



УДК: 532.5, 532.511, 532.1-2
MSC 2010: 76M23

Эволюция точечного вихря дипольного типа в круговой области

К. Н. Кулик, А. В. Тур, В. В. Яновский

В работе рассмотрено движение дипольного точечного вихря в круговой области, занятой идеальной жидкостью. Получены уравнения движения дипольного вихря в такой области, ограниченной твердой стенкой. Уравнения движения имеют гамильтонов вид. Доказана интегрируемость в квадратурах уравнений движения точечного дипольного вихря в круговой области. Обсуждается характер движения вихря.

Ключевые слова: точечный вихрь дипольного типа, гамильтониан, уравнения движения

1. Введение

Такие важные объекты двумерной гидродинамики, как точечные вихри, были введены еще Г. Гельмгольцем [1]. Исследования движения взаимодействующих точечных вихрей в ограниченных областях также были начаты достаточно давно. Впервые задача о движении одного и двух точечных вихрей в круге была рассмотрена в работе [2]. Используя метод изображений, А. Гринхилл исследовал движение таких вихрей как в круговой области, так и вне этой области. Эти исследования были продолжены в работе [3], в которой изучены

Получено 22 октября 2013 года
После доработки 12 декабря 2013 года

Кулик Константин Николаевич
koskul@isc.kharkov.ua
Институт монокристаллов НАН Украины
61001, Украина, г. Харьков, пр. Ленина, д. 60

Тур Анатолий Валентинович
anatoly.tour@cesr.fr
Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

Яновский Владимир Владимирович
yanovsky@isc.kharkov.ua
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61000, Украина, г. Харьков, пл. Свободы, д. 4
Институт монокристаллов НАН Украины
61001, Украина, г. Харьков, пр. Ленина, д. 60



устойчивые стационарные конфигурации вихрей одинаковой интенсивности внутри и вне круга. В работе [4] получена гамильтонова форма уравнений движения точечных вихрей внутри и вне круговой области. Эти исследования продолжены и в ряде более современных работ (см., например, [5–9]). Более детально с исследованиями движения взаимодействующих точечных вихрей (как в ограниченных областях, так и на плоскости) можно ознакомиться по современным обзорам [10–12]. Разумеется, важные исследования также посвящены поведению обычных вихрей и на других многообразиях, отличных от плоскости, таких как сфера (см., например, современные работы [13–16]), цилиндр [17] и тор [18, 19]. Здесь мы не будем касаться этих проблем, поэтому ограничимся общим указанием на книги [10–12], в которых можно найти подробные ссылки на эти исследования.

В работе [20] был обнаружен новый тип точечного дипольного вихря, который, как и ранее известный точечный вихрь, может рассматриваться в качестве специфических гидродинамических квазичастиц [11]. Взаимодействие между этими вихрями и обычными точечными вихрями определяет поле скорости в двумерной гидродинамике. Система произвольного числа таких вихрей оказалась гамильтоновой с тремя первыми интегралами движения, находящимися в инволюции [20]. Согласно теореме Лиувилля, это означает, что кроме известного случая интегрирования системы трех и менее обычных точечных вихрей [21–23] по аналогичной причине интегрируется задача о взаимодействии двух вихрей обычного и дипольного типа [20]. Точные решения и поведение двух точечных вихрей, один из которых дипольного типа, рассмотрены в работе [24]. Авторы работы [25], используя такие вихри, получили новые стационарные решения двумерной идеальной гидродинамики. В работе [26] приведен кратко пример движения точечного дипольного вихря у плоской стенки, более детальное исследование движения вихря у плоской границы можно найти в работе [27]. Кроме этого, в работе [27] исследовано движение точечного дипольного вихря в угловой области в виде угла $\pi/2$. Начало исследованиям движения обычного точечного вихря в угловых областях положено в работе [28].

В настоящей работе изучено движение точечного дипольного вихря в круговой области, ограниченной твердой стенкой. Получены уравнения движения такого вихря. Показан гамильтонов характер этих уравнений движения и найден гамильтониан. Доказана интегрируемость в квадратурах уравнений движения точечного дипольного вихря в круговой области. Обсуждается характер движения такого вихря и его влияние на перемешивание жидкости. Следствием этих результатов являются аналогичные утверждения о движении точечного дипольного вихря вблизи твердого цилиндра, помещенного в жидкость.

2. Функция тока дипольного вихря в круге

Рассмотрим функцию тока дипольного вихря

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \frac{D_i(x_i - x_i(t))}{(\vec{x} - \vec{x}(t))^2}. \quad (2.1)$$

Здесь $x_i(t)$ — положение дипольного вихря, а $\vec{D} = (D_1, D_2)$ — вектор дипольного момента. Введем комплексный потенциал U , мнимая часть которого совпадает с функцией тока, а реальная — с потенциалом течения

$$U = -\frac{i}{2\pi} \frac{D}{z - z(t)}.$$



Здесь введены следующие обозначения:

$$D = D_1 + iD_2,$$

$$z = x_1 + ix_2,$$

а $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$ определяет положение дипольного вихря на плоскости. Легко проверить, что мнимая часть введенного комплексного потенциала совпадает с функцией тока дипольного вихря. Перейдем теперь к функции тока точечного дипольного вихря в круговой области радиуса R . Для этого введем комплексный потенциал, который на границе круговой области принимает постоянное значение. Для этого можно использовать метод и результаты, приведенные в книге [29]. Введем в качестве исходного элемента сумму $-\frac{i}{2\pi} \frac{D}{z - z(t)}$ и комплексно-сопряженного к нему выражения $\frac{i}{2\pi} \frac{\bar{D}}{\bar{z} - \bar{z}(t)}$. Очевидно, что такая сумма принимает действительные значения. Теперь запишем комплексный потенциал, заменяя во втором слагаемом \bar{z} на R^2/z :

$$U = -\frac{i}{2\pi} \frac{D}{z - z(t)} + \frac{i}{2\pi} \frac{\bar{D}}{\frac{R^2}{z} - \bar{z}(t)}.$$

Легко понять, что записанный комплексный потенциал на границе круга $z = Re^{i\varphi}$ принимает чисто действительные значения и, соответственно, функция тока на границе равна нулю. Действительно, на границе $z = Re^{i\varphi} = R^2/\bar{z}$ и, соответственно, возникает сумма функции и комплексно-сопряженной к ней, то есть принимающая на окружности радиуса R только действительные значения. Это означает равенство нулю функции тока на окружности радиуса R . Полученный комплексный потенциал можно преобразовать к виду, удобному для интерпретации:

$$U = -\frac{i}{2\pi} \frac{D}{z - z(t)} - \frac{i}{2\pi} \frac{\bar{D}}{\bar{z}(t)} - \frac{i}{2\pi} \frac{D_1}{z - z_1(t)},$$

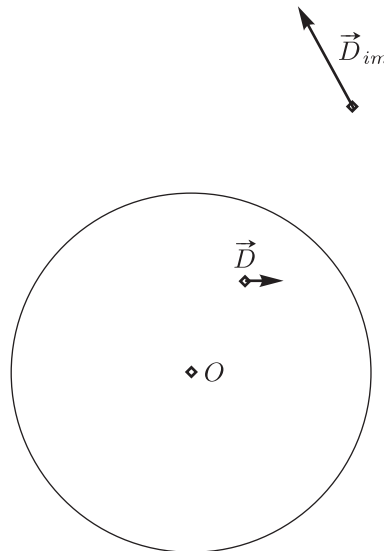


Рис. 1. Внутри круга показано положение точечного дипольного вихря и его дипольный момент \vec{D} . Вне круга показано положение вихря-изображения и его дипольный момент \vec{D}_{im} .

где $z_1(t) = \frac{R^2}{\bar{z}(t)}$, а $D_1 = \bar{D} \cdot \frac{R^2}{\bar{z}^2(t)}$. Из этого соотношения можно заметить, что, отбрасывая несущественную постоянную (не зависящую от z), получим комплексный потенциал двух дипольных вихрей, взаимодействующих друг с другом в безграничной среде. Вторым дипольным вихрь располагается в точке инверсии первого —

$$\vec{x}^{(1)}(t) = R^2 \left(\frac{x_1(t)}{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}, \frac{x_2(t)}{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \right), \quad (2.2)$$

с дипольным моментом

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 = & \frac{R^2}{(x_1(t)^2 + x_2(t)^2)^2} \times \\ & \times (D_1(x_1(t)^2 - x_2(t)^2) + 2D_2x_1(t)x_2(t), 2D_1x_1(t)x_2(t) - D_2(x_1(t)^2 - x_2(t)^2)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, поведение точечного дипольного вихря в круговой области можно описать, используя результаты взаимодействия двух определенных дипольных вихрей в безграничной среде. Следует отметить, что аналогично можно рассмотреть движение дипольного вихря вблизи твердого цилиндра кругового сечения. Для описания движения точечного дипольного вихря используем результаты работы [20].

3. Уравнение движения дипольного вихря в круге

Напомним уравнения движения двух взаимодействующих дипольных вихрей в безграничной среде [20]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_{di}^\beta(t)}{dt} = & -\varepsilon_{ik} \sum_{\gamma \neq \beta}^M \frac{D_l^\gamma(t)}{\pi} \left(\frac{\delta_{lk}}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^2} - \frac{2(x_{dl}^\beta - x_{dl}^\gamma)(x_{dk}^\beta - x_{dk}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^4} \right), \\ \frac{dD_i^\beta(t)}{dt} = & -D_m^\beta(t)\varepsilon_{ik} \left\{ \sum_{\gamma \neq \beta}^M \frac{D_l^\gamma(t)}{\pi} \left(-\frac{\delta_{lk}2(x_{dm}^\beta - x_{dm}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^4} - \frac{\delta_{ml}2(x_{dk}^\beta - x_{dk}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^4} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\delta_{mk}2(x_{dl}^\beta - x_{dl}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^4} + \frac{8(x_{dl}^\beta - x_{dl}^\gamma)(x_{dk}^\beta - x_{dk}^\gamma)(x_{dm}^\beta - x_{dm}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^6} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь греческие индексы принимают два значения $\beta, \gamma = 1, 2$ нумеруя точечные дипольные вихри и число вихрей $M = 2$ соответственно. Обозначение ε_{ik} соответствует единичному антисимметричному тензору. Подставляя в уравнения движения двух взаимодействующих дипольных вихрей в безграничной среде [20] связь положения (2.2) и дипольного момента образа (2.3), легко получить уравнения движения вихря в круговой области. После подстановки и простых (но громоздких) преобразований эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} = & \frac{R^2}{\pi} \frac{D_2}{(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = & -\frac{R^2}{\pi} \frac{D_1}{(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{dD_1(t)}{dt} &= \frac{2R^2}{\pi} \frac{x_2(D_1^2 + D_2^2)}{(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^3}, \\ \frac{dD_2(t)}{dt} &= -\frac{2R^2}{\pi} \frac{x_1(D_1^2 + D_2^2)}{(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^3}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Разумеется, эти уравнения следует дополнить интегралами движения, которые следуют из общей теории. Однако приведем их после обсуждения гамильтоновой формы уравнений движения. Запишем вид гамильтониана двух взаимодействующих дипольных вихрей, снова следуя работе [20]. Подставляя соответствующие связи, получим гамильтониан дипольного точечного вихря в круговой области в виде

$$H = -\frac{R^2}{2\pi} \frac{(D_1^2 + D_2^2)}{(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}. \quad (3.3)$$

Легко убедиться, что гамильтоновы уравнения движения

$$\frac{dx_i}{dt} = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial D_k}, \quad (3.4)$$

$$\frac{dD_i}{dt} = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (3.5)$$

после использования гамильтониана (3.3) в точности совпадают с системой уравнений (3.2), полученной непосредственно из уравнений движения. Таким образом, уравнения движения точечного вихря в круге являются гамильтоновыми с гамильтонианом, который совпадает с гамильтонианом общей теории после его специализации подстановкой характеристик вихря-изображения. Разумеется, кроме гамильтониана присутствуют и другие законы сохранения, которые установим ниже.

Перейдем к интегрированию уравнений движения точечного дипольного вихря в круговой области.

4. Движение точечного дипольного вихря в круговой области

Для доказательства интегрируемости уравнений движения используем прямое интегрирование уравнений без обращения к теореме Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем. Возвращаясь к уравнениям (3.2), можно заметить, что они упрощаются при переходе к удобным координатам. Выполним в этой системе уравнений замену переменных:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos(\varphi), & x_2 &= \rho \sin(\varphi), \\ D_1 &= D \cos(\psi), & D_2 &= D \sin(\psi). \end{aligned}$$

После перехода к переменным ρ , D , φ и ψ система уравнений (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{R^2}{\pi} \frac{D \sin(\psi - \varphi)}{(R^2 - \rho^2)^2}, \\ \rho \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{R^2}{\pi} \frac{D \cos(\psi - \varphi)}{(R^2 - \rho^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dD}{dt} &= -\frac{2R^2}{\pi} \frac{\rho D^2 \sin(\psi - \varphi)}{(R^2 - \rho^2)^3}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{2R^2}{\pi} \frac{\rho D \cos(\psi - \varphi)}{(R^2 - \rho^2)^3}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Важной особенностью этой системы уравнений является зависимость правых частей только от ρ и разности фаз $\psi - \varphi$. Из закона сохранения энергии в новых координатах следует соотношение

$$D = \alpha(R^2 - \rho^2), \quad (4.2)$$

где $\alpha = \sqrt{-\frac{2\pi H_0}{R^2}} > 0$ связано с начальным значением энергии H_0 . Используя этот интеграл движения, можно упростить систему уравнений (4.1). В результате получим замкнутую систему уравнений для переменных ρ и $\xi = \psi - \varphi$:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\alpha R^2}{\pi} \frac{\sin(\xi)}{(R^2 - \rho^2)} \\ \rho \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\alpha R^2}{\pi} \frac{\cos(\xi)(R^2 - 3\rho^2)}{(R^2 - \rho^2)^2}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Следует подчеркнуть, что эта система уравнений записана в относительных координатах. Так, фаза ξ характеризует направление дипольного момента относительно направления вектора положения дипольного вихря \vec{x} . Легко обнаружить частное точное решение системы уравнений (4.3) — это $\rho = R/\sqrt{3}$ и $\xi = 0$. Значение этого решения станет ясным далее. Из этой системы уравнений следует наличие дополнительного закона сохранения

$$\rho(R^2 - \rho^2) \cos(\xi) = \text{const.} \quad (4.4)$$

Этот закон сохранения полностью определяет траекторию движения в относительном пространстве (ρ, ξ) . На рисунке 2 приведены примеры таких траекторий. Исключая переменную ξ из первого уравнения системы (4.3), получим для ρ нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\alpha R^2}{\pi} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\text{const}}{\rho(R^2 - \rho^2)}\right)^2}}{(R^2 - \rho^2)}.$$

Решение этого уравнения легко записать в квадратурах. Таким образом, система уравнений (4.3) и, следовательно, исходная система уравнений (4.1) интегрируется в квадратурах. Разумеется, вычисление интегралов может оказаться невыполнимым в элементарных функциях, поэтому попытаемся использовать качественные соображения. Прежде всего заметим, что это уравнение можно рассматривать как результат однократного интегрирования движения частицы в центрально-симметричном поле. Действительно, возводя его в квадрат, получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha R^2}{\pi}\right)^2 \frac{\text{const} - \rho^2(R^2 - \rho^2)^2}{\rho^2(R^2 - \rho^2)^4} = 0.$$

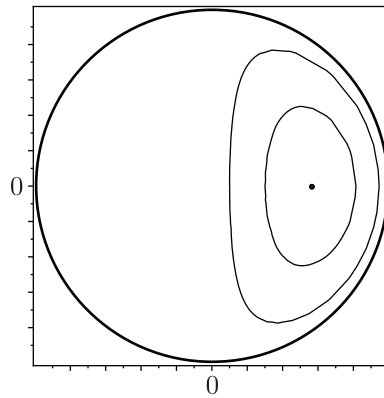


Рис. 2. В круговой области радиуса R показаны две типичные траектории в пространстве (ρ, ξ) . Внешняя соответствует начальным условиям $\rho(0) = 0.1$ и $\xi(0) = 0$, внутренняя — условиям $\rho(0) = 0.3$ и $\xi(0) = 0$ при выборе $R = 1$. Точка внутри — особая траектория при $\rho = 1/\sqrt{3}$ и $\xi = 0$. Для этих траекторий $\text{const} > 0$. При выборе начальных условий с $\text{const} < 0$ получим траектории, симметричные приведенным относительно вертикальной оси $\xi = \frac{\pi}{2}$.

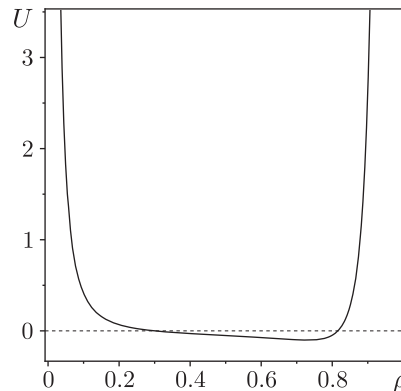


Рис. 3. Показана эффективная потенциальная энергия $U(\rho)$ для условий, соответствующих предыдущему рисунку, с начальным условием $\rho(0) = 0.3$ и $\xi(0) = 0$. Также приведен пунктиром уровень энергии $E = 0$. Хорошо видно ограничение движений в области $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$, совпадающее с наблюдаемым на рисунке 2 для соответствующей траектории.

В этом соотношении нетрудно узнать закон сохранения энергии в виде

$$m \frac{V^2}{2} + U(\rho) = E,$$

в котором $m = 1$, $V = \frac{d\rho}{dt}$, а уровень энергии выбран нулевым, $E = 0$. Полученная из этой аналогии эффективная потенциальная энергия, приведена на рисунке 3. Исходя из вида потенциальной энергии, легко представить все возможные режимы движения дипольного вихря. Вихрь совершает периодическое движение по ρ , отражаясь от точек поворота. Вычисление периода можно осуществить стандартным образом. Однако следует помнить, что параметры α и const определяются начальными условиями и в этом смысле вид эффективной потенциальной энергии U зависит от начальных условий. В этом состоит главное отличие от простого движения частицы в центрально-симметричном потенциале (см., на-



пример, [30]). Таким образом, траектория точечного дипольного вихря не может удаляться от центра круговой области на расстояние, превышающее ρ_{\max} , и не может приближаться к ее центру ближе, чем на расстояние ρ_{\min} . Зависимость этих границ (ρ_{\max} и ρ_{\min}) от параметров вихря легко установить из решения уравнения $\rho(R^2 - \rho^2) = \text{const}$. Это уравнение имеет два действительных решения ρ_{\max} и ρ_{\min} в интервале $[0, R]$ при выполнении условия $0 < \text{const} < \frac{2R^3}{3\sqrt{3}}$. Приведем для примера значение ρ_{\max} :

$$\rho_{\max} = \frac{R}{6} \left(12\sqrt{81C^2 - 12} - 108C \right)^{1/3} + \frac{2R}{\left(12\sqrt{81C^2 - 12} - 108C \right)^{1/3}}.$$

Здесь $C = \frac{\text{const}}{R^3}$, что и определяет зависимость от начальных условий и радиуса границы. Аналогично можно получить и выражение для ρ_{\min} :

$$\rho_{\min} = -\frac{R}{12} \left(12\sqrt{81C^2 - 12} - 108C \right)^{1/3} - \frac{R}{\left(12\sqrt{81C^2 - 12} - 108C \right)^{1/3}} - \frac{i\sqrt{3}R}{2} \left(\frac{1}{6} \left(12\sqrt{81C^2 - 12} - 108C \right)^{1/3} - \frac{2}{\left(12\sqrt{81C^2 - 12} - 108C \right)^{1/3}} \right).$$

Оно имеет более сложный вид и, несмотря на наличие i , принимает действительные значения в указанной выше области параметров. Аналогичное утверждение выполняется и для изменения относительной фазы ξ со временем:

$$-\xi_m \leq \xi \leq \xi_m.$$

Значение ξ_m легко найти из уравнения $\cos(\xi_m) = \frac{3\sqrt{3}C}{2}$, которое определяет касательную к траектории, проходящую через начало координат.

Учитывая инвариант (4.2), можно понять, что величина дипольного момента в процессе движения вихря также ограничена неравенствами

$$\alpha(R^2 - \rho_{\max}^2) \leq D \leq \alpha(R^2 - \rho_{\min}^2).$$

Напомним, что значение α определяется начальными условиями исходной задачи и радиусом R . Это означает, что размах изменения дипольного момента при движении вихря зависит от размера замкнутой области, занятой жидкостью. Следует ожидать, что этот эффект сохранится и в областях более сложной формы.

Остается обсудить движение вихря в круговой области уже в исходных координатах. Разумеется, траектория движения вихря в исходном пространстве заметно усложняется по сравнению с простыми траекториями на рисунке 2. Два важных обстоятельства определяют качественную картину движения вихря в исходном пространстве: периодическое изменение расстояния от центра с ограничениями $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$ и изменение фазы вращения. Для обсуждения изменения фазы положения вихря в пространстве (x_1, x_2) удобно записать второе уравнение системы (4.1) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha R^2}{(\text{const})^2} \cos(\xi)^2.$$

Легко заметить знакоопределенность правой части этого уравнения. Следовательно, значение фазы будет постоянно увеличиваться, что соответствует вращению вихря по часовой стрелке при постоянном значении $\alpha > 0$ или против — при $\alpha < 0$. Суперпозиция этих простых движений и определяет характер движения вихря. Пример типичной траектории вихря, полученный численно, показан на рисунке 4. Характер поведения траектории полностью согласуется с описанными выше результатами.

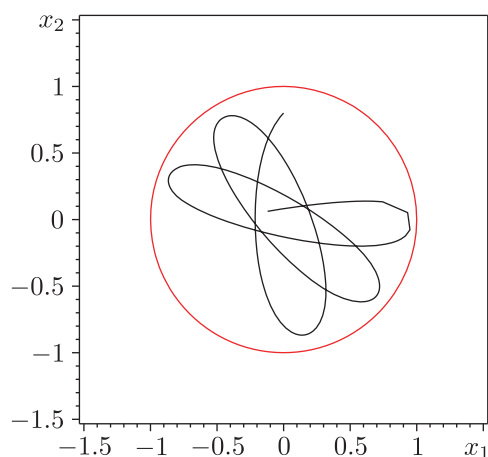


Рис. 4. Траектория движения дипольного точечного вихря в круговой области единичного радиуса. Для приведенной траектории начальные условия выбраны следующие: $x_1(0) = 0.0$, $x_2(0) = 0.8$, $D_1(0) = 1$, $D_2(0) = -1$.

5. Выводы

Задача о движении точечного дипольного вихря в круговой области имеет гамильтонову формулировку и интегрируется в квадратурах. Характер движения точечного дипольного вихря в замкнутой области напоминает захваченные траектории в центрально-симметричном поле. Следует заметить, что такой характер движения вихря указывает на исключительную эффективность его для интенсифицирования процессов перемешивания жидкости (в отличие от обычного точечного вихря). Обратим внимание, что исходя из полученных результатов можно также полностью описать и движение точечного дипольного вихря вблизи кругового цилиндра, помещенного в жидкость. Для этого достаточно следить за вихрем-изображением, введенном в этой работе (см. рис. 1). Уравнения движения и гамильтонова форма для такой ситуации получаются совершенно аналогично, просто в этом случае $\rho > R$. Характер движения такого вихря легко представить по движению вихря внутри круга.

Список литературы

- [1] Гельмгольц Г. Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 473–507 [Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew. Math., 1858, vol. 55, pp. 25–55]. См. также: Гельмгольц Г. Два исследования по гидродинамике: 1. О вихревом движении; 2. О прерывном движении жидкости / под ред. С. А. Чаплыгина. Москва: Типография О. Л. Сомовой, 1902. С. 5–51; репринтное издание: Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 7–40.

- [2] Greenhill A. G. Plane vortex motion // *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1877/78, vol. 15, no. 58, pp. 10–27.
- [3] Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *Phil. Mag.*, 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633.
- [4] Lin C. C. On the motion of vortices in two dimensions: 1, 2 // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1941, vol. 27, no. 2, pp. 570–577.
- [5] Milne-Thompson L. M. *Theoretical hydrodynamics*. 4th ed. New York: Macmillan, 1960. 660 pp.
- [6] Hardin J. C., Mason J. P. Periodic motion of two and four vortices in a cylindrical pipe // *Phys. Fluids*, 1984, vol. 27, no. 7, pp. 1583–1589.
- [7] Kimura Y. Motion of two point vortices in a circular domain // *J. Phys. Soc. Japan.*, 1988, vol. 57, no. 5, pp. 1641–1649.
- [8] Kimura Y., Kusumoto Y., Hasimoto H. Some particular solutions for symmetric motion of point vortices in a circular cylinder // *J. Phys. Soc. Japan.*, 1984, vol. 53, no. 9, pp. 2988–2995.
- [9] Simakov N. N. Dynamics of two vortices in circular domain // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 87–94.
- [10] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.
- [11] Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 704 с.
- [12] Тур А. В., Яновский В. В. Гидродинамические вихревые структуры. Харьков: Институт монокристаллов НАН Украины, 2012. 294 с.
- [13] Borisov A. V., Pavlov A. E. Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere: 1 // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 1, pp. 28–38.
- [14] Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a plane and a sphere: 2. General compact case // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 99–114.
- [15] Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a plane and a sphere: 3. Noncompact case. Problems of collapse and scattering // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 74–86.
- [16] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*, 2005, т. 1, № 2, с. 233–246.
- [17] Montaldi J., Soulière A., Tokieda T. Vortex dynamics of a cylinder // *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.*, 2003, vol. 2, no. 3, pp. 417–430.
- [18] Ткаченко В. К. Устойчивость вихревых решеток // *ЖЭТФ*, 1966, т. 50, № 6, с. 1573–1585.
- [19] O’Neil K. A. On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices // *J. Math. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 6, pp. 1373–1372.
- [20] Yanovsky V. V., Tur A. V., Kulik K. N. Singularities motion equations in 2-dimensional ideal hydrodynamics of incompressible fluid // *Phys. Lett. A*, 2009, vol. 373, no. 29, pp. 2484–2487.
- [21] Gröbli W. *Specielle Probleme über Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden* // *Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 1877, vol. 22, pp. 37–81.
- [22] Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей // *ЖЭТФ*, 1975, т. 68, № 5, с. 1868–1882.
- [23] Aref H. Motion of three vortices // *Phys. Fluids*, 1988, vol. 31, no. 6, pp. 1392–1409.
- [24] Кулик К. Н., Тур А. В., Яновский В. В. Взаимодействие точечного и дипольного вихрей в несжимаемой жидкости // *ТМФ*, 2010, т. 162, № 3, с. 459–480.
- [25] Tur A., Yanovsky V., Kulik K. Vortex structures with complex points singularities in the two-dimensional Euler equation: New exact solutions // *Phys. D*, 2011, vol. 240, no. 13, pp. 1069–1079.
- [26] Llewellyn Smith, S. G. How do singularities move in potential flow? // *Phys. D*, 2011, vol. 240, no. 20, pp. 1644–1651.
- [27] Tur A. V., Yanovsky V. V. Interaction of a dipole point vortex with flat boundary, arXiv:1204.4557v1 (20 Apr 2012).
- [28] Lewis T. C. Some cases of vortex motion // *Messenger of Math.*, 1879, vol. 9, pp. 93–95.

- [29] Milne-Thomson L. M. Theoretical aerodynamics. New York: Dover, 1966. 430 pp.
[30] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 1: Механика. 4-е изд. Москва: Наука, 1988. 216 с.

The evolution point dipole vortex in a domain with circular boundaries

Konstantin N. Kulik¹, Anatoly V. Tur², Vladimir V. Yanovsky³

^{1,3}Institute for Single Crystals of NAS of Ukraine
Lenin Ave. 60, Kharkov, 61001, Ukraine

²Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

³V. N. Karazin Kharkov National University
Svobody Sq. 4, Kharkov, 61022, Ukraine

¹koskul@isc.kharkov.ua, ²anatoly.tour@cesr.fr, ³yanovsky@isc.kharkov.ua

In this work considered the motion of a point dipole vortex in circular domain occupied by an ideal fluid. The motion equations for a dipole vortex in an domain bounded by solid wall, are obtained. These equations have the Hamiltonian form. Integrability in the quadratures of the motion equations for a point dipole vortex in a circular domain is proved. The character movement vortex is discussed.

MSC 2010: 76M23

Keywords: point dipole vortex, Hamiltonian, motion equations

Received October 22, 2013, accepted December 12, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 659–669 (Russian)