нижней границе обращаются в нуль при любой толщине слоя, тогда как равенство нулю достигается при той же толщине, вытекающей из формулы (3.4). Направление скорости U по оси Ox меняет знак при значении толщины слоя $h_2 = \sqrt{\frac{8\sigma}{g\beta\rho}}$, а направление скорости V — постоянно и сонаправлено оси ординат.

5. Заключение

В настоящей работе рассмотрены слоистые течения конвекции Бенара – Марангони вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемые градиентом температуры. Получены решения для двух типов распределений градиента: компоненты градиента заданы только на одной границе (свободной или твердой) и на обеих границах одновременно. Показано, что распределение температурного градиента на верхней и нижней границах слоя жидкости приводит к двумерной задаче, которую нельзя привести к одномерной линейными преобразованиями, в отличие от случая распределения температуры на одной из границ. Вычислены толщины слоев жидкости, при которых наблюдается отсутствие трения на нижней границе и происходит смена направления вектора скорости на свободной поверхности.

Список литературы

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 6: Гидродинамика. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.

[2] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392 с.

[3] Кирдяшкин А. Г. Тепловые гравитационные течения и теплообмен в астеносфере. Новосибирск: Наука, СО РАН, 1989. 81 с.

[4] Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Москва: Физматлит, 1959. 699 с.

[5] Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Москва: ГИТТЛ, 1952. 256 с.

[6] Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ, 1966, № 3, с. 69–72.

[7] Napolitano L. G. Plane Marangoni – Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronaut., 1980, vol. 7, no. 4, pp. 461–478.

[8] Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer // Microgravity Sci. Technol., 2009, vol. 21, Suppl. 1, pp. 129–137.

[9] Андреев В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препринт № 1-10, Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010. 68 с.

[10] Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ, 2013, № 2, с. 3–29.

[11] Ингель Л. Х., Калашник М. В. Нетривиальные особенности гидротермодинамики морской воды и других стратифицированных растворов // УФН, 2012, т. 182, № 4, с. 379–406.

[12] Сидоров А. Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды / А. Ф. Сидоров, Ю. Н. Кондюрин. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 101–117.

[13] Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ, 1989, № 2, с. 34–40.

[14] Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. 155 с.

[15] Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.

[16] Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal., 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395.

[17] Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственный переменных // ТОХТ, 2009, т. 43, № 5, с. 547–566.

On laminar flows of planar free convection

Sergey N. Aristov[1], Euguny Yu. Prosviryakov[2]

[1]Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
Ak. Koroleva str. 1, Perm, 614013, Russia

[2]Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev
Karl Marx str. 10, Kazan, 420111, Russia

[1]asn@icmm.ru, [2]evgen_pros@mail.ru

New exact steady-state solutions of the Oberbeck – Boussinesq system which describe laminar flows of the Benard – Marangoni convection are constructed. We consider two types of boundary conditions: those specifying a temperature gradient on one of the boundaries and those specifying it on both boundaries simultaneously. It is shown that when the temperature gradient is specified the problem is essentially two-dimensional: there is no linear transformation allowing the flows to be transformed into one-dimensional ones. The resulting solutions are physically interpreted and dimensions of the layers are found for which there is no friction on the solid surface and a change occurs in the direction of velocity on the free surface.

MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05
Keywords: laminar flow, analytical solution, polynomial solution, decrease in dimension, Benard – Marangoni convection

Received July 9, 2013, accepted September 5, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657 (Russian)