Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 761–763.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

О неопределенности в некоторых задачах о трении

А. Беген

При исследовании равновесия с трением у системы неизменяющихся твердых тел, на которые действуют несколько данных сил, закон Кулона и обычные законы механики неизменяющихся твердых тел порой приводят к неопределенности.

В одной из недавних статей (*Nouvelles Annales*, 1923)[1] я предположил, что эта неопределенность объясняется не несовершенством закона Кулона, а недостаточным количеством данных в задаче. Для того чтобы определить задачу полностью, эти данные должны содержать в себе не только положения твердых тел, взятых как одно целое, но и начальное состояние их бесконечно малых деформаций.

В настоящей статье я надеюсь подтвердить свое предположение, показав, что, в зависимости от начального состояния этих деформаций, в реальной задаче мы получим то или иное из решений, которые нам дает теория неизменяющихся твердых тел в качестве равновозможных.

Пусть, например, твердое тело S в точках A_1, A_2 соприкасается с неподвижными препятствиями. С другой стороны, на него действуют данные силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Я предполагаю, что исследование положения равновесия этого твердого тела с помощью закона Кулона и обычной механики неизменяющихся твердых тел приводит к двум следующим решениям.

Первое решение. Существуют два вектора реакции R_1, R_2 в точках A_1 и A_2, направленные внутрь конусов трения и образующие вместе с силами $F_1, F_2, \ldots, F_n$ систему векторов, эквивалентную нулю.

Второе решение. Существуют два вектора реакции R'_1, R'_2 в точках A_1 и A_2, а также система начальных сил инерции $-m_1J_1, -m_2J_2, \ldots, -m_pJ_p$, образующие вместе с данными силами $F_1, F_2, \ldots, F_n$ систему векторов, эквивалентную нулю, причем реакции R_1, R_2 удовлетворяют закону Кулона для мнимого перемещения.[2]

Beghin H. Sur l'indétermination de certains problèmes de frottement. *Nouvelles annales de mathématiques*, 5^e *série*, 1924, T. 3, pp. 343–347. Перевод с французского В. В. Шуликовской.

[1]Речь идет как раз о предыдущей статье, см. стр. 755–759. — *Прим. перев.*

[2]Заодно заметим, что если геометрическое положение тела S зависит от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, то эти начальные силы инерции соответствуют нулевым значениям первых производных $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ этих параметров по времени, причем не все вторые производные $\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots$ обращаются в нуль. В том частном случае, когда скорости равны нулю, распределение ускорений в теле S является геликоидальным, как если бы речь шла о скоростях.

Я предполагаю, что тело S является *идеально упругим*, то есть что его внутренние напряжения в произвольный момент времени зависят *только* от состояния деформаций в этот момент времени.

Я отпускаю тело S, не сообщив ему скорости, при этом на него действуют данные силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и силы R_1, R_2, определенные в *первом решении*. Поскольку все эти силы образуют эквивалентную нулю систему векторов, тело S остается в покое, а его бесконечно малые деформации примут под действием этих сил состояние $(\mathscr{E})$, в котором каждый малый элемент тела находится в равновесии под действием тех данных сил, которые приложены к нему, и напряжений вдоль его поверхности — напряжений, которые характеризуются значением самих этих деформаций.

Если я прикладываю к неподвижным препятствиям в точках A_1 и A_2 силы ρ_1, ρ_2, полученные из сил R_1, R_2 изменением знака, то бесконечно малые деформации этих препятствий примут состояние $(\mathscr{O})$.

Деформировав таким образом тело S и препятствия, я привожу их в соприкосновение в точках A_1 и A_2 и устраняю силы R_1, R_2, ρ_1, ρ_2. Тогда элементы, имеющиеся в точке A_1, действуют непосредственно друг на друга с реакциями, равными взаимно уничтожающимся силам R_1, ρ_1.[3] Точно так же элементы, находящиеся в точке A_2, действуют друг на друга с реакциями, равными R_2 и ρ_2 соответственно. *Поэтому вся система остается в состоянии покоя, и каждый ее элемент сохраняет свое начальное состояние деформации.*

Теперь представим, что я отпускаю тело S, не сообщив ему скорости; при этом, с одной стороны, на него действуют данные силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, с другой стороны — силы R_1', R_2', определенные во *втором решении*, наконец, силы $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$, приложенные к различным элементам, составляющим тело S, и в точности совпадающие с силами инерции $-m_1 J_1$, $\ldots$, $-m_p J_p$, введенными во *втором решении*.

Эти силы, действующие, в соответствии с моим предположением, на тело S, образуют систему векторов, эквивалентную нулю, так что тело S остается в покое и принимает определенное состояние $(\mathscr{E}')$ бесконечно малых деформаций.

Если точно так же приложить к неподвижным препятствиям в точках A_1 и A_2 силы ρ_1' и ρ_2', в точности противоположные силам R_1' и R_2', то эти препятствия примут состояние $(\mathscr{O}')$ бесконечно малых деформаций.

Тогда я буду действовать так же, как и раньше: твердое тело S и препятствия, находящиеся в состояниях деформации $(\mathscr{E}')$ и $(\mathscr{O}')$, приходят в соприкосновение; затем я убираю силы R_1', R_2', ρ_1', ρ_2', тут же заменив их на взаимные реакции, соответственно равные этим силам; в результате тело S останется в покое, состояния деформации останутся равными $(\mathscr{E}')$ и $(\mathscr{O}')$.

Наконец, я уберу силы $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$. Точно в момент исчезновения этих сил в состоянии внутренних напряжений ничего не изменится, потому что эти напряжения определяются состояниями $(\mathscr{E}')$ и $(\mathscr{O}')$; но тогда малые элементы, образующие тело S, больше не находятся в равновесии: у каждого из них появляется сила инерции, в точности совпадающая с той из только что исчезнувших сил $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$, которая прикладывалась к этому элементу. Именно эти силы инерции и предсказывало *второе решение*.

Итак, твердое тело, оставленное описанным выше способом в состоянии $(\mathscr{E}')$, осуществляет именно то движение, которое было предсказано во втором решении.

[3] Если бы мы взяли в точке A_1 любую другую систему реакций R_1', ρ_1', то появилась бы сила инерции $(R_1) - (R_1')$, действующая на элемент тела S, и противоположная ей сила инерции $(\rho_1) - (\rho_1')$, действующая на элемент препятствия; нетрудно убедиться, что направление этих сил противоречило бы закону Кулона.

Заметим заодно, что элементарное перемещение тела S сохраняет состояние $(\mathscr{E}')$ его деформаций, потому что начальные силы инерции, взятые по отдельности для этих разных элементов, соответствуют общему движению всего тела, не вносящему никаких новых деформаций. То же самое верно и для состояния $(\mathscr{O}')$ деформаций у препятствий.

Чтобы упростить обозначения и сделать всю простоту рассуждений более очевидной, я рассмотрел только одно тело, соприкасающееся с неподвижными препятствиями. Впрочем, очевидно, что данное рассуждение без изменений применяется к произвольному числу твердых тел, соприкасающихся с трением друг с другом и с неподвижными препятствиями.

С другой стороны, я предположил, что тела являются идеально упругими, то есть что внутренние напряжения в них зависят только от состояния деформаций. Но в изложенном выше рассуждении ничего не изменится, если эта упругость сопровождается определенной вязкостью, то есть если напряжения, кроме всего прочего, зависят от скоростей, потому что начальные скорости в рассматриваемом положении предполагаются равными нулю. Однако эти рассуждения утратят свою силу, если в пределах наших наблюдений тела будут способны испытывать постоянные [перманентные] деформации.

Я только что показал, что при подходящем выборе начального состояния бесконечно малых деформаций рассматриваемой системы мы можем по своему желанию реализовать то или иное из решений, которое дает нам обычная механика неизменяющихся твердых тел. Если начальное состояние отличается от состояний $(\mathscr{E}\mathscr{O})$, $(\mathscr{E}'\mathscr{O}')$, то исследование задачи усложняется: нам придется различать среди состояний деформации те, которые реализуют первое из имеющихся решений, и те, которые реализуют второе, а это, очевидно, довольно сложно сделать.

Впрочем, целью данной статьи было только установить, что в случае неопределенности у задач с трением *к различным решениям следует относиться одинаково, считать их в равной мере реализуемыми, следовательно, мы не должны выбирать какое-то одно из них, не уточнив предварительно начальное состояние деформаций*.

Sur l'indétermination de certains problèmes de frottement

H. Beghin

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 761–763 (Russian)
Originally published in: *Nouvelles annales de mathématiques*, 5[e] *série*, 1924, T. 3, p. 343–347.